Logique & Analyse **218** (2012), 295–328

DE LA TOPOLOGIE DE LA CONCILIATION À LA LOGIQUE DE LA CONTRADICTION

D. LAMBERT ET B. HESPEL

1. *Introduction*

Nous nous proposons de décrire mathématiquement le processus, dit de « conciliation », grâce auquel parfois se trouvent « accordées des choses qui paraissent incompatibles » [28].

S'assigner pareil objectif étonnera peut-être. Ce genre de processus semble en effet tellement particulier et si peu susceptible de se trouver mis en oeuvre ailleurs que dans des domaines très spécifiques que l'étudier pourrait paraître totalement dénué d'intérêt. Mais nous espérons convaincre du contraire et sommes portés à croire que Jean Ladrière se serait beaucoup amusé à constater avec nous qu'il se pourrait que ce soit bel et bien le cas.[1]

Sur base de l'analyse de trois exemples détaillés au paragraphe 2 et destinés tant à préciser les caractéristiques de ce processus qu'à montrer qu'il est en réalité bien moins rare qu'on le croirait, nous définissons au paragraphe 3 la notion mathématique qui nous a paru adéquatement décrire le concept tiré de son examen, et que nous dénommons donc *conciliation*. Puis, nous donnons au paragraphe 4 trois exemples d'application de cette notion. Nous montrons alors au paragraphe 5 le lien que cette notion entretient avec la paraconsistance et la rapprochons au paragraphe 6 de la notion mathématique de faisceau. Au paragraphe 7, nous inspirant de la théorie des faisceaux, nous présentons ensuite la notion de cohomologie de conciliation. Enfin, au paragraphe 8, nous spéculons sur l'intérêt philosophique et scientifique qu'il y aurait à prêter attention aux occurrences de ce processus et à prendre au sérieux la description mathématique que nous en avons proposée et dont nous indiquons, dans deux appendices, quelques manières de la prolonger.

[1] Nous tenons à remercier Daniel Dzierzgowski dont les suggestions nous ont beaucoup aidés à améliorer notre manuscrit et le professeur Chris Mortensen qui a eu la gentillesse de nous dire son intérêt pour cette tentative, présentée dans une version anglaise préparatoire [11].

2. *Le processus de conciliation*

Imaginons une nation formée de deux populations occupant deux régions différentes d’un même territoire et manifestant sur certains points des opinions contradictoires. Les opinions étant toujours susceptibles de rassembler et donc d’engendrer des comportements collectifs, il paraît évident que la paix sociale ne sera garantie dans un tel pays qu’à la condition que ces opinions divergentes n’en génèrent jamais d’agressifs qui conduiraient à un affrontement physique de ces deux populations. Sous peine de voir cette nation disparaître, il s’agit donc, pour ceux qui en ont le pouvoir, de gouverner convenablement; et ceci ne peut manifestement se faire que de deux manières. La première consiste à négliger délibérément les opinions de ce genre, à éviter sciemment de les prendre en compte, c’est-à-dire à choisir de n’en laisser aucune s’exprimer au niveau national. Cette manière de gouverner, aussi simpliste que brutale, est celle que privilégiera un pouvoir central fort, de type dictatorial par exemple. Mais ce n’est évidemment pas celle que retiendra un pouvoir qui se veut démocratique. En démocratie, on s’efforcera plutôt de concilier ces opinions contradictoires, c’est-à-dire de faire en sorte que, pour différentes qu’elles soient, toutes soient rendues effectivement compatibles au niveau national et l’on ira, si nécessaire, jusqu’à nommer un conciliateur dont la mission sera d’y parvenir en découvrant le moyen de les reformuler d’une façon qui soit jugée acceptable par chacune des populations et néanmoins telle que leur incompatibilité s’estompe au niveau national. Toutefois, comme le montre la réalité politique, la tâche de la personne investie d’une telle mission est rarement aisée et son succès n’en est en fait jamais garanti. Car, pour parvenir à concilier des opinions, il ne suffit manifestement pas de se poser en médiateur, c’est-à-dire de s’efforcer de reformuler chacune sans la tronquer et de façon telle qu’elle puisse être entendue par la population qui ne la partage pas, il faut encore réussir à fonder la reformulation que l’on propose, c’est-à-dire découvrir au moins une idée qui soit partagée par les deux populations concernées et dont ces opinions ne soient elles-mêmes que deux expressions différentes. Faute d’une telle idée qui, lorsqu’elle existe, sera souvent le fait d’habitants résidant à la frontière des deux régions, rien d’essentiel en effet ne sera commun à ces populations et toute tentative de conciliation sera inéluctablement vouée à l’échec. Ce qui — heureusement — n’impliquera pas que la paix sociale soit aussitôt rompue mais imposera néanmoins de reconnaître qu’elle restera toujours menacée et ne pourra éventuellement se voir provisoirement préservée qu’au prix d’un modus vivendi forcément bancal, et donc fragile, obtenu au détriment de l’une des populations qui aura momentanément accepté de taire son opinion afin que seule puisse être entendue celle de l’autre, pourtant irréductiblement opposée à la sienne puisque enracinée dans une idée forcément différente. Bref, il ne saurait y avoir de conciliation véritable sans qu'existe au moins une idée commune en laquelle s'enracinent les opinions à concilier. Autrement dit, concilier ne consiste pas seulement à accorder ce qui s'oppose mais à obtenir un accord qui soit fondé.

Si c'est en politique que ce nom lui est le plus souvent donné, force est de constater que les situations dans lesquelles s'éprouve la capacité des êtres humains à vivre ensemble ne sont pas les seules où s'opère parfois un processus de conciliation. Des processus de ce genre peuvent au contraire se trouver mis en oeuvre dans d'innombrables circonstances, et notamment lors de certaines perceptions visuelles[2]. Tout le monde connaît en effet ces images que l'on dit « ambiguës », telle celle où l'on peut voir tour à tour un vase en son centre ou, si le regard se porte un peu vers l'extérieur, deux visages se faisant face [8, p. ex.]. Or une image comme celle-là constitue bel et bien une conciliation, en ce sens qu'elle résulte d'un processus du type qui nous intéresse ici, puisqu'elle accorde deux percepts différents en une seule représentation picturale globalement cohérente: telle zone de l'image représente, dans un cas, un élément particulier de l'un des deux visages, par exemple; tandis que, dans l'autre, cette même zone représente un élément du fond sur lequel se détache le vase. Il en va donc exactement des percepts suscités par une image de ce genre comme des opinions des deux populations de l'exemple précédent: ils se contredisent et pourtant coexistent. Mais on voit mieux encore sur cet exemple comment cela se peut. Des détails locaux identiques se situant à la frontière des différentes parties de l'image, à savoir sur chacune des lignes de séparation spatiale entre les régions centrale et périphériques, peuvent faire l'objet de deux interprétations différentes: formes du vase et de son pied d'un côté; formes du nez, de la bouche et du menton, caractéristiques d'un visage, de l'autre. De plus, on y voit fort bien pourquoi ce n'est précisément qu'à cette seule condition que cela est possible: si le dessinateur s'était satisfait de travailler comme d'habitude et donc de faire en sorte que chacun des traits délimitant le vase et les deux profils soit interprété comme le bord d'un vase ou comme le profil d'un visage, et non comme les deux à la fois, l'image aurait perdu toute ambiguïté et aurait simplement été celle d'un vase ou celle de deux visages. La possibilité de cette conciliation que constitue l'image ambiguë se joue donc localement, sur la frontière entre les différentes parties qui la composent; de même qu'une nation n'existe que s'il y a conciliation, et donc parce qu'existe au moins une idée qui soit commune aux populations qui l'habitent, l'image ambiguë n'existe

[2] Ou — pour être plus précis — lors de certains « actes de regard »; actes dont il convient de signaler que peuvent non seulement en résulter ces images ambiguës dont nous parlons ici mais des images « chimériques » [30] qui mériteraient, elles aussi, qu'on tente de traduire exactement le processus dont elles résultent — si, toutefois, il ne s'agit pas d'un simple processus de conciliation.

que parce que certains de ses détails peuvent faire l'objet d'interprétations divergentes. Peut-être sera-t-on tenté de penser que le phénomène qui se produit face à une image comme celle-là est beaucoup plus fréquent encore qu'on ne le croit et que c'est un phénomène du même genre que produisent ces autres images bien connues que sont, par exemple, le *Tripoutre* des Penrose [24] ou certaines des gravures dont Escher s'était fait une spécialité[3]. Mais il convient de remarquer que ces deux phénomènes ne sont en réalité aucunement identiques et tout au plus analogues. Car ce qui s'opère lors de l'observation d'une image comme celles-ci n'est en rien une conciliation. Et cela pour deux raisons: parce que, d'une part, aucun des points du *Tripoutre* des Penrose, de la *Cascade* ou du *Belvédère* d'Escher, par exemple, n'est susceptible de susciter deux percepts différents, de sorte qu'il n'y pas lieu de chercher à concilier les percepts causés par cette image; et parce que, d'autre part, quoique chacun des points d'une telle image ne soit ainsi susceptible que d'une seule interprétation, l'objet qu'elle représente n'en est pas moins impossible à réaliser physiquement, contrairement aux images ambiguës dont rien n'interdit en principe qu'existent les objets tridimensionnels qu'elles représentent. Bien loin de lui être identique, le processus dont résulte l'image ambiguë est donc plutôt « dual » de celui qui conduit à l'image impossible: l'un aboutit à une image globalement cohérente quoique localement inconsistante, l'autre à une image localement consistante mais globalement incohérente.

La philosophie est encore un autre domaine où s'observe le phénomène de conciliation. Cela surprendra sans doute, mais on ne saurait, à la réflexion, sérieusement s'en étonner dans la mesure où, de tout temps, la méthode implicite ou avouée — quand ce ne fut pas leur principale ambition — des philosophes les plus originaux fut précisément de penser ce qui ne l'avait pas été, de donner consistance à ce qui en paraissait dépourvu, de concevoir ce qui semblait contradictoire. Au point qu'on pourrait être tenté de lire la longue histoire de leurs efforts comme une suite de tentatives de conciliations conceptuelles, voulues toujours plus englobantes mais invariablement jugées seulement plus ou moins abouties. Et c'est en tout cas sans aucune difficulté que l'on relèverait d'audacieuses conciliations réalisées par Aristote, Descartes, Thomas d'Aquin, Leibniz, Locke, Kant, Husserl, Russell, Heidegger ou Badiou, par exemple, et même certains essais de conceptualisation de ce processus dus à Marx, Hegel, Spinoza, Nicolas de Cues ou Héraclite. Mais nous nous contenterons ici de mentionner Fichte dont la *Doctrine de la science* est particulièrement remarquable en ceci qu'on y trouve tout à la fois ce que l'on considère assez généralement comme l'un des efforts les plus

[3] Certaines et non toutes, car bon nombre des oeuvres d'Escher, comme ses célèbres pavages représentant des poissons et des oiseaux ou des anges et des démons, sont au contraire de magnifiques images ambiguës.

radicaux que fit jamais l'esprit pour se tourner vers lui-même et une illustration fort éclairante du processus de conciliation philosophique. Concevant le Moi comme acte posé (« Tathandlung »), Fichte y note en effet tout d'abord que le Moi, dans cet acte qu'il qualifie d'« intuition intellectuelle », se pose lui-même: « Das Ich setzt sich selbst » [4, p. 96]. Mais il relève aussitôt que, ce faisant, le Moi fait bien davantage que se poser lui-même puisque, dans ce même acte, il s'oppose aussi à soi-même comme Non-moi: « Dem Ich wird schlechthin entgegengesetzt ein Nicht-Ich » [4, p. 104]. Avec pour conséquence — comme l'écrit justement Joseph Maréchal — que s'impose alors la nécessité de « rechercher la *condition synthétique* sous laquelle une conciliation soit possible » [19, p. 366]. De sorte que — puisque c'est là la seule manière rigoureuse de préciser une condition à laquelle deux principes doivent de pouvoir être conjointement maintenus — Fichte en vient à énoncer un troisième principe, à savoir « Ich setze im Ich dem theilbaren Ich ein theilbares Nicht-Ich entgegen » [4, p. 110]. Autrement dit, il n'est selon lui d'autre solution que de reconnaître explicitement l'existence d'une limitation réciproque du Moi et du Non-moi, c'est-à-dire d'un « bord » qui, au sein du Moi, sépare le Moi du Non-moi autant qu'il l'y connecte; faute d'une telle frontière, dont l'existence doit donc impérativement être posée, tenir pour valables les deux premiers principes serait, à l'en croire, tout simplement impossible. Bref, ici encore, l'exigence d'une conciliation véritable entre deux termes contradictoires fait par contrecoup apparaître une contrainte sur un lieu situé à la limite de deux régions contiguës.

Bien d'autres exemples de conciliation pourraient sans doute être donnés, qui relèveraient de champs encore différents — de la science par exemple, et de la physique en particulier, voire des mathématiques — et confirmeraient ainsi ce que ces trois exemples suggèrent, à savoir qu'il ne paraît aucunement déplacé de considérer le concept associé au processus spécifique dont ils constituent autant de concrétisations particulières; concept qui, comme nous venons de le voir, s'articule à ceux d'énoncé, de vérité, de médiation, de contradiction, de consistance et — ce qui est plus inattendu — de lieu.

3. *Une formulation mathématique du concept*

Lorsqu'on cherche à formuler mathématiquement ce concept de conciliation afin d'en fixer le contenu le plus clairement possible, c'est tout naturellement vers la topologie qu'on songe à se tourner, en raison de ce rapport quelque peu surprenant qu'entretient ce concept avec celui de lieu. Et l'on constate, une fois ce choix posé, que les définitions suivantes s'imposent alors quasiment d'elles-mêmes.

Soit X un espace topologique et $\mathrm{Fer}(X)$ l'ensemble de ses fermés.
Une *préconciliation* sur X est définie par les données suivantes:

(a) une application G qui associe à tout fermé W appartenant à $\mathrm{Fer}(X)$ un ensemble $G(W)$;

(b) $\forall W_1, W_2 \in \mathrm{Fer}(X)$ tels que $W_2 \supseteq W_1$, une application $\delta_{W_1}^{W_2} : G(W_1) \to G(W_2)$, appelée *médiation*, vérifiant les propriétés suivantes:

$$\forall W \in \mathrm{Fer}(X) : \delta_W^W = \mathrm{id}_W \tag{1}$$

où id_W est l'application identité sur W, et

$$\forall W_1, W_2, W_3 \in \mathrm{Fer}(X) : W_3 \supseteq W_2 \supseteq W_1 \Rightarrow \delta_{W_2}^{W_3} \circ \delta_{W_1}^{W_2} = \delta_{W_1}^{W_3}. \tag{2}$$

Une famille $(W_i)_{i \in I}$ est un *corecouvrement fermé fini de* $W \in \mathrm{Fer}(X)$ ssi I est fini, $\forall i \in I : W_i \in \mathrm{Fer}(X)$ et $W = \bigcap_{i \in I} W_i$.

Une préconciliation G sur X est dite *séparée* ssi elle vérifie la propriété suivante:

$$\begin{aligned}&\text{pour tout } W \in \mathrm{Fer}(X), W \neq \varnothing,\\ &\text{et tout corecouvrement fermé fini } (W_i)_{i \in I} \text{ de } W,\\ &\text{on a: } \forall j \in I\ \forall t, s \in G(W) : \delta_W^{W_j}(t) = \delta_W^{W_j}(s) \Rightarrow t = s.\end{aligned} \tag{3}$$

Une préconciliation séparée G sur X est une *conciliation* sur X ssi elle vérifie la propriété suivante:

$$\begin{aligned}&\text{pour tout } W \in \mathrm{Fer}(X), W \neq \varnothing,\\ &\text{tout corecouvrement fermé fini } (W_i)_{i \in I} \text{ de } W,\\ &\text{et tout } (t_i)_{i \in I} \text{ tel que } \forall i \in I : t_i \in G(W_i),\\ &\text{si } \forall i, j \in I : \delta_{W_i}^{W_i \cup W_j}(t_i) = \delta_{W_j}^{W_i \cup W_j}(t_j)\\ &\text{alors } \exists! t \in G(W)\ \forall i \in I : \delta_W^{W_i}(t) = t_i.\end{aligned} \tag{4}$$

Comme on le voit, cet enchaînement de définitions revient en fin de compte à définir une conciliation comme une relation fonctionnelle partout définie faisant correspondre aux fermés d'un espace topologique, ordonnés par inclusion, des ensembles eux-mêmes reliés au moyen de fonctions, elles aussi partout définies, vérifiant quatre propriétés seulement. Propriétés dont il est cependant très facile de s'assurer qu'elles suffisent à exprimer toutes les caractéristiques des médiations dont nous avons noté qu'elles étaient nécessaires à l'existence d'un processus de conciliation abouti. Les propriétés

(1) et (2) garantissent en effet qu'une médiation existe pour tout fermé et que chacune est à la fois fidèle et généralisante; la propriété (3), qu'aucune de ces généralisations n'introduit la moindre confusion; et la propriété (4), que toutes sont bien telles que chaque élément de l'ensemble qu'elle relie à la réunion de deux fermés soit image, par l'une d'entre elles, d'un seul et même élément de leur intersection, ce qui revient bien à dire qu'il n'y a de conciliation que fondée[4]. La notion de conciliation, ainsi définie, paraît donc adéquatement exprimer le concept de conciliation que les exemples que nous avons examinés invitaient à considérer.

On peut achever de s'en convaincre en notant, réciproquement, qu'elle permet effectivement de décrire le processus de conciliation mis en oeuvre dans ces différents exemples. Ainsi, dans le cas de cette image d'un vase qui n'est pas celle d'un vase puisqu'elle est l'image de deux visages identiques qui se font face, considérons W la partie centrale de l'image, c'est-à-dire celle qui ressemble à un vase, munie de sa frontière. Assimilons-la à un fermé d'un sous-espace fermé X de l'espace euclidien à deux dimensions, correspondant lui-même à l'image toute entière. Considérant alors $\neg W$, le plus petit fermé contenant le complémentaire de W, et correspondant donc aux deux visages, on constate que la frontière $\partial W = W \cap \neg W$ qui sépare les deux régions fermées, et qui correspond au vase et aux visages, n'est pas vide! Ce qui autorise la construction de la conciliation G suivante, par exemple. A chacun de ces deux fermés, on fait correspondre un ensemble de phrases qui les interprètent. « Ceci est un vase ancien » sera, par exemple, une phrase de $G(W)$ et « ils ont l'air de sourire », une phrase de $G(\neg W)$. L'ensemble $G(\partial W) = G(W \cap \neg W)$ correspondra alors à des phrase ambiguës puisque susceptibles de se rapporter à un face-à-face ou à un vase! Quant à celle-ci, « à gauche et à droite de l'image on peut voir deux courbes qui sont images miroirs l'une de l'autre », il pourra s'agir d'une phrase de $G(X)$, autrement dit d'une phrase se rapportant à l'image ambiguë toute entière. Dire qu'il existe une conciliation sur X reviendra tout simplement à affirmer l'existence d'une image globale cohérente intégrant à la fois un vase et le face-à-face de deux visages identiques. Les médiations de cette conciliation constitueront des traductions des phrases se rapportant au vase ou au face-à-face en termes de phrases qui se rapportent à l'image toute entière. Un effet de la médiation $\delta_W^X : G(W) \to G(X)$ pourrait être, par exemple, de transformer la phrase t_W, « voici l'axe de symétrie du vase », en la phrase $\delta_W^X(t_W) = t_X$, « voici

[4] On fera peut-être remarquer que l'unicité de cet élément commun ne paraissait pas requise dans les exemples que nous avons considérés. Et l'on aurait raison. Mais on remarquera aussi que la présence de cette caractéristique découle du caractère injectif des médiations, de sorte qu'on ne saurait la refuser sans abandonner du même coup la définition que nous avons donnée de celles-ci; ce qui serait d'autant plus regrettable qu'exiger cette unicité ne semble aucunement rédhibitoire.

une ligne fictive placée entre les deux courbes limitant la région et qui permet de les relier par une réflexion ». La médiation $\delta_{\neg W}^{X} : G(\neg W) \to G(X)$ transformerait, elle aussi, la phrase $t_{\neg W}$, « voici un axe de symétrie placé entre les deux visages et qui permettrait de les relier par réflexion », en cette même phrase $t_X = \delta_{\neg W}^{X}(t_{\neg W})$. Dans cet exemple, l'existence de la conciliation exprimerait ainsi le fait que la possibilité de poser de manière cohérente la contrainte globale $\delta_W^X(t_W) = t_X = \delta_{\neg W}^{X}(t_{\neg W})$ s'enracine dans la liberté qu'a le spectateur d'interpréter des détails de la frontière $\partial W = W \cap \neg W$ par des phrases qui tantôt se rapportent à deux visages, tantôt se rapportent à un vase. Fait qui se traduirait par l'existence d'une phrase unique $t_{\partial W}$ de $G(W)$, pouvant s'interpréter comme t_W par la médiation $\delta_{\partial W}^{W}$ ou comme $t_{\neg W}$ par la médiation $\delta_{\partial W}^{\neg W}$, et qui serait par exemple « tous les points de la frontière déterminent une figure géométrique admettant un axe de symétrie ».

4. *Trois exemples d'application*

En plus d'en fixer le contenu avec précision et de décrire avec exactitude le processus qui lui est associé, formuler mathématiquement le concept de conciliation permet d'en envisager des applications qui seraient restées inaperçues ou auraient été difficiles à imaginer. Nous en donnerons trois exemples, dont l'un se révélera vite très utile.

4.1. *Une conciliation naturelle*

Soit X un espace topologique et $\mathrm{Fer}(X)$ l'ensemble de ses fermés. Pour tout $W_i \in \mathrm{Fer}(X)$, considérons l'application

$$W_i \mapsto \mathfrak{Z}(W_i) = \{Z \in \mathrm{Fer}(X) \mid Z \supseteq W_i\}$$

et définissons les applications

$$\delta_{W_i}^{W_j} : \mathfrak{Z}(W_i) \to \mathfrak{Z}(W_j) : Z_i \mapsto \delta_{W_i}^{W_j}(Z_i) = Z_i \cup W_j.$$

On vérifie que les propriétés (1), (2) et (3) sont trivialement satisfaites et que $\mathfrak{Z}$ est donc une préconciliation séparée. Mais on montre facilement que cette préconciliation satisfait en outre la condition (4) et qu'elle est donc aussi une conciliation sur X.

Supposons en effet que

$$\forall i, j \in I\ \forall Z_i \in \mathfrak{Z}(W_i)\ \forall Z_j \in \mathfrak{Z}(W_j) : \delta_{W_i}^{W_i \cup W_j}(Z_i) = \delta_{W_j}^{W_i \cup W_j}(Z_j).$$

Nous devons alors prouver que $\exists! Z \in \mathfrak{Z}(W_i \cap W_j)$: $\delta^{W_i}_{W_i \cap W_j}(Z) = Z_i$ et $\delta^{W_j}_{W_i \cap W_j}(Z) = Z_j$.

On a, par hypothèse:

$$\delta^{W_i \cup W_j}_{W_i}(Z_i) = \delta^{W_i \cup W_j}_{W_j}(Z_j) \Leftrightarrow Z_i \cup W_i \cup W_j = Z_j \cup W_i \cup W_j.$$

Mais $Z_i \in \mathfrak{Z}(W_i)$ and $Z_j \in \mathfrak{Z}(W_j)$, de sorte que l'on obtient: $Z_i \cup W_j = Z_j \cup W_i$. Ce qui amène à conclure que l'unique fermé Z recherché n'est autre que $Z_i \cap Z_j$. En effet,

$$\begin{aligned}
\delta^{W_i}_{W_i \cap W_j}(Z_i \cap Z_j) &= (Z_i \cap Z_j) \cup W_i \\
&= (Z_i \cup W_i) \cap (Z_j \cup W_i) = Z_i \cap (Z_j \cup W_i) \\
\delta^{W_j}_{W_i \cap W_j}(Z_i \cap Z_j) &= (Z_i \cap Z_j) \cup W_j \\
&= (Z_i \cup W_j) \cap (Z_j \cup W_j) = (Z_i \cup W_j) \cap Z_j.
\end{aligned}$$

Mais, comme $Z_i \subseteq Z_i \cup W_j = Z_j \cup W_i$, $Z_j \subseteq Z_j \cup W_i = Z_i \cup W_j$, on en déduit que

$$\delta^{W_i}_{W_i \cap W_j}(Z_i \cap Z_j) = Z_i, \delta^{W_j}_{W_i \cap W_j}(Z_i \cap Z_j) = Z_j$$

et donc, puisque $\delta^{W_i}_{W_i \cap W_j}$ et $\delta^{W_j}_{W_i \cap W_j}$ sont bien des médiations vérifiant la propriété (3), que $Z_i \cap Z_j$ est le seul élément de $\mathfrak{Z}(W_i \cap W_j)$ satisfaisant ces deux relations.

4.2. *Une conciliation triviale*

Une autre conciliation sur cet espace topologique X est obtenue par la considération, pour tout $W_i \in \mathrm{Fer}(X)$, de l'application $1 : W_i \to \{*\}\restriction_{W_i}$ qui associe un singleton à tout fermé. Si l'on pose simplement: $\delta^{W_j}_{W_i}(*\restriction_{W_i}) = *\restriction_{W_j}$, on vérifie en effet immédiatement que ces $\delta^{W_j}_{W_i}$ sont bien des médiations satisfaisant les propriétés (3) et (4) et que l'application en question est donc bien une conciliation sur X.

4.3. *Une conciliation en analyse fonctionnelle*

Le théorème d'extension de Tietze [31] s'énonce comme suit:

Soient X un espace normal et F l'un de ses sous-espaces fermés. Si f est une fonction continue définie sur F à valeurs dans un intervalle fermé $[a, b]$ de la droite réelle, alors f possède une extension continue g définie sur tout X et à valeurs dans $[a, b]$.

Afin d'utiliser ce théorème pour construire une nouvelle conciliation, rappelons qu'un espace T_1 est un espace topologique dans lequel chaque point est un ensemble fermé et qu'un espace topologique est normal s'il est un espace T_1 dans lequel deux ensembles fermés disjoints peuvent toujours être séparés par des ensembles ouverts. Si l'on se souvient qu'un espace de Hausdorff est un espace tel que deux points distincts peuvent toujours y être séparés par des ouverts, en ce sens qu'ils y ont des voisinages distincts, on voit alors qu'un espace de Hausdorff compact est un espace normal et, puisque tout sous-espace compact d'un espace de Hausdorff est fermé, que les conditions de ce théorème seront rencontrées pour chacun des sous-espaces compacts de l'espace considéré dès que celui-ci est un espace de Hausdorff.

Considérons dès lors deux sous-espaces compacts H_1 et H_2 d'un espace de Hausdorff H, tels que $H_1 \cup H_2 = H$. Soient aussi les fonctions continues $f_1 : H_1 \to [a, b]$ et $f_2 : H_2 \to [a, b]$. En vertu du théorème de Tietze, ces deux fonctions admettent des extensions continues: $g_1 : H \to [a, b]$ et $g_2 : H \to [a, b]$. On peut donc écrire: $f_j = g_j \circ J_j$ ($j = 1, 2$), où J_j désigne l'inclusion de H_j dans H.

Appelons respectivement $G(H_1)$ et $G(H_2)$ les ensembles des fonctions continues des fermés H_1 et H_2 dans $[a, b]$. On voit alors que les extensions de ces fonctions continues peuvent être considérées comme des médiations d'une conciliation G construite sur $H_1 \cap H_2$ qui, à chaque sous-espace fermé, fait correspondre un ensemble de fonctions continues sur cet espace à valeurs dans $[a, b]$. On remarque en effet que, lorsqu'est imposée la contrainte

$$g_1 = g_2, \quad g_1 := \delta^H_{H_1}, \quad g_2 := \delta^H_{H_2},$$

G vérifie bien la condition que doit satisfaire toute conciliation, à savoir que

$$\exists! g : H_1 \cap H_2 \to H : \delta^{H_1}_{H_1 \cap H_2} g = f_1 \; et \; \delta^{H_2}_{H_1 \cap H_2} g = f_2,$$

en vertu du fait que $f_1 \circ K_1 = g_1 \circ J_1 \circ K_1 \equiv g_2 \circ J_2 \circ K_2 = f_2 \circ K_2 := g$, où K_j est l'inclusion de $H_1 \cap H_2$ dans H_j, et du fait que $J_1 \circ K_1 = J_2 \circ K_2 : H_1 \cap H_2 \to H$.

La notion de conciliation est donc étroitement liée à celle d'extension. De plus, il est intéressant de noter que le caractère fermé des ensembles considérés est tout à fait crucial, tant dans le théorème de Tietze que dans la définition de la conciliation. Si ces sous-espaces n'étaient pas fermés, on ne pourrait ni garantir l'existence d'une extension continue ni satisfaire la condition de cohérence, nécessaire à l'existence d'une conciliation. Si l'on prenait par exemple $H = [0,1]$, $H_1 =]0,1]$, $f_1 : H_1 \to H : x \mapsto f_1(x) = \sin(1/x)$, l'espace H_1 ne serait plus fermé dans H et l'on vérifierait facilement que f_1 ne peut plus être étendue en une fonction continue sur tout H. La définition de la notion de conciliation à partir de fermés n'est donc nullement artificielle mais semble au contraire dictée par la nature même des médiations qui, dans ce cas particulier, sont les extensions.

5. *Conciliation et paraconsistance*

Comme nos exemples initiaux indiquaient l'existence d'un rapport entre le concept de conciliation et ceux de vérité, de contradiction et de consistance, on s'attend à ce que la notion mathématique que nous avons définie ne soit pas complètement étrangère à toute considération de nature logique qui ne refuserait pas d'emblée l'existence de contradictions vraies. Et ceci se trouve très rapidement confirmé.

Il suffit, pour cela, de se souvenir de la notion d'algèbre de Brouwer [20], « duale » de celle d'algèbre de Heyting [1, pp. 129–134]: une *algèbre de Brouwer*, ou algèbre de coHeyting, notée $\langle B, \wedge, \vee, 0, 1, \overset{\circ}{\leftarrow} \rangle$, est un treillis borné distributif avec élément minimal 0 et élément maximal 1, muni d'une opération binaire $\overset{\circ}{\leftarrow}$, appelée *pseudo-différence*, vérifiant la propriété suivante:

$$\forall a, b, c \in B : (a \overset{\circ}{\leftarrow} b) \leqslant c \Leftrightarrow a \leqslant (b \vee c),$$

où $\leqslant$ est la relation d'ordre définie sur le treillis par $a \leqslant b \Leftrightarrow a = a \wedge b \Leftrightarrow b = a \vee b$.

On sait en effet que, de la même manière que l'algèbre de Boole est liée à la logique classique des propositions et que l'algèbre de Heyting est liée à une logique intuitionniste des propositions, l'algèbre de Brouwer correspond à une logique paraconsistante des propositions [20, 27, 6]. A chaque proposition p de cette logique, on fait correspondre un élément $a(p)$ d'une algèbre de Brouwer $\langle B, \wedge, \vee, 0, 1, \overset{\circ}{\leftarrow} \rangle$. A la conjonction et à la disjonction, on fait respectivement correspondre les opérations $\wedge$ et $\vee$. La contradiction $\bot$ et la tautologie $\top$ sont respectivement associées aux éléments 0 et 1. Enfin, la négation paraconsistante $\neg$ correspond, dans l'algèbre de Brouwer, à $1 \overset{\circ}{\leftarrow} a(p)$. La logique obtenue ne vérifie plus le principe de non-contradiction: $p \wedge \neg p \leftrightarrow \bot$.

Or un exemple classique d'algèbre de Brouwer est précisément construit à partir de l'ensemble des fermés d'un espace topologique. Ainsi,

$$\langle \mathrm{Fer}(X), \cap, \cup, , X, \overset{\circ}{\Leftarrow} \rangle$$

est une algèbre de Brouwer où l'on a défini la pseudo-différence comme suit:

$$(Z \overset{\circ}{\Leftarrow} W) := \overline{\complement_X W} \cap Z,$$

$\complement_X W$ désignant le complément de W dans X et la barre horizontale la fermeture d'un ensemble, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant cet ensemble. Une logique paraconsistante interprétée par cette algèbre verrait sa négation traduite $\neg p$ par

$$(X \overset{\circ}{\Leftarrow} W(p)) := \overline{\complement_X W(p)} \cap X = \overline{\complement_X W(p)}.$$

Si, par exemple, nous prenons pour espace X l'ensemble des nombres réels et pour $\mathrm{Fer}(X)$ l'ensemble de ses intervalles fermés, nous vérifions aisément que le principe de non-contradiction $p \wedge \neg p \leftrightarrow \perp$ n'y est plus vérifié. En effet, choisissons $W(p) = [0, 1]$. Nous avons alors:

$$W(p) \cap \overline{\complement_X W(p)} = \{0\} \cup \{1\} \neq \varnothing.$$

De façon imagée, on peut dire que la contradiction subsiste « sur le bord du fermé ».

En fait, on peut démontrer que toute algèbre de Brouwer est une sous-algèbre d'une algèbre de Brouwer de fermés d'un espace topologique particulier [20]. Résultat qui est le pendant du résultat bien connu affirmant que toute algèbre de Heyting est une sous-algèbre d'une algèbre de Heyting d'ouverts d'un espace topologique. On sait par ailleurs que toute algèbre de Boole peut être vue comme une sous-algèbre d'une algèbre de Boole des parties d'un ensemble.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{Z}(W_i) = \{Z \in \mathrm{Fer}(X) \mid Z \supseteq W_i\}$, introduit au paragraphe précédent. A la suite de James et Mortensen [21], on peut montrer que $\langle \mathfrak{Z}(W_i), \cap, \cup, \varnothing, X, \underset{W_i}{\overset{\circ}{\Longleftarrow}} \rangle$ est une algèbre de Brouwer où la pseudo-différence est définie par:

$$(Z \underset{W_i}{\overset{\circ}{\Longleftarrow}} W) := (\overline{\complement_X W} \cap Z) \cup W_i,$$

pour tout $Z, W \in \mathfrak{Z}(W_i)$.

Il suffit, pour cela, de prouver que, pour $\forall Z, W, T \in \mathfrak{Z}(W_i)$,

$$(Z \overset{\circ}{\underset{W_i}{\Longleftarrow}} W) \subseteq T \Leftrightarrow Z \subseteq (W \cup T),$$

c'est-à-dire que

$$(\overline{\complement_X W} \cap Z) \cup W_i \subseteq T \Leftrightarrow Z \subseteq (W \cup T);$$

ce dont des considérations ensemblistes convainquent rapidement.

Remarquons que, dans cette définition, l'union avec W_i garantit que $(Z \overset{\circ}{\underset{W_i}{\Longleftarrow}} W)$ appartient bien à $\mathfrak{Z}(W_i)$ alors que, d'une façon générale, si $Z, W \in \mathfrak{Z}(W_i)$,

$$(\overline{\complement_X W} \cap Z) = (Z \overset{\circ}{\Leftarrow} W) \notin \mathfrak{Z}(W_i).$$

Si l'on se souvient de la conciliation $\mathfrak{Z}$ sur X, qui était notre premier exemple d'application de la notion de conciliation, on constate ainsi qu'elle n'est autre que l'application faisant correspondre à chaque fermé W de X une algèbre de Brouwer particulière construite en prenant tous les fermés contenant W. Car les médiations, qui la définissent, conservent bien l'opération $\overset{\circ}{\underset{W_i}{\Longleftarrow}}$ caractéristique de ce genre d'algèbre. On vérifie en effet que

$$\forall W_i \subseteq W_j : \; \delta_{W_i}^{W_j}(Z \overset{\circ}{\underset{W_i}{\Longleftarrow}} W) \; = \; \delta_{W_i}^{W_j}(Z) \overset{\circ}{\underset{W_j}{\Longleftarrow}} \delta_{W_i}^{W_j}(W).$$

grâce à un résultat calculatoire dérivé par James et Mortensen dans un autre contexte [10], à savoir que

$$\begin{aligned}
\delta_{W_i}^{W_j}(Z \overset{\circ}{\underset{W_i}{\Longleftarrow}} W) &= \big((\overline{\complement_X W} \cap Z) \cup W_i\big) \cup W_j \\
&= (\overline{\complement_X W} \cap Z) \cup W_j = Z \overset{\circ}{\underset{W_i}{\Longleftarrow}} W \\
\delta_{W_i}^{W_j}(Z) \overset{\circ}{\underset{W_j}{\Longleftarrow}} \delta_{W_i}^{W_j}(W) &= \big(\overline{\complement_X (W \cup W_j)} \cap (Z \cup W_j)\big) \cup W_j,
\end{aligned}$$

et grâce à l'égalité suivante que l'on établit sans difficulté:

$$
\begin{aligned}
&\big(\overline{\complement_X(W \cup W_j} \cap (Z \cup W_j)\big) \cup W_j \\
&\qquad = \overline{\big(\complement_X(W \cup W_j) \cap (Z \cup W_j)\big) \cup W_j} \\
&\qquad = \overline{\big(\complement_X(W \cup W_j) \cup W_j\big) \cap \big((Z \cup W_j) \cup W_j\big)} \\
&\qquad = \overline{\big(\complement_X(W \cup W_j) \cup W_j\big) \cap (Z \cup W_j)} \\
&\qquad = \overline{\big((\complement_X(W) \cap \complement_X(W_j)) \cup W_j\big) \cap (Z \cup W_j)} \\
&\qquad = \overline{\big((\complement_X(W) \cup W_j) \cap (\complement_X(W_j) \cup W_j)\big) \cap (Z \cup W_j)} \\
&\qquad = \overline{(\complement_X(W) \cup W_j) \cap (Z \cup W_j)} \\
&\qquad = \overline{(\complement_X(W) \cap (Z \cup W_j)) \cup (W_j \cap (Z \cup W_j))} \\
&\qquad = \overline{(\complement_X(W) \cap Z) \cup (\complement_X(W) \cup W_j) \cup W_j} \\
&\qquad = \overline{(\complement_X(W) \cap Z) \cup W_j} \\
&\qquad = \overline{(\complement_X(W) \cap Z)} \cup W_j \\
&\qquad = Z \overset{\circ}{\underset{W_j}{\Longleftarrow}} W.
\end{aligned}
$$

La notion de conciliation que nous avons définie est donc intimement liée à celle de logique paraconsistante.

6. *Conciliations* vs *faisceaux*

Mais s'il n'est pas difficile de voir qu'une conciliation met en correspondance des fermés et des algèbres de Brouwer particulières, il est plus facile encore de remarquer qu'une conciliation G peut être alternativement définie comme un foncteur covariant de la catégorie des fermés sur X, dont les objets sont les fermés et les morphismes les inclusions d'un fermé dans un autre, dans la catégorie des ensembles, décrit par la diagramme commutatif suivant:

$$
\begin{tikzcd}
W_j \arrow[r, "G"] & G(W_j) \\
W_i \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "G"] & G(W_i) \arrow[u, "\delta^{W_j}_{W_i}"']
\end{tikzcd}
$$

De sorte que, conformément à ce que suggéraient deux des exemples dont nous nous sommes inspirés, la notion de conciliation sur X apparaît en quelque sorte comme une « dualisation » de la notion de faisceau sur X[5], puisqu'un faisceau F sur X peut être défini comme un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts sur X, dont les objets sont les ouverts et les morphismes les inclusions entre les ouverts, dans la catégorie des ensembles, décrit par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{F} & F(U_j) \\ \subseteq\Big\uparrow & & \Big\downarrow \rho_{W_i}^{W_j} \\ U_i & \xrightarrow{F} & F(U_i) \end{array}$$

Et, comme il se doit, cette « dualité » se remarque également lorsqu'on rapproche la définition que nous avons proposée de celle de faisceau, à laquelle aboutit — comme on le sait [16] — l'enchaînement des définitions suivantes.

Soit X un espace topologique et $\mathrm{Ouv}(X)$ l'ensemble de ses ouverts.
Un *préfaisceau* F sur X est défini en donnant:

(a) une application F qui associe à chaque ouvert U de $\mathrm{Ouv}(X)$ un ensemble $F(U)$;

(b) $\forall U_1, U_2 \in \mathrm{Ouv}(X)$ tels que $U_1 \subseteq U_2$, une application $\rho_{U_1}^{U_2} : F(U_2) \to F(U_1)$, appelée *restriction*, vérifiant les propriétés suivantes:

$$\forall U \in \mathrm{Ouv}(X) : \rho_U^U = \mathrm{id}_U \tag{5}$$

où id_U est l'application identité sur U, et

$$\forall U_1, U_2, U_3 \in \mathrm{Ouv}(X) : U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \Rightarrow \rho_{U_1}^{U_2} \circ \rho_{U_2}^{U_3} = \rho_{U_1}^{U_3}. \tag{6}$$

Une famille $(U_i)_{i \in I}$ est *un recouvrement ouvert fini* de $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ ssi I est fini, $\forall i \in I : U_i \in \mathrm{Ouv}(X)$ et $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.

[5] Si nous n'avions pas découvert au moment de terminer notre rédaction que Glen Bredon avait déjà donné ce nom à une structure différente [2], nous aurions donc signalé qu'une conciliation pouvait aussi être appelée *cofaisceau*.

Un préfaisceau sur F est dit *séparé* s'il se fait en outre que:

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } U \in \mathrm{Ouv}(X))\\
&\text{et tout recouvrement ouvert fini } (U_i)_{i\in I} \text{ de } U,\\
&\text{on a: } \forall j \in I\ \forall t, s \in F(U) : \rho^U_{U_j}(t) = \rho^U_{U_j}(s) \Rightarrow t = s.
\end{aligned} \tag{7}$$

Un préfaisceau séparé F sur X est un *faisceau* sur X ssi il vérifie la propriété suivante:

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } U \in \mathrm{Ouv}(X),\\
&\text{tout recouvrement ouvert fini } (U_i)_{i\in I} \text{ de } U\\
&\text{et tout } (t_i)_{i\in I} \text{ tel que } \forall i \in I : t_i \in F(U_i),\\
&\text{si } \forall i, j \in I : \rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j),\\
&\text{alors } \exists! t \in F(U)\, \forall i \in I : \rho^U_{U_i}(t) = t_i.
\end{aligned} \tag{8}$$

Donc, nous ne nous trompions pas quand, évoquant le processus de perception d'une image ambiguë, nous indiquions qu'il paraissait nécessaire de le distinguer de celui que suscite une image impossible comme le *Tripoutre* des Penrose. Roger Penrose a fort bien expliqué, en effet, comment et pourquoi c'est précisément en recourant à la notion de faisceau qu'on parvient à décrire ce qu'a réussi l'auteur d'une image comme celle-là et ce qu'opère le regard qui l'observe [25]. Et l'explication qu'il propose est somme toute assez simple: devant une telle image, le spectateur ne fait pas autre chose que construire un faisceau. Or, comme le montre la définition qui vient d'être rappelée, cette démarche est foncièrement différente de celle consistant à concilier. Pour construire un faisceau, on commence par définir des objets (sur des ouverts). Puis on impose qu'ils se recollent localement (sur les intersections d'ouverts) afin qu'apparaisse au niveau global (sur l'union des ouverts) un objet du même genre, dont les objets de départ sont des restrictions (sur les ouverts initialement choisis). Tandis que, pour tenter une conciliation, on commence par définir des objets (sur des fermés). Puis on impose qu'ils se recollent au niveau global (sur les unions des fermés) afin qu'apparaisse localement (sur l'intersection des fermés) un objet du même genre, dont les objets de départ sont des médiations (sur les fermés initialement choisis). Et c'est très exactement cette procédure-ci que nous disions le spectateur suivre quand il se trouve face à une image ambiguë comme celle donnant à voir un vase et deux visages. En effet, dans ce cas, le regard ne note aucune impossibilité globale mais seulement une contradiction locale, alors que, devant le dessin des Penrose, il ne relève au contraire aucune contradiction locale mais une impossibilité globale; raison pour laquelle, d'ailleurs, ce type d'image est dite « impossible », et l'autre seulement « ambiguë ». Bref, comme nous le soulignions, les processus mis en oeuvre face à cette image et face au *Tripoutre* sont seulement analogues, et le sens en lequel nous les disions « duaux » est désormais précisé.

7. *Une cohomologie de conciliation*

Compte tenu de cette « dualité » on s'attend à ce que, comme celle de faisceau [26, 23, 33], la notion de conciliation puisse se voir associer une cohomologie naturelle. Et c'est effectivement le cas.

Soit $\{W_j\}_{j\in I}$ un recouvrement fermé de X et G une conciliation sur X, qui associe à tout fermé W_j un anneau $G(W_j) = \langle A, +, \cdot\rangle$, c'est-à-dire ce que l'on pourrait appeler une « conciliation d'anneaux ». On appelle *p-cochaîne à valeurs dans cette conciliation,* l'application qui associe à chaque union de fermés $W_{j_0} \cup W_{j_1} \cup \ldots \cup W_{j_p}$, $j_\alpha \in I$, $j_0 < j_1 < \ldots < j_p$, un élément $t_{j_0,j_1,\ldots,j_p}$ de $G(W_{j_0} \cup W_{j_1} \cup \ldots \cup W_{j_p})$.

Une p-cochaîne est donc un ensemble $\{t_{j_0,j_1,\ldots,j_p}\}_{j_0<j_1<\ldots<j_p}$. L'ensemble des p-cochaînes sera désigné par $C^p(I,G)$. Une 0-cochaîne est un ensemble $\{t_j\}_{j\in I}$, $t_j \in G(W_j)$. Une 1-cochaîne est un ensemble $\{t_{j_0,j_1}\}_{j_0<j_1}$, $t_{j_0,j_1} \in G(W_{j_0} \cup W_{j_1})$. Etc.

On définit alors un opérateur D, appelé *cobord*, tel que

$$D : C^p(I,G) \to C^{p+1}(I,G) : \left\{t_{j_0,j_1,\ldots,j_p}\right\} \mapsto \left\{(Dt)_{j_0,j_1,\ldots,j_p,j_{p+1}}\right\},$$

où

$$(Dt)_{j_0,j_1,\ldots,j_p,j_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup\ldots\cup W_{j_{p+1}}}_{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup\ldots\cup\widehat{W_{j_k}}\cup\ldots\cup W_{j_{p+1}}} t_{j_0,j_1,\ldots,\widehat{j_k},\ldots,j_p,j_{p+1}}.$$

(l'accent circonflexe $\widehat{}$ désignant l'omission du symbole qu'il surmonte). On vérifie que D est bien un cobord au sens usuel du terme, à savoir que $DD = 0$.

Si nous calculons l'effet du cobord sur les 0-cochaînes, nous obtenons:

$$(Dt)_{j_0,j_1} = \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}}_{W_{j_1}} t_{j_1} - \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}}_{W_{j_0}} t_{j_0}$$

et l'annulation de ce cobord correspond précisément à la condition de cohérence (4) que les éléments de $G(W_j)$ doivent satisfaire si l'on veut que G soit une conciliation. De même, on peut évaluer l'action du cobord sur les

1-cochaînes:

$$(Dt)_{j_0,j_1,j_2} = \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_1}\cup W_{j_2}} t_{j_1,j_2} - \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}\cup W_{j_2}} t_{j_0,j_2} + \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}\cup W_{j_1}} t_{j_0,j_1}.$$

Supposons maintenant que la 1-cochaîne soit définie par $t = Ds$. La formule précédente peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned}(Dt)_{j_0,j_1,j_2} &= \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_1}\cup W_{j_2}} \left(\delta^{W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_2}}\ s_{j_2} - \delta^{W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_1}}\ s_{j_1}\right)\\ &- \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}\cup W_{j_2}} \left(\delta^{W_{j_0}\cup W_{j_2}}_{W_{j_2}}\ s_{j_2} - \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}}\ s_{j_0}\right)\\ &+ \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}\cup W_{j_1}} \left(\delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}}_{W_{j_1}}\ s_{j_1} - \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}}_{W_{j_0}}\ s_{j_0}\right).\end{aligned}$$

Distribuant les médiations et appliquant la propriété(2), on obtient:

$$\begin{aligned}(Dt)_{j_0,j_1,j_2} &= \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_2}}\ s_{j_2} - \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_1}} s_{j_1}\\ &- \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_2}}\ s_{j_2} + \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}} s_{j_0}\\ &+ \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_1}}\ s_{j_1} - \delta^{W_{j_0}\cup W_{j_1}\cup W_{j_2}}_{W_{j_0}}\ s_{j_0};\end{aligned}$$

ce qui permet de vérifier que DDs est bien nul.

Comme dans le cas des faisceaux, on peut introduire des groupes de cohomologie d'une conciliation en posant: $H^p(I,G) = Z^p(I,G)/B^p(I,G)$ où $Z^p(I,G)$ est l'ensemble des p-cocycles, c'est-à-dire des p-cochaînes t telles que $Dt = 0$ et où $B^p(I,G)$ est l'ensemble des p-cobords, c'est-à-dire des p-cochaînes b telles qu'il existe une $(p-1)$-cochaîne s telle que $b = Ds$. La définition du groupe de cohomologie $H^p(I,G)$ est motivée par le fait que le p-cocycle t n'est donné qu'à un cobord $b = Ds$ près, car $Dt = 0 = D(t+b) = D(t+Ds)$.[6]

La propriété intéressante de la cohomologie d'une conciliation est qu'elle est toujours triviale à partir d'un certain niveau d'union de fermés; ce qui signifie que globalement la conciliation a toujours une cohomologie triviale. Autrement dit, le caractère non-trivial de la conciliation ne se voit que localement. Et — une fois encore — il s'agit là d'une propriété « duale » de celle

[6] De son côté, Bredon a construit une homologie des cofaisceaux en définissant les p-chaînes sur des intersections de p+1 ouverts [2], mais il n'a pas construit la cohomologie que nous proposons ici.

que l'on rencontre dans le cas des faisceaux où la cohomologie devient triviale localement alors qu'elle est globalement non-triviale et se révèle donc à même d'exprimer des propriétés non-locales comme celles des fonctions twistorielles [25, 33].

Revenant à l'interprétation, donnée au paragraphe précédent, d'une image ambiguë en termes de conciliation, nous constatons ainsi que la cohomologie de conciliation offre une mesure de cette ambiguïté, dont nous avons remarqué qu'elle n'apparaît qu'en raison de détails locaux, situés sur les bords des parties de l'image et susceptibles d'interprétations contradictoires.

8. *Conclusions spéculatives*

On pourrait continuer et envisager, par exemple, de comparer les conciliations. Ce qui nous amènerait à considérer les morphismes de conciliations, et donc la notion de catégorie des conciliations, puis à nous assurer que cette catégorie est bien un topos-complément, c'est-à-dire [21, p. 105] un topos dont l'objet classificateur est une algèbre de Brouwer plutôt qu'une algèbre de Heyting.[7] Mais ce serait nous aventurer bien au-delà de l'objectif que nous nous étions fixé et qui était seulement de décrire mathématiquement le processus grâce auquel on parvient à accorder ce qui paraît incompatible. Nous nous contenterons donc, pour terminer, d'évoquer quelques problématiques dont il n'est pas interdit de penser qu'elles se trouveront éclairées par la prise en considération du concept de conciliation et de la notion mathématique qui nous a paru la traduire adéquatement. Car — si surprenant que cela paraisse — ces problématiques sont nombreuses et de natures très diverses.

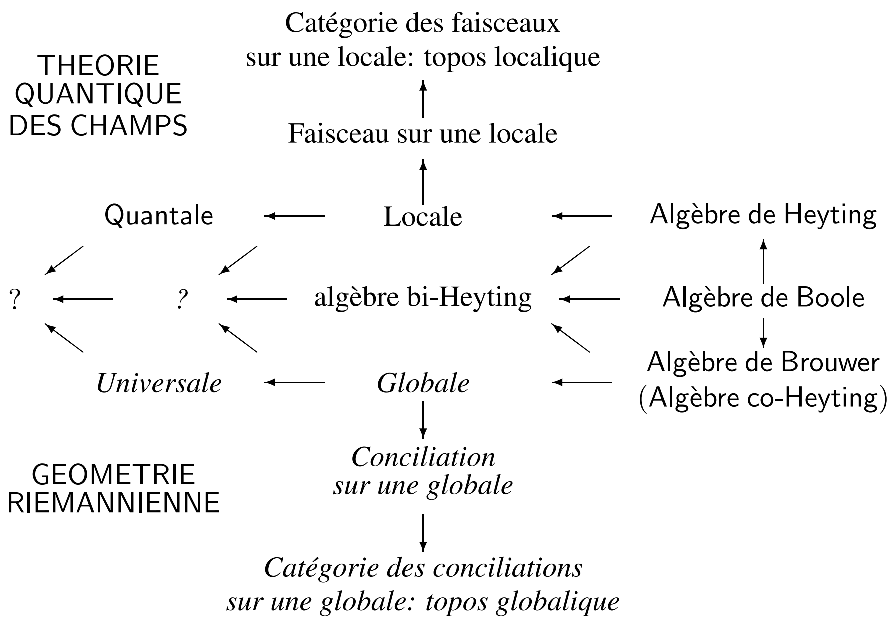
Sur un plan strictement logique, tout d'abord, on ne peut s'empêcher de constater que le concept de conciliation complète de manière particulièrement satisfaisante un tableau (repris ci-dessous) dont beaucoup ont supposé qu'il devait pouvoir être tracé. Si l'on se souvient du rapport qui lie la notion de faisceau à la logique intuitionniste [5, 12, p. ex.], on remarque en effet que les rapports entretenus par les conciliations, les fermés, les algèbres de Brouwer et la logique paraconsistante, sont parfaitement identiques à ceux qu'entretiennent les faisceaux, les ouverts, les algèbres de Heyting et la logique intuitionniste et que, de surcroît, ces deux séries se correspondent terme à terme selon un principe commun de « dualité » dont

[7] Notons que la conciliation que nous donnions comme deuxième exemple de ce type d'objet au quatrième paragraphe, et que nous qualifions alors de « triviale », apparaît comme un candidat naturel au titre d'objet terminal de cette catégorie qui, en dépit de ce nom de topos-complément qui devrait alors lui être donné, ne serait pas à proprement parler un topos.

l’application laisse inchangée une troisième série composée de manière analogue des points, des algèbres bi-Heyting (au nombre desquelles figurent les algèbres de Boole) et de la logique classique.

Faisceau	Ouverts	Algèbre de Heyting	Logique intuitionniste
	Points	Algèbre bi-Heyting	Logique classique
Conciliation	Fermés	Algèbre de Brouwer	Logique paraconsistante

Cette constatation faite, on remarque alors — et de manière tout à fait inattendue — qu’il n’est pas du tout impensable que la notion de conciliation puisse aider à préciser l’image unifiée que la physique contemporaine s’efforce de donner de la nature. Ce tableau en rappelle en effet un autre, tracé par Shahn Majid [17, 18, p. ex., p. 122] sous la forme d’un diagramme « programmatique » dont le grand mérite est d’indiquer une direction qu’imposerait la quête de cadres théoriques satisfaisant à un principe particulier de dualité et que pourraient donc judicieusement emprunter les recherches en théorie quantique de la gravitation. De fait: dans la partie supérieure de ce diagramme (représenté ci-dessous en caractères droits légèrement différents), qu’il dédie aux notions qui se trouvent au coeur de la théorie quantique des champs, Majid place celle d’algèbre de Heyting qui, en vertu de l’abandon du principe du tiers-exclu auquel une telle algèbre est naturellement associée, devrait selon lui servir d’assise à la construction d’une logique quantique et à une axiomatisation de cette théorie physique; tandis qu’il place, dans la partie inférieure qu’il réserve aux notions sur lesquelles repose la relativité générale, celles de la géométrie riemannienne, tout en soulignant que le cadre logique dans lequel il conviendrait de les inscrire pourrait bien être celui des algèbres de Brouwer (qu’il nomme « algèbres co-Heyting ») puisque ces algèbres sont telles qu’il est possible d’y introduire un opérateur ∂ vérifiant la relation $\partial(p \wedge q) = (\partial p \wedge q) \vee (p \wedge \partial q)$, dont Lawvere a remarqué [13] qu’elle pouvait s’interpréter comme une règle de Leibniz où ∂ tient le rôle d’opérateur de dérivation, c’est-à-dire comme l’ingrédient essentiel de la construction des champs de vecteurs en géométrie différentielle. Or — et c’est ce qui est tout à fait remarquable — si Majid donne cette organisation verticale à son diagramme, c’est que, si différentes qu’elles soient, les notions apparaissant dans les parties supérieure et inférieure sont en fait reliées par une opération de dualité particulière qui permet de passer, sur un espace topologique, de l’algèbre de Heyting à l’algèbre de Brouwer en remplaçant les ouverts par les fermés, l’union par l’intersection, l’intersection par l’union, et l’implication $(U \Rightarrow V) = ((\mathring{\complement}_X U) \cup V)$, où $\mathring{\complement}_X U$ désigne l’intérieur de $\complement_X U$, par la pseudo-différence $(Z \overset{\circ}{\Leftarrow} T) = (\overline{\complement_X T} \cap Z)$, c’est-à-dire par une opération qui n’est autre que cette opération de « dualité » dont nous avons nous-mêmes remarqué que l’appliquer permettait de passer des faisceaux aux conciliations, et que nous pourrions donc désormais appeler *dualité à la Majid* ou — plus brièvement — *M-dualité*! Ce que confirme — si besoin en était — le choix fait par Majid de placer l’algèbre de Boole sur la ligne horizontale séparant les parties supérieure et inférieure, au motif qu’elle est *M-autoduale* puisqu’elle est à la fois de Heyting et de Brouwer et que, caractérisée par la relation de de Morgan, elle se trouve de surcroît tout naturellement associée à la logique classique booléenne, qui est elle-même associée à la topologie discrète où les ouverts sont fermés et réciproquement.



Le diagramme de Majid complété et *M-dualisé*

Tant et si bien qu’il est tentant de compléter ce diagramme, et de se demander ensuite s’il ne serait pas possible de construire, grâce à la notion de conciliation, les notions *M-duales* (notées en caractères courants) qui y apparaissent alors. En plus d’y insérer sur la ligne horizontale les algèbres bi-Heyting [1, pp. 249, 300–301], qui sont des algèbres à la fois de Heyting et de Brouwer et dont l'algèbre de Boole n'est qu'un exemple[8], tout semble en effet recommander d'ajouter, dans la partie située au-dessus de cette ligne de *M-autodualité*, la « locale » [16, pp. 472–475], qui est une algèbre de Heyting complète, généralisant la notion d'espace topologique, dont un exemple est le treillis des ouverts d'un tel espace [9]. On retrouverait alors la « quantale » [22, 3], déjà retenue par Majid, qui constitue une généralisation de la locale, adaptée à la description des théories quantiques et dont le treillis des idéaux d'un anneau commutatif à unité fournit un exemple; puis, on ajouterait la catégorie des faisceaux sur une locale, connue sous le nom de « topos localique » [16, pp. 472–527], qui, quant à elle, généralise la notion de topos des faisceaux sur un espace topologique ordinaire. Toutes notions que l'on pourrait ensuite — par principe — *M-dualiser*; ce qui conduirait à encore ajouter (en italiques), mais dans la partie inférieure du diagramme cette fois, le *M-dual* d'une locale, qui serait une algèbre de Brouwer complète, qu'on pourrait appeler une *globale* et dont un exemple naturel serait le treillis des fermés d'un espace topologique, jadis étudié au *Séminaire Dubreil* [15]. De la même façon, on pourrait alors définir le *M-dual* d'une quantale, que l'on nommerait *universale*, celui d'un faisceau sur une locale qui serait une *conciliation sur une globale* ainsi que la catégorie de telles conciliations, pour laquelle on risquerait le nom de *topos globalique* s'il s'agissait bien d'un topos-complément[9]. Démarche au terme de laquelle on s'inviterait tout d'abord à vérifier — comme nous le faisons dans l'appendice A pour la locale et l'universale, et dans l'appendice B pour les notions de germes et de tiges — que ces notions peuvent effectivement être construites et à se demander enfin s'il est possible de construire une catégorie de conciliations sur le *M-dual* d'une quantale, et, dans l'affirmative, s'il est possible de concevoir, conformément à l'idée de Majid, une structure *M-autoduale* qui serait à la fois locale et globale ou, plus généralement encore, quantale et universale.

La prise en considération de la notion de conciliation renforce donc incontestablement la pertinence de la suggestion faite par Majid pour parvenir à unifier la physique. Et cependant, tant l'examen de la définition que nous en avons proposée que l'analyse du concept qu'elle traduit invite à modifier sensiblement son diagramme — ou, du moins, à le lire différemment. Sur base de l'interprétation qu'il donne de l'opérateur ∂, Majid estime en effet que la notion d'algèbre de Brouwer pourrait servir à fonder des notions géométriques; ce qui le conduit à placer ce genre d'algèbre dans la partie

[8] Le treillis des sous-graphes d'un graphe donné, par exemple, est une algèbre bi-Heyting sans être une algèbre de Boole [29, pp. 29–31].

[9] Et ce, même si — rappelons-le — un topos-complément n'est pas *stricto sensu* un topos.

inférieure de son diagramme. Mais il semble au moins aussi certain que la géométrie différentielle ou algébrique, commutative ou non-commutative, se trouve fondamentalement liée à des procédures consistant à définir leurs objets par recollement cohérent d'objets donnés localement et donc à des procédures clairement apparentées à la construction de faisceaux; alors que les algèbres de Brouwer et les globales paraissent en revanche indissociablement liées à une manière de penser qui, à l'inverse, détermine des objets locaux en commençant par imposer des contraintes de cohérence globale et qui — comme nous l'avons vu — s'apparente donc à la construction de conciliations. De sorte que, si nous osions conjecturer davantage, nous dirions que ces deux parties du diagramme semblent plutôt respectivement concerner l'espace et le temps. L'espace pour la partie supérieure, parce que — comme nous l'avons vu — les faisceaux relèvent du global et du continu, et donc, de ce qui ne peut être ni augmenté ni divisé, du constant et de l'invariable; et le temps pour l'inférieure, parce que — comme nous y avons aussi insisté — les conciliations relèvent au contraire du local et du discret, c'est-à-dire de ce dont l'inscription dans l'être est minimale, et donc du changeant et du variable, ou — pour le dire en un mot — de l'instant. Ce qui nous amènerait à conclure qu'il se pourrait bien que la notion de conciliation aide à offrir du temps une compréhension aussi profonde que celle qu'a donnée de l'espace la notion de faisceau, et qu'elle contribue par conséquent, via le diagramme de Majid, à l'élaboration d'une synthèse théorique originale de l'espace et du temps qui permettrait la construction d'une théorie quantique de la gravitation.

Ceci étant, la physique n'est pas le seul domaine où la notion de conciliation pourrait se révéler féconde. Nous avons suffisamment analysé le premier exemple dont nous nous sommes inspirés pour ne pas devoir insister davantage ici sur le fait que cette notion pourrait notamment se révéler utile dans des domaines touchant aux relations humaines. Mais il n'est peut-être pas inintéressant de noter ce que sa considération est susceptible d'y apporter concrètement. Dans le domaine juridique, cette définition technique suggère immédiatement par exemple qu'il pourrait exister, dans certaines situations bien identifiées, des procédures rationnelles permettant une synthèse de droits locaux (nationaux), contradictoires ou ambigus sur l'un ou l'autre point, qui déboucherait sur un droit global (international) effectif et cohérent. Selon cette définition, qui indique comment construire une conciliation formelle, il apparaît en effet que la condition nécessaire à la genèse d'une telle synthèse, d'un tel droit international cohérent, serait tout simplement, non que ces ambiguïtés ou ces contradictions disparaissent, mais seulement qu'elles restent confinées en quelques lieux marginaux. De la même façon, dans cet autre domaine qu'on appelle la « gestion des ressources humaines », cette définition invite, sitôt considérée, à mettre en place des médiations et, contre toute attente, à veiller à ce que soient seulement contenues dans certaines limites, plutôt que systématiquement éliminées, les contradictions qui ne manqueront pas de surgir entre les membres d'un même personnel, sous peine de rendre les antagonismes irrémédiablement inconciliables et l'entreprise définitivement ingérable. Et — comme on le voit aisément — le rôle que pourrait tenir cette définition sera exactement le même pour toutes les situations susceptibles d'être vécues par des communautés de personnes. Autrement dit, pour formelle qu'elle soit — et précisément parce qu'elle l'est —, la définition proposée s'offre en réalité à lire comme un modèle simple permettant de penser des situations complexes de la vie diplomatique, politique ou sociale, dans lesquelles on se trouve contraint d'inventer un vivre-ensemble qui maintienne des positions ou des idées contradictoires dans une cohérence construite par le dialogue. Car le fait étonnant des sociétés et des institutions démocratiques est qu'elles se fondent en effet sur la coexistence de personnes et de groupes sociaux aux avis souvent antagonistes; et le pari de la démocratie et, plus généralement d'un vivre-ensemble humain, consiste précisément à croire qu'une conciliation est possible par-delà les contradictions. Mais il va de soi — et c'est bien là l'intuition portée par la notion mathématique — que ces contradictions ne peuvent miner la cohérence du système tout entier en l'envahissant complètement: elles doivent rester confinées. Le maintien, en un système cohérent, n'est possible que si l'on parvient, à un certain niveau de globalité, à résorber les contradictions, à les concilier, en les traduisant dans un langage adéquat au moyen de médiations appropriées; ce qui — notons-le — exige que ces contradictions existent. La notion de conciliation montre ainsi que, contrairement à ce qu'on prétend trop souvent, l'idéal d'une société démocratique ou d'un fonctionnement institutionnel serein, n'est pas celui d'un horizon où s'annihileraient toutes les contradictions mais celui d'une société où ceux qui partagent des avis divergents parviennent à retrouver, en-deçà de ceux-ci, un terrain commun, une expérience locale partagée, permettant d'enraciner la possibilité d'une coexistence sereine au niveau de la société toute entière ou de l'institution concernée. Si bien qu'il est permis de penser que la topologie de la conciliation et la logique de la contradiction pourraient fort bien servir de laboratoire formel pour penser le vivre ensemble par-delà ce qui divise.

Le deuxième exemple dont nous sommes partis, et qui est aussi celui sur lequel nous sommes le plus souvent revenus, à savoir celui de la perception d'une image ambiguë, indique par ailleurs que la prise en considération de la notion de conciliation pourrait aussi aider à clarifier les mécanismes de la cognition et — beaucoup plus fondamentalement encore — à enrichir l'épistémologie. Car, dès qu'on acte l'existence de conciliations et qu'on prend au sérieux cette définition que nous avons proposée, on ne peut s'empêcher de mesurer à quel point notre épistémologie est étrangement étriquée. La philosophie moderne nous a en effet habitués à penser la connaissance du réel au travers de ses représentations, et de ses représentations seulement. L'idée fondamentale de cette « Philosophie de l'Accès Humain », comme l'a pertinemment baptisée Harman [7, p. 71], est que le réel, tenu pour inconnaissable en soi, ne nous est connu que par la synthèse d'une série de représentations partielles. Autrement dit, nous admettons communément que le réel ne se donne que comme support évanescent du recollement de points de vues localement cohérents. Or cette idée, dont la paternité doit sans doute être attribuée à Locke mais qu'ont soutenue presque tous les philosophes venus après Kant, est — nous l'avons vu — très précisément celle que formalise la théorie des faisceaux, dans laquelle des objets globaux se trouvent construits grâce au recollement cohérent d'objets locaux. De sorte que, même si cette idée est celle qui — comme nous l'avons également souligné — a permis de concevoir des objets mathématiques d'une puissance insoupçonnée et d'énoncer des lois physiques d'une généralité et d'une exactitude impressionnantes[10], l'hypothèse vient à l'esprit qu'elle pourrait ne pas être la seule envisageable et qu'il faudrait peut-être imaginer, en complément de notre épistémologie exclusivement « faisceautique », une épistémologie qui serait, elle, résolument « conciliatoire », c'est-à-dire qui poserait l'existence d'un autre mode d'accès au réel et ouvrirait ainsi à la possibilité de découvrir ce qui, de celui-ci, ne se manifeste qu'au travers de phénomènes localement ambigus ou même contradictoires.

Enfin, on notera — et ce n'est pas la moindre des constatations que l'on peut faire — que le concept de conciliation a un portée ontologique. Dès lors qu'on place ce concept en regard de celui de faisceau, s'adjoint en effet à l'hypothèse de cet enrichissement de l'épistémologie celle d'un éclaircissement du projet de la métaphysique. Car poser l'existence d'un faisceau se fait dans l'espoir de former, tandis que poser celle d'une conciliation se fait avec celui de fonder. Nous l'avons en effet suffisamment répété: lorsqu'on suppose l'existence d'un faisceau, on espère se donner le moyen de reconstruire un objet global à partir d'objets locaux consistants, alors que, quand on suppose l'existence d'une conciliation, on espère au contraire se donner le moyen de trouver au moins un objet local sur lequel repose un objet global consistant. Et ce qu'il importe cette fois de remarquer, ce n'est pas tant que, d'un cas à l'autre, le global et le local soient inversés, mais que les sens de ces deux démarches le soient aussi. Dans un cas, on commence en effet par acter que cet objet est, pour postuler ensuite qu'il doit donc pouvoir être tel

[10] On se souviendra que ces lois sont effectivement formulées dans un repère donné et qu'on s'assure qu'elles correspondent à un élément de réalité en posant une condition de covariance qui exige que leur forme reste inchangée sous un certain type de transformations (isométries, difféomorphismes, ...) et qui assure le recollement cohérent des diverses formulations liées aux repères particuliers.

qu'il est; tandis que, dans l'autre, on commence par postuler que l'objet est, pour acter ensuite qu'il doit donc être tel qu'il puisse être. Ce qui est très différent: d'un côté, l'être de l'objet n'est absolument pas interrogé, tandis qu'il l'est explicitement de l'autre. Aussi étrange que cela puisse paraître, personne peut-être n'a mieux distingué ces deux démarches que Spinoza, qui écrivait au président de la *Royal Society*:

> « Pour ce qui est de savoir absolument en quelle manière les choses se lient les unes aux autres, et s'accordent avec leur tout, je n'ai pas cette science; elle requerrait la connaissance de la Nature toute entière et de toutes ses parties. Je m'applique en conséquence à montrer quelle raison m'oblige à affirmer que cet accord et cette liaison existent » [32].

Ce que nous pourrions en effet traduire par « le métaphysicien que je suis abandonne aux scientifiques la tâche de trouver le faisceau qui permettrait de reconstituer cet objet global qu'est la Nature pour se donner celle de découvrir la conciliation qui en rendrait compte ». Outre que cette reformulation occulte certains éléments de la citation, on relèvera, bien sûr, que Spinoza tenait pour désespéré d'appliquer la première démarche à cet objet qu'est la Nature. Mais ceci n'est pas essentiel. Ce qui l'est, en revanche, c'est de noter qu'il entendait bien appliquer la seconde à ce même objet, c'est-à-dire, non pas à un object seulement suspecté d'être, mais à celui dont il n'y certainement pas lieu de douter qu'il est. Car — et c'est là un point crucial — tout ce qui est doit résulter d'une conciliation. Tout ce qui est se trouve, en effet, doué d'unité. Il n'est rien qui ne soit un tout. Pour le dire autrement, l'unité est une condition nécessaire de tout être, même multiple. Ou, comme l'énonçait cet autre métaphysicien qu'était Leibniz,

> « Ce qui n'est pas véritablement *un* être n'est pas non plus véritablement un *être* » [14].

On peut bien rassembler différents objets, on ne formera pas pour autant un être, mais tout au plus un « être de raison ». Rendre compte de quoi que ce soit qui est exige donc de rendre compte de son unité. Or — nous le savons — c'est justement ce à quoi parvient une conciliation. Songeons une dernière fois aux exemples dont nous sommes partis: une nation qui pouvait cesser d'exister, une image dont on se demandait comment elle pouvait être, le Moi fichtéen menacé de scission. Et l'on se souviendra que chacun de ces objets ne devait effectivement d'être qu'au fait d'être un parce qu'il résultait d'une conciliation. Processus dont la description mathématique que nous avons proposée permet de comprendre comment cela se peut, puisqu'elle montre qu'un tel processus consiste très précisément à fonder le global; et à le fonder, de surcroît, sur le local, c'est-à-dire sur ce qui n'a plus à l'être.

Même s'il convient bien évidemment de toujours se montrer prudent, il ne nous paraît donc pas complètement déplacé de prétendre que l'on pourrait ne serait-ce que faiblement éclairer la région de l'être en considérant sérieusement le concept de conciliation et la notion mathématique que nous avons cru devoir lui associer. Et, d'autant moins, à la vérité, que cela expliquerait les autres utilités que nous leur avons trouvées ou entrevues, puisque toutes concernent forcément l'une ou l'autre chose qui est — qu'il s'agisse de la logique, de la nature, de la connaissance ou de la communauté des humains.

Appendix A: Globales et universales vs *locales et quantales*

Les deux définitions suivantes sont bien connues.

Une *locale* est un treillis complet L vérifiant la propriété suivante:

$$x \wedge \bigvee Y = \bigvee (x \wedge Y),$$

où $x \wedge Y := \{x \wedge y \mid y \in Y \text{ and } Y \subseteq L\}$. Autrement dit, L est un treillis complet « meet infinitely distributive ».

Une *quantale* $\langle Q, \wedge, \vee, \bullet, 0, 1\rangle$ est une structure définie sur un ensemble Q telle que

(a) $\langle Q, \wedge, \vee\rangle$ est un treillis complet avec élément nul 0 et élément universel 1;
(b) $\langle Q, \bullet\rangle$ est un monoïde avec un neutre $1'$ pour l'opération $\bullet$;
(c) l'opération $\bullet$ est distributive par rapport à $\vee$ au sens suivant:

$$\forall a \in Q\, \forall S \subseteq Q : a \bullet \bigvee S = \bigvee \{a \bullet s \mid s \in S\}$$

et
$$\Big(\bigvee S\Big) \bullet a = \bigvee \{s \bullet a \mid s \in S\},$$

où
$$\bigvee S = \{\bigvee_j s_j \mid s_j \in S\}.$$

Le rapport qu'entretiennent ces deux structures est évident. On vérifie en effet immédiatement, d'une part, qu'une locale est une quantale lorsqu'on prend $\forall a, b \in Q : a \bullet b := a \wedge b$ et, d'autre part, qu'une quantale est une locale dès lors que l'opération $\bullet$ est choisie idempotente ($\forall a \in Q : a \bullet a = a$) et que l'élément universel coïncide avec le neutre du monoïde ($1 = 1'$).

Ces définitions rappelées, il est tentant de les « dualiser ».

Aussi nous proposons-nous d’appeler *globale* un treillis complet L vérifiant la propriété suivante:

$$w \vee \bigwedge Z = \bigwedge (w \vee Z),$$

où $w \vee Z := \{w \vee z \mid z \in Z \text{ and } Z \subseteq L\}$. En d’autres termes, une globale est un treillis complet « join infinitely distributive ».

Il est facile de montrer que le treillis des fermés $\mathrm{Fer}(X)$ d’un espace topologique X est une structure de ce type. Définissons en effet $\forall w_1, w_2 \in \mathrm{Fer}(X), w_1 \wedge w_2 := w_1 \cap w_2$. Si, parce que l’union d’un nombre arbitraire de fermés n’est pas nécessairement fermée, on prend la précaution d’utiliser la fermeture de l’union pour définir la seconde opération et donc poser $\forall w_1 \in \mathrm{Fer}(X) : \bigvee_j w_j := \overline{\bigcup_j w_j}$, on voit de suite que ces deux opérations munissent $\mathrm{Fer}(X)$ d’une structure de treillis complet et l’on démontre aisément que ce treillis est bien « join infinitely distributive ». De fait, puisque

$$\forall w \in \mathrm{Fer}(X), z \in Z \subseteq \mathrm{Fer}(X) : w \cup z \supseteq w \cup \bigcap Z,$$

on a

$$\bigwedge (w \vee Z) = \bigcap (w \cup Z) \supseteq w \cup \bigcap Z = w \vee \bigwedge Z,$$

la dernière égalité résultant du fait que $\bigcap Z$ est un fermé et que l’union de deux fermés est un fermé. Il reste donc à démontrer que $w \vee \bigwedge Z \supseteq \bigwedge (w \vee Z)$. Ce qui se fait facilement. En effet, $\forall z \in Z : w \cup z \supseteq \bigcap (w \cup Z)$. Si bien que, posant $u = \bigcap (w \cup Z)$, on obtient: $w \cup z \supseteq u$. Mais on a par ailleurs que

$$\begin{aligned}
&z = (w \cup z) \cap \complement_W (w - z) \supseteq u \cap \complement_X (w - z) = u \cap \complement_X (w \cap \complement_X z) \\
&= u \cap (\complement_X \cup z) \\
&\Rightarrow z \supseteq (u \cap \complement_X w) \cup (u \cap z).
\end{aligned}$$

De sorte que, prenant l'intersection $v = \bigcap Z$ des éléments $z \in Z$, on obtient aussi:

$$\begin{aligned}
&v \supseteq (u \cap v) \cup (u \cap \complement_X w) = [(u \cap v) \cup u] \cap [(u \cap v) \cup \complement_X w] \\
&= u \cap (u \cup \complement_X w) \cap (v \cup \complement_X w) \\
&\Rightarrow v \supseteq u \cap (v \cup \complement_X w) \\
&\Rightarrow v \cup w \supseteq [u \cap (v \cup \complement_X w)] \cup w = (u \cup w) \cap (v \cup \complement_X w \cup w) \\
&= u \cup w \supseteq u \\
&\Leftrightarrow w \cup v \supseteq u \Leftrightarrow w \cup \bigcap Z \supseteq \bigcap (w \cup Z).
\end{aligned}$$

Puisqu'il y a donc sens à définir ainsi la « duale » d'une locale, rien ne paraît s'opposer à ce qu'on définisse de même la « duale » d'une quantale. Nous proposons dès lors la définition suivante.

$\langle P, \wedge, \vee, 0, 1, \circ \rangle$ est une *universale* si l'ensemble P est tel que:

(a) $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1, \circ \rangle$ est un treillis complet avec élément nul 0 et élément universel 1;
(b) $\langle P, \circ \rangle$ est un monoïde avec un élément neutre $0'$ pour l'opération $\circ$;
(c) $\forall b \in P, \forall T \subseteq P : b \circ \bigwedge T = \bigwedge (b \circ T) = \bigwedge \{b \circ t | t \in T\}; (\bigwedge T) \circ b = \bigwedge (T \circ b)$.

On peut montrer qu'une telle structure possède les deux propriétés suivantes.

Tout d'abord, l'opération $\circ$ est telle que $\forall a, b, c \in P : a \leqslant b \Rightarrow a \circ c \leqslant b \circ c$, où la relation d'ordre est celle engendrée par le treillis: $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b; b = a \vee b$. En effet,

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a = a \wedge b \Rightarrow a \circ c = (a \wedge b) \circ c = (a \circ c) \wedge (b \circ c) \Leftrightarrow a \circ c \leqslant b \circ c.$$

Ensuite, si l'élément nul est identifié à l'élément neutre du monoïde ($0 = 0'$), on obtient: $\forall a, b \in P : a \circ b \geqslant a \vee b$. De fait,

$$\begin{aligned}
&a \geqslant 0 = 0' \Rightarrow a \circ b \geqslant 0' \circ b = b \Leftrightarrow a \circ b \geqslant b \Leftrightarrow b = (a \circ b) \wedge b \\
&b \geqslant 0 = 0' \Rightarrow a \circ b \geqslant a \circ 0' = a \Leftrightarrow a \circ b \geqslant a \Leftrightarrow a = (a \circ b) \wedge a.
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
&a \vee b = [(a \circ b) \wedge a] \vee [(a \circ b) \wedge b] \\
&\Leftrightarrow a \vee b = (a \circ b) \wedge (a \vee b) \\
&\Leftrightarrow a \vee b \leqslant a \circ b.
\end{aligned}$$

Quant au lien qui unit globales et universales, on peut le caractériser comme suit.

D'une part, si $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1, \circ \rangle$ est une universale, où l'opération $\circ$ du monoïde est idempotente ($\forall a \in Q : a \circ a = a$) et où l'élément nul du treillis est identifié au neutre du monoïde ($0 = 0'$), et si $\circ$ est en outre identifiée à $\vee$, alors $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ est une globale puisque, sous ces hypothèses, on a

$$\forall a \in P, \forall T \subseteq P : a \circ \bigwedge T = \bigwedge (a \circ T) \Leftrightarrow a \vee \bigwedge T = \bigwedge (a \vee T).$$

D'autre part, si $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ est une globale et si l'opération $\circ$ est définie identique à $\vee$, on obtient: $\forall a \in P : a \circ a = a \vee a = a$. Mais, outre cette propriété d'idempotence, on vérifie aussi que

$$\forall a \in P : a \vee 0 = a = a \circ 0' = a \vee 0' \Rightarrow 0 = 0'$$

et, surtout, que

$$a \circ \bigwedge_j b_j = a \vee \bigwedge_j b_j = \bigwedge_j (a \vee b_j) = \bigwedge_j (a \circ b_j).$$

Ce qui montre que $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1, \circ \rangle$ est alors une universale.

Appendix B: Accords et traités vs *germes et tiges*

D'autres notions bien connues pourraient également se voir ainsi « dualisées ».

Comme on le sait, si F est un préfaisceau sur un espace topologique X, on peut définir en chaque point x de X une union disjointe $\bigcup_{U \ni x} F(U)$ et, ceci fait, une relation d'équivalence $\approx_\rho$ telle que $\forall U_1, U_2 \in \mathrm{Ouv}(X), t_i \in U_i$,

$$t_1 \approx_\rho t_2 \Leftrightarrow \exists U \subseteq U_1 \cap U_2 : \rho_U^{U_1}(t) = \rho_U^{U_2}(t).$$

On peut, en d'autres termes, choisir d'identifier deux « sections » du faisceau dès lors qu'elles possèdent la même restriction sur un certain ouvert. Ceci permet alors de définir la *tige* F_x du faisceau F en un point x de X comme

$$F_x := \bigcup_{U_j \ni x} F(U_j)/{\approx_\rho} = \varinjlim_{U_j \ni x} F(U_j),$$

où la limite est la « limite inductive » induite par les restrictions:

$$F(U_0) \xrightarrow{\rho^{U_0}_{U_1}} F(U_1) \xrightarrow{\rho^{U_1}_{U_2}} F(U_2) \xrightarrow{\rho^{U_2}_{U_3}} \cdots \varinjlim_{U_j \ni x} F(U_j)$$
$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$$

On pourrait donc également songer à introduire la notion de *traité* en x pour une préconciliation G sur X:

$$G_x := \bigcup_{W_j \ni x} G(W_j)/{\approx_\rho} = \varinjlim_{W_j \ni x} G(W_j),$$

où la limite serait la « limite inductive » induite par les médiations:

$$G(W_0) \xrightarrow{\delta^{U_0}_{U_1}} G(W_1) \xrightarrow{\delta^{U_1}_{U_2}} G(W_2) \xrightarrow{\delta^{U_2}_{U_3}} \cdots \varinjlim_{W_j \ni x} G(W_j)$$
$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots$$

La relation d'équivalence $\approx_\delta$ serait ici définie de la manière suivante: $\forall W_1$, $W_2 \in \mathrm{Fer}(X), t_i \in W_i$,

$$t_1 \approx_\delta t_2 \;\Leftrightarrow\; \exists W \supseteq W_1 \cup W_2 : \delta^W_{W_1}(t_1) = \delta^W_{W_2}(t_2).$$

Les éléments d'un traité G_x en x, que l'on pourrait appeler des *accords* en x, seraient alors les classes d'équivalence correspondantes, c'est-à-dire les analogues des *germes* pour les faisceaux.

Ceci aurait d'autant plus de sens que l'on peut montrer comment construire une conciliation à partir d'une préconciliation donnée, une fois ces définitions adoptées.

Une préconciliation G étant donnée, on peut en effet considérer l'ensemble G^a des applications suivantes définies sur chaque fermé:

$$a_W : W \to \bigcup_{x \in X} G_x : x \mapsto a_W(x)$$

telle que $a_W(x) \in G_x$.

Il s'agit donc des applications faisant correspondre à tout point d'un fermé un accord $a_W(x)$ en ce point, c'est-à-dire une classe d'équivalence d'un traité G_x, ou encore un élément $[(s, W)]$, avec $s \in G(W)$, $x \in W$ et tel que $[(s, W)] = [(t, V)] \Leftrightarrow s \approx_\delta t$, si $x \in V$. De sorte que l'on peut alors définir, de manière fort naturelle, les médiations de G^a grâce à la formule suivante:

$$^{G^a}\delta^{W}_{W_1}(a_W(x)) = {}^{G^a}\delta^{W_2}_{W_1}\big([(s, W_1)]\big) := \big[\big({}^{G}\delta^{W_2}_{W_1}(s), W_2\big)\big]$$

avec $W_1 \subseteq W_2$. Et l'on montre alors que G^a est une conciliation.

On notera que ce processus d'engendrement d'une conciliation à partir d'une préconciliation pourrait servir de base à une définition du quotient de deux conciliations G et H. En effet, se donnant $W \to G(W)/H(W)$ chaque fois qu'un tel quotient a un sens, on obtiendrait ainsi une préconciliation Q, ce qui permettrait de définir G/H comme la conciliation associée Q^a.

Dominique Lambert (d.lambert@fundp.ac.be)
Bertrand Hespel (bertrand.hespel@fundp.ac.be)
Département "Sciences-Philosophies-Sociétés"
FUNDP, Faculté des sciences
61, rue de Bruxelles – B-5000 Namur (Belgium)

RÉFÉRENCES

[1] S. Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, 2nd edition, 2010.
[2] G.E. Bredon. Cosheaves and homology. *Pacific J. Math.* Vol. 25, pp. 1–32, 1968.
[3] M. Coniglio and F. Miraglia. Non-Commutative Topology and Quantales. *Studia Logica*, Vol. 65, pp. 223–236, 2000.
[4] J.G. Fichte. Grundlage der gesammenten Wissenschaftslehre, 1794. *Sammtliche Werken*, tome 1. Berlin, 1843.
[5] R. Goldblatt. *Topoi. The categorical analysis of logic*. Elsevier, 1984.
[6] N. Goodman. Logic of Contradiction. *Zeitschr. fur Math. Logik und Grundlagen der Math.*, Vol. 27, pp. 119–126, 1981.
[7] G. Harman. *L'objet quadruple. Une métaphysique des choses après Heidegger*. Paris, PUF, 2010.
[8] W.R. Hendee and P.N.T. Wells. *The Perception of Visual Information*. Berlin, Springer, 1997.
[9] C. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific, New Jersey, 2nd edition, 2005.
[10] W. James and C. Mortensen. *Categories, Sheaves and Paraconsistent Logic*. Unpublished manuscript.
[11] D. Lambert and B. Hespel. From contradiction to conciliation: a way to 'dualize' sheaves. http://arxiv.org/abs/1106.6194v2
[12] R. Lavendhomme. *Lieux du sujet*. Paris, éditions du Seuil, 2001.

[13] F. Lawvere. Intrinsic Co-Heyting Boundaries and the Leibniz Rule in Certain Toposes. In *Category Theory*, Volume 1488 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*. Proceeding Como 1990, pp. 279–281, Springer-Verlag, 1991.

[14] G.W. Leibniz. *Discours de métaphysique et Correspondance avec Arnauld*. (introduction, texte et commentaire par G. Le Roy). Paris, Vrin, 3e édition, 1970.

[15] L. Lesieur. Les treillis en topologie I–II. *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, Vol. 7, exp. n ° 3, pp. 1–10 and exp. n ° 4, pp. 1–11, 1953–1954. Disponible sur www.numdam.org.

[16] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A first Introduction to Topos Theory*. Springer, Berlin, 1992.

[17] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press, 1995.

[18] S. Majid. Quantum Spacetime and Physical Reality. In S. Majid, editor, *On Space and Time*, pp. 56–140. Cambridge University Press, 2008.

[19] J. Maréchal. Le système idéaliste chez Kant et les postkantiens. *Le point de départ de la métaphysique*, cahier IV. Bruxelles, L'édition universelle, Paris, Desclée de Brouwer, 1947.

[20] J. McKinsey and A. Tarski. On Closed Elements in Closure Algebra. *Annals of Mathematics*, Vol. 47, pp. 122–162, 1946.

[21] C. Mortensen. *Inconsistent Mathematics*. Kluwer Mathematics and Its Applications Series. Dordrecht, Kluwer, 1995.

[22] C. Mulvey. "&". *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II*, Vol. 12, pp. 99–104, 1986.

[23] A. Neeman. *Algebraic and Analytic Geometry*. Cambridge University Press, 2007.

[24] L.S. Penrose and R. Penrose. Impossible Objects: A Special Type of Virtual Illusion. *British Journal of Psychology*, Vol. 49, pp. 31–133, 1958.

[25] R. Penrose. *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*. New York, Alfred A. Knopf, 2005; traduction française *A la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique*. Paris, Odile Jacob, 2007.

[26] D. Perrin. *Géométrie analytique*. Paris, InterEditions/CNRS Editions, 1995.

[27] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. Amsterdam/Warszawa, North-Holland/PWN-Polish Scientific Publishers, 1974.

[28] A. Rey (dir.). *Le Robert. Dictionnaire historique de la langue française*. Paris, Dictionnaires LE ROBERT, 1992.

[29] G. Reyes and H. Zolfaghari. Bi-Heyting Algebras, Toposes and Modalities. *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 25, pp. 25–43, 1996.

[30] C. Severi. L'espace chimérique. Perception et projection dans les actes de regard. *Gradhiva*, Vol. 13, *Pièges à voir, pièges à penser. Présences cachées dans l'image*, pp. 8–47, 2011.
[31] G. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1963.
[32] B. de Spinoza. Lettre à Henri Oldenburg du 20 novembre 1665. *Œuvres* (traduction et notes de Ch. Appuhn), Vol. 4, *Lettre XXXII*, pp. 85–86, 1966.
[33] R. Ward and R. Wells Jr. *Twistor Geometry and Field Theory*. Cambridge University Press, 1990.