Logique & Analyse **204** (2008), 317–329

ÜBER DAS KRIPKE-SCHEMA UND ABZÄHLBARE TEILMENGEN

PETER SCHUSTER* UND JÚLIA ZAPPE

Zusammenfassung
Kripke's schema is a fragment of the law of excluded middle that captures the essence of Brouwer's creating subject. The two versions in which Kripke's schema usually occurs differ from each other by an instance of countable choice. We introduce Kripke's schema to constructive reverse mathematics by using either version as a point of reference for some classifications. The weaker version (respectively, the stronger version) of Kripke's schema is equivalent to statements of the following kind: every subset of a finitely enumerable set (respectively, of a countable set) is countable; the intersection of two finitely enumerable sets (respectively, of two countable sets) is countable; etc. To see this requires to consider a variant of the notion of countability that includes the empty set, and to work in a setting as innocent as constructive Zermelo–Fraenkel set theory, which none of the principles under scrutiny is part of.

Im Geiste der unter anderem in [5, 16, 17, 18, 19, 25] betriebenen konstruktiven oder intuitionistischen Spielart der sogenannten "reverse mathematics" [22] werden wir einige Varianten der Vererblichkeit von Abzählbarkeit auf Teilmengen als Äquivalente des Kripke-Schemas klassifizieren. Unsere Betrachtungen werden ausschließlich im Rahmen eines zu einem ähnlichen Zweck bereits in [21] verwendeten Fragments der in [1] formulierten "constructive Zermelo-Fraenkel set theory" (CZF) [2] angestellt werden.

Das einzige nichtlogische Zeichen der Sprache von CZF, welche auf der intuitionistischen Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit beruht, ist das Symbol $\in$ für die Elementrelation. Neben dem Extensionalitäts-, dem Paarmengen-, dem Vereinigungsmengen- und dem Ersetzungsaxiom setzen wir an Axiomen von CZF noch das Axiomenschema der Δ_0-Aussonderung voraus, sowie das starke Unendlichkeitsaxiom, welches die Existenz der kleinsten induktiven Menge $\mathbb{N}$ sicherstellt. Um Aussagen allgemeiner Art durch

*Korrespondierender Autor.

Induktion zeigen zu können, fordern wir ferner das Induktionsprinzip für beliebige Formeln, das auch aus dem zu CZF gehörenden Axiom der Mengeninduktion folgt [2]. Wir schreiben $S \cong T$, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen S und T gibt.

Zur Δ_0-Aussonderung sind nur die Δ_0-*Formeln* zugelassen, in welchen jede gebundene Variable x lediglich als $\exists x \in u$ oder $\forall x \in v$ vorkommt, wobei u und v Mengen sind. Ist also w eine Menge und $\varphi(x)$ eine Δ_0-Formel, so ist $\{x \in w : \varphi(x)\}$ eine Menge. Beispiele von Δ_0-Formeln sind $u \in v$, $u \subseteq v$ und $u = v$.

Lemma 1: *Zu jeder Δ_0-Formel φ gibt es bewohnte Mengen a_1 und a_2 derart, daß φ zu $a_1 = a_2$ äquivalent ist; insbesondere ist φ dazu äquivalent, daß $\{a_1\} \cap \{a_2\}$ bewohnt ist.*

Beweis. Es seien x, y Variablen, die in φ nicht frei vorkommen. Auf der Menge $\{1, 2\}$ definiert $x = y \vee \varphi$ eine Äquivalenzrelation, und die Äquivalenzklassen a_1 und a_2 von 1 bzw. von 2 haben die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Wie üblich identifizieren wir jedes $n \in \mathbb{N}$ mit der Teilmenge $\{0, \ldots, n-1\}$ von $\mathbb{N}$; speziell: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$ und $2 = \{0, 1\}$. Die Teilmengen von 1 bilden die Klasse Ω der intuitionistischen Wahrheitswerte, wofür $2 \subseteq \Omega$ gilt. Jeder Δ_0-Formel φ kann man ein $T \in \Omega$ zuordnen, sodaß φ zu $T = 1$, d.h. zu $0 \in T$ äquivalent ist; dazu wähle man eine in φ nicht frei vorkommende Variable x und setze $T = \{x \in 1 : \varphi\}$. Da diese Definition nicht von der Wahl von x abhängt, dürfen wir auch kurz $T = \{0 : \varphi\}$ schreiben.

Eine Menge T heißt *endlich aufzählbar*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung von n auf T gibt, d.h. wenn T sich als $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ schreiben läßt; dann ist T entweder bewohnt oder leer je nachdem, ob $n \geq 1$ oder $n = 0$ ist. Die endlich aufzählbaren Mengen sind also genau die endlichen Vereinigungen von einelementigen Mengen.

Gelegentlich werden wir über das *tertium non datur* für Δ_0-Formeln sprechen:

Δ_0-TND *Für jede Δ_0-Formel gilt $\varphi \vee \neg\varphi$.*

Bekanntlich ist Δ_0-TND zu $\Omega = 2$ äquivalent, d.h. zu 4a in Bemerkung 2.

Bemerkung 2: *Jede der folgenden Aussagen ist äquivalent zu* Δ_0-TND*:*

(1) (a) *Jede Teilmenge einer endlich aufzählbaren Menge ist endlich aufzählbar.*

(b) *Der Durchschnitt zweier endlich aufzählbarer Mengen ist endlich aufzählbar.*

(2) (a) *Jede Teilmenge einer endlich aufzählbaren Menge ist bewohnt oder leer.*

(b) *Der Durchschnitt zweier endlich aufzählbarer Mengen ist bewohnt oder leer.*

(3) (a) *Jede Teilmenge einer einelementigen Menge ist endlich aufzählbar.*

(b) *Der Durchschnitt zweier einelementiger Mengen ist endlich aufzählbar.*

(4) (a) *Jede Teilmenge einer einelementigen Menge ist bewohnt oder leer.*

(b) *Der Durchschnitt zweier einelementiger Mengen ist bewohnt oder leer.*

Beweis. Die folgenden Implikationen sind offensichtlich:

$$\mathrm{Xa} \Longrightarrow \mathrm{Xb} \quad (\mathrm{X} \in \{1,2,3,4\}) \ , \quad \begin{array}{ccc} 1\mathrm{y} & \Longrightarrow & 2\mathrm{y} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 3\mathrm{y} & \Longrightarrow & 4\mathrm{y} \end{array} \quad (\mathrm{y} \in \{\mathrm{a,b}\}) \ .$$

Mit Lemma 1 folgt Δ_0-TND sofort aus 4b. Es genügt also, von Δ_0-TND auf 1a zu schließen. Dazu sei T eine Teilmenge der endlich aufzählbaren Menge $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Gemäß Δ_0-TND ist $x_i \in T$ entscheidbar für jedes $i < n$. Indem man diejenigen x_i überspringt, für welche $x_i \notin T$ ist, kann man T als $\left\{x_{k(0)}, \ldots, x_{k(m-1)}\right\}$ mit $0 \leq m \leq n$ und $k(0) < \ldots < k(m-1)$ schreiben. □

Eine *abtrennbare* Teilmenge T einer Menge S ist eine solche, für welche die Eigenschaft $x \in T$ entscheidbar ist für jedes Element x von S, d.h. für welche gilt

$$\forall x \in S \ (x \in T \vee x \notin T) \ .$$

In der Situation $R \subseteq T \subseteq S$ gilt: Ist R abtrennbar von T und T abtrennbar von S, so ist R abtrennbar von S; ist R abtrennbar von S, so ist R abtrennbar von T. Alle $n \in \mathbb{N}$ sind abtrennbare Teilmengen von $\mathbb{N}$. Urbilder abtrennbarer Teilmengen sind abtrennbare Teilmengen. Ist jede einelementige Teilmenge abtrennbar von S, d.h. gilt

$$\forall x, y \in S \ (x = y \vee x \neq y) \ ,$$

so nennt man S eine *diskrete* Menge. Beispielsweise ist $\mathbb{N}$ diskret, und natürlich ist jede Teilmenge einer diskreten Menge wiederum diskret.

Nach [6, 7] heißt eine Menge T *abzählbar* (dort: “countable”), wenn es eine surjektive Abbildung von ganz $\mathbb{N}$ auf T gibt. Jede abzählbare Menge ist bewohnt, weshalb die leere Menge nicht abzählbar ist. Wir nennen eine Menge T *schwach abzählbar*, wenn es eine abtrennbare Teilmenge D von $\mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $f : D \to T$ gibt. Die abtrennbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$ und die endlich aufzählbaren Mengen sind schwach abzählbar; insbesondere ist die leere Menge schwach abzählbar.

Der von uns “schwach abzählbar” genannte Begriff wurde (wiederum als “countable”) in [8, 9, 20] eingeführt, um die leere Menge einzubeziehen. Genau dann ist eine Menge abzählbar, wenn sie bewohnt und schwach abzählbar ist. Betrachtet man also nur bewohnte Mengen, so fallen die Begriffe “abzählbar” und “schwach abzählbar” zusammen.

Lemma 3:

(1) *Die Vereinigung zweier schwach abzählbarer Mengen ist schwach abzählbar.*
(2) *Der Durchschnitt zweier schwach abzählbarer Teilmengen einer diskreten Menge ist schwach abzählbar.*

Beweis. Es seien T_1 und T_2 schwach abzählbare Teilmengen einer Menge S (notfalls von $S = T_1 \cup T_2$), d.h. zu jedem $i \in \{1, 2\}$ gebe es eine abtrennbare Teilmenge D_i von $\mathbb{N}$ und eine Abbildung $f_i : D_i \to S$ mit $f_i [D_i] = T_i$.

1. Mit

$$F = (D_1 \times \{1\}) \cup (D_2 \times \{2\})$$

und

$$h : F \to S\,, \quad (n, i) \mapsto f_i (n)$$

gilt $h [F] = T_1 \cup T_2$, und F ist eine abtrennbare Teilmenge von $\mathbb{N} \times \{1, 2\} \cong \mathbb{N}$.

2. Mit

$$E = \{(n_1, n_2) \in D_1 \times D_2 : f_1 (n_1) = f_2 (n_2)\}$$

und

$$g : E \to S\,, \quad (n_1, n_2) \mapsto f_1 (n_1) = f_2 (n_2)$$

gilt $g\,[E] = T_1 \cap T_2$. Ist S diskret, so ist E eine abtrennbare Teilmenge von $D_1 \times D_2$, also auch von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. $\square$

Der Kenner wird bemerkt haben, daß im vorangegangenen Beweis sowohl das in der Kategorie der Mengen gebildete Faserprodukt E von D_1 und D_2 über S als auch deren Fasersumme F (hier: die disjunkte Vereinigung) zum Einsatz gekommen sind.

Die Aussage von Lemma 3.1 für Teilmengen von $\mathbb{N}$ wurde in Problem 16 von [8, Chapter 1] beobachtet. In Exercise 18 von [9, Chapter 1] wird diese Aussage für beliebige Mengen behauptet, ohne die Existenz einer diskreten Obermenge vorauszusetzen. Wie wir noch zeigen werden (Satz 7), braucht man dafür jedoch eine Form des Kripke-Schemas.

Es sei S eine Menge und

$$\pi_1 : S \times \mathbb{N} \to S\,, \quad (x, n) \mapsto x$$

die Projektion auf den ersten Faktor. Eine Teilmenge T einer Menge S heißt *einfach existentiell* [8], wenn es eine abtrennbare Teilmenge E von $S \times \mathbb{N}$ gibt mit $T = \pi_1\,[E]$, d.h. mit

$$x \in T \iff \exists n \in \mathbb{N}\ ((x, n) \in E)$$

für alle $x \in S$. Jede abtrennbare Teilmenge von S ist einfach existentiell.

Bekanntlich heißt $n \geq 1$ eine *vollkommene* Zahl, wenn sie die Summe ihrer Teiler $< n$ ist; z.B. sind $6 = 1 + 2 + 3$ und $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ vollkommen. Bisher kennt man nur gerade vollkommene Zahlen, ohne jedoch die Existenz einer ungeraden perfekten Zahl ausschließen zu können. Während die ungeraden vollkommenen Zahlen eine abtrennbare Teilmenge D von $\mathbb{N}$ bilden, kann die Teilmenge

$$T = \{m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}\ (n \geq m \wedge n \in D)\ \}$$

von $\mathbb{N}$ solange nicht als abtrennbar angesehen werden, bis entschieden ist, ob es eine ungerade vollkommene Zahl gibt, d.h. ob $1 \in T$ ist.

Lemma 4: *Es sei T eine Teilmenge einer Menge S.*

(1) *Ist S diskret und T schwach abzählbar, so ist T einfach existentiell.*
(2) *Gibt es eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to S \times \mathbb{N}$ und ist T einfach existentiell, so ist T schwach abzählbar.*

Beweis. 1. Es sei T schwach abzählbar, sowie D und f wie in der Definition davon. Für

$$E = \{(x, n) \in S \times \mathbb{N} : n \in D \wedge f(n) = x\}$$

gilt $\pi_1[E] = T$. Ist S diskret, so ist E eine abtrennbare Teilmenge von $S \times \mathbb{N}$ und damit T einfach existentiell.

2. Es sei $g : \mathbb{N} \to S \times \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Ist T einfach existentiell und E wie in der Definition davon, so ist $D = g^{-1}[E]$ eine abtrennbare Teilmenge von $\mathbb{N}$. Für die Abbildung

$$f : D \underset{g}{\to} E \underset{\pi_1}{\to} T$$

gilt $T = f[D]$, weshalb T schwach abzählbar ist. □

Infolge $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ ergibt sich:

Corollar 5: *Eine Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *ist genau dann einfach existentiell, wenn sie schwach abzählbar ist.*

Die Aussage von Corollar 5, welche als Exercise 9 in [20, I.2] steht, kennt man natürlich von der Äquivalenz der entsprechenden Charakterisierungen einer rekursiv aufzählbaren Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Nun betrachten wir zwei Formen des *Kripke-Schemas*:

Δ_0–KS *Zu jeder* Δ_0*-Formel* φ *gibt es eine abtrennbare Teilmenge* F *von* $\mathbb{N}$ *mit*

$$\varphi \iff \exists n \in \mathbb{N}\ (n \in F)\ .$$

Δ_0–KS_ω *Zu jeder* Δ_0*-Formel* $\varphi(m)$ *gibt es eine abtrennbare Teilmenge* E *von* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *mit*

$$\varphi(m) \iff \exists n \in \mathbb{N}\ (m, n) \in E$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Während Δ_0–KS der weitaus gängigeren Formulierung des Kripke-Schemas folgt [3, 4, 8, 14, 15, 20, 23], findet man eine Δ_0–KS_ω entsprechende Form in [24, 4.9.3–5]; ein historischer Abriß steht in [24, 4.10.6]. Wie in [24, 4.9.3] bzw. in [15, 6.3] und in [23, § 16] für das Gegenstück von Δ_0–KS_ω

bzw. von Δ_0–KS ausgeführt, folgt das Kripke-Schema aus der Brouwerschen Theorie des Kreativsubjekts.[1]

Wir weichen in zweierlei Hinsicht von der soeben angegebenen Literatur ab. Erstens wird das Kripke-Schema a.a.O. mit Binärfolgen formuliert, d.h. mit den charakteristischen Funktionen der von uns verwendeten abtrennbaren Teilmengen. Dies ist insofern unwesentlich, als einerseits jede Funktion $S \to \{0,1\}$ eine abtrennbare Teilmenge der Menge S definiert, sich andererseits vermöge des in CZF — wie in jeder genügend reichhaltigen Mengenlehre — vorhandenen Prinzips der eindeutigen Auswahl zu jeder abtrennbaren Teilmenge von S deren charakteristische Funktion definieren läßt.

Zweitens formulieren wir die beiden Varianten des Kripke-Schemas nur für Δ_0-Formeln, um in CZF Aussonderung nach diesen Formeln betreiben und so die im folgenden angegebenen Klassifizierungen (Sätze 7 und 9) erhalten zu können. Alternativ könnte man dort Δ_0–KS und Δ_0–KS$_\omega$ durch die folgenden Charakterisierungen ersetzen:

Lemma 6: Δ_0–KS *bzw.* Δ_0–KS$_\omega$ *ist äquivalent dazu, daß jede Teilmenge von* 1 *bzw. von* $\mathbb{N}$ *einfach existentiell ist.*

Beweis. Im Falle von Δ_0–KS beachte man, daß eine Teilmenge T von 1 vermöge $1 \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ genau dann einfach existentiell ist, wenn es eine abtrennbare Teilmenge F von $\mathbb{N}$ gibt mit

$$0 \in T \iff \exists n \in \mathbb{N}\ (n \in F)\ .$$

Der Fall von Δ_0–KS$_\omega$ ergibt sich aus dessen Definition. □

Von nun an verstehen wir Δ_0–KS und Δ_0–KS$_\omega$ oft als wie in Lemma 6 charakterisiert.

Offensichtlich folgt Δ_0–KS aus Δ_0–KS$_\omega$. Was braucht man für die umgekehrte Implikation? Wir schreiben $\alpha_\varphi(m,F)$ für die in Δ_0–KS$_\omega$ auftretenden Äquivalenzformeln, d.h.

$$\alpha_\varphi(m,F): \quad \varphi(m) \iff \exists n \in \mathbb{N}\ (n \in F)\ ,$$

worin $\varphi(m)$ eine Δ_0-Formel und F eine abtrennbare Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Das Auswahlprinzip für Formeln dieses Typs lautet wie folgt:

[1] Brouwer hat diese Theorie schon ab 1927 entwickelt [10, 13]. Ein dem Kripke-Schema entsprechendes Prinzip hat Brouwer bereits 1953 formuliert [11]; siehe v.a. [12], S. 525, vorletzter Absatz, erster Satz. (Letztere Beobachtung wird Myhill zugeschrieben.)

$(*)$ *Ist $\varphi(m)$ eine Δ_0-Formel und gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine abtrennbare Teilmenge F von $\mathbb{N}$ mit $\alpha_\varphi(m, F)$, so gibt es eine Folge $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ abtrennbarer Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit $\alpha_\varphi(m, F_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Nun ist Δ_0–KS$_\omega$ äquivalent zur Konjunktion von Δ_0–KS und $(*)$; unter der Annahme von $(*)$ sind Δ_0–KS und Δ_0–KS$_\omega$ also äquivalent. Aus Δ_0–KS$_\omega$ folgt nämlich nicht nur Δ_0–KS wie oben erläutert, sondern auch die Konklusion von $(*)$. Dazu beachte man, daß die abtrennbaren Teilmengen E von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ genau den Folgen $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ abtrennbarer Teilmengen von $\mathbb{N}$ entsprechen, wobei

$$(m, n) \in E \iff n \in F_m$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: Zu gegebenem E definiere man $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch

$$F_m = \{n \in \mathbb{N} : (m, n) \in E\}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$; zu gegebenem $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definiere man E durch

$$E = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \in F_m\} \; .$$

Umgekehrt läßt sich damit auch Δ_0–KS$_\omega$ aus der Konjunktion von Δ_0–KS und $(*)$ herleiten.

Mit Δ_0-TND ist jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ abtrennbar, also sind Δ_0–KS$_\omega$ und Δ_0–KS klassische Tautologien [24, S. 236]. Insbesondere ist die Konklusion des abzählbaren Auswahlprinzips $(*)$ ein Satz von ZF.

Satz 7: *Jede der folgenden Aussagen ist äquivalent zu* Δ_0–KS*:*

(1) (a) *Jede Teilmenge einer einelementigen Menge ist schwach abzählbar.*
  (b) *Der Durchschnitt zweier einelementiger Mengen ist schwach abzählbar.*

(2) (a) *Jede Teilmenge einer endlich aufzählbaren Menge ist schwach abzählbar.*
  (b) *Der Durchschnitt zweier endlich aufzählbarer Mengen ist schwach abzählbar.*

(3) (a) *Jede bewohnte Teilmenge einer endlich aufzählbaren Menge ist abzählbar.*
  (b) *Ist der Durchschnitt zweier endlich aufzählbarer Mengen bewohnt, so ist er abzählbar.*

Beweis. Mit Corollar 5 folgt 1a aus Δ_0–KS. Einige Implikationen sind offensichtlich:

$$\text{Xa} \Longrightarrow \text{Xb} \quad (\text{X} \in \{1,2,3\}) \ ,$$

$$1\text{y} \quad \Longleftarrow \quad 2\text{y} \quad \Longrightarrow \quad 3\text{y} \qquad (\text{y} \in \{\text{a,b}\}) \ .$$

Wir schließen (i) von Δ_0–KS auf 2a, (ii) von 1b auf Δ_0–KS und (iii) von 3b auf Δ_0–KS.

(i) Es sei T eine Teilmenge der endlich aufzählbaren Menge $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Aus Δ_0–KS folgt 1a, weshalb alle $T \cap \{x_i\}$ schwach abzählbar sind; mit Lemma 3.2 ist auch

$$T = (T \cap \{x_0\}) \cup \ldots \cup (T \cap \{x_{n-1}\})$$

schwach abzählbar.

Nun sei φ eine Δ_0-Formel, a_1 und a_2 wie in Lemma 1, sowie $T_1 = \{a_1\}$ und $T_2 = \{a_2\}$.

(ii) Ist $T_1 \cap T_2$ schwach abzählbar, d.h. gibt es eine abtrennbare Teilmenge F von $\mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $F \to T_1 \cap T_2$, so ist F genau dann bewohnt, wenn $T_1 \cap T_2$ es ist; dieses F ist also wie in Δ_0–KS verlangt.

(iii) Der Durchschnitt $T_1^0 \cap T_2^0$ der endlich aufzählbaren Mengen $T_1^0 = \{0, a_1\}$ und $T_2^0 = \{0, a_2\}$ wird von $a_0 = 0$ bewohnt. Nach Wahl von a_0, a_1, a_2 ist $a_i = a_0$ entscheidbar für $i \in \{0,1,2\}$, also

$$T_1 \cap T_2 = \left(T_1^0 \cap T_2^0\right) \setminus \{a_0\}$$

eine abtrennbare Teilmenge von $T_1^0 \cap T_2^0$. Ist $T_1^0 \cap T_2^0$ abzählbar, d.h. gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to T_1^0 \cap T_2^0$, so ist $F = f^{-1}\left[T_1 \cap T_2\right]$ eine abtrennbare Teilmenge von $\mathbb{N}$ und die von f induzierte Abbildung $F \to T_1 \cap T_2$ surjektiv. Wie in (ii) sieht man nun, daß F die in Δ_0–KS verlangte Eigenschaft hat. $\square$

Aus der Theorie des Kreativsubjektes folgt, daß jede bewohnte Teilmenge von $\mathbb{N}$ abzählbar ist [23, 16.7.2]. Daß Δ_0–KS$_\omega$ eine Variante der Aussage "jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist schwach abzählbar" darstellt, wurde in [20, S. 32] bemerkt. Genauer gilt:

Lemma 8: *Jede der folgenden Aussagen ist äquivalent zu* Δ_0–KS$_\omega$*:*

(1) *Jede Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *ist schwach abzählbar.*
(2) *Jede bewohnte Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Mit Corollar 5 sind Δ_0–KS_ω und 1 äquivalent, und offensichtlich folgt 2 aus 1. Es genügt also, von 2 auf 1 zu schließen. Für jede Teilmenge S von $\mathbb{N}$ setzen wir

$$S' = \{n+1 : n \in S\}$$

und betrachten die bewohnte Teilmenge $T = 1 \cup S'$ von $\mathbb{N}$. Ist T abzählbar, d.h. gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to T$, so ist $f^{-1}[S']$ wegen

$$f(n) \in S' \iff f(n) \geq 1$$

eine abtrennbare Teilmenge von $\mathbb{N}$, und die von f induzierte Abbildung $f^{-1}[S'] \to S'$ ist surjektiv, weshalb $S \cong S'$ schwach abzählbar ist. $\square$

Satz 9: *Jede der folgenden Aussagen ist äquivalent zu* Δ_0–KS_ω*:*

(1) (a) *Jede Teilmenge einer schwach abzählbaren Menge ist schwach abzählbar.*
(b) *Der Durchschnitt zweier schwach abzählbarer Mengen ist schwach abzählbar.*

(2) (a) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist schwach abzählbar.*
(b) *Der Durchschnitt zweier abzählbarer Mengen ist schwach abzählbar.*

(3) (a) *Jede bewohnte Teilmenge einer schwach abzählbaren Menge ist abzählbar.*
(b) *Ist der Durchschnitt zweier schwach abzählbarer Mengen bewohnt, so ist er abzählbar.*

(4) (a) *Jede bewohnte Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*
(b) *Ist der Durchschnitt zweier abzählbarer Mengen bewohnt, so ist er abzählbar.*

Beweis. Die folgenden Implikationen sind offensichtlich:

$$\mathrm{Xa} \Longrightarrow \mathrm{Xb} \quad (\mathrm{X} \in \{1,2,3,4\}) \ , \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{1y} & \Longrightarrow & \mathrm{2y} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathrm{3y} & \Longrightarrow & \mathrm{4y} \end{array} \quad (\mathrm{y} \in \{\mathrm{a,b}\}) \ .$$

Es genügt also, (i) von Δ_0–KS_ω auf 1a und (ii) von 4b auf Δ_0–KS_ω zu schließen. Dazu verwenden wir Δ_0–KS_ω, wie es im Lemma 8 charakterisiert worden ist.

(i) Es sei S eine schwach abzählbare Menge, d.h. es gebe eine abtrennbare Teilmenge D von $\mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $f : D \to S$. Ist T eine Teilmenge von S, so ist $f^{-1}[T]$ als Teilmenge von D auch Teilmenge von $\mathbb{N}$. Mit Δ_0–KS_ω ist $f^{-1}[T]$ schwach abzählbar, d.h. es gibt eine abtrennbare Teilmenge E von $\mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $g : E \to f^{-1}[T]$. Schließlich ist die Verknüpfung

$$E \underset{g}{\to} f^{-1}[T] \underset{f}{\to} T$$

surjektiv und damit T schwach abzählbar.

(ii) Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Auf der Menge $A = \{1,2\} \times \mathbb{N}$ wird durch

$$R = \{((i,m),(j,n)) \in A \times A : (i = j \vee m \in M) \wedge m = n\}$$

eine Äquivalenzrelation definiert; es sei $S = A/R$ die Menge aller Äquivalenzklassen $[i,m]$ der $(i,m) \in A$. Die Projektion auf den zweiten Faktor

$$\pi_2 : S \to \mathbb{N}\,,\ [i,m] \mapsto m$$

ist wohldefiniert, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$[1,m] = [2,m] \iff m \in M\,.$$

Die Teilmengen

$$T_i = \{[i,m] : m \in \mathbb{N}\} \quad (i \in \{1,2\})$$

von S sind abzählbar mit $\pi_2[T_1 \cap T_2] = M$. Ist M bewohnt, so ist $T_1 \cap T_2$ bewohnt. Ist nun $T_1 \cap T_2$ abzählbar, d.h. gibt es eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to S$ mit $f[\mathbb{N}] = T_1 \cap T_2$, so ist $\pi_2[f[\mathbb{N}]] = M$, weshalb M abzählbar ist. $\square$

Schreibt man $\varphi(m)$ für die Δ_0-Formel $m \in M$, so sieht man, daß im Teil (ii) des Beweises von Satz 9 derjenige von Lemma 1 verallgemeinert worden ist — wohlgemerkt ohne Verwendung von abzählbarer Auswahl oder klassischer Logik.

Aus dem Kripke-Schema folgt ferner der Satz von Cantor-Bernstein für beliebige Teilmengen von $\mathbb{N}$ [23, 16.7]. Ist auch dieser Satz äquivalent zum Kripke-Schema?

DANKSAGUNG

Die Aussage von Lemma 4 wurde uns in dieser Allgemeinheit von Hannes Diener und Josef Berger mitgeteilt. Den anonymen Gutachtern verdanken wir wertvolle Hinweise. Die Niederschrift des vorliegenden Artikels geschah während einer Gastprofessur des erstgenannten Autors am Laboratoire de Mathématiques der Université de Franche-Comté in Besançon auf Vermittlung von Henri Lombardi.

Mathematisches Institut,
Universität München,
Theresienstraße 39,
80333 München, Allemagne.
E-mail: `Peter.Schuster@mathematik.uni-muenchen.de`

LITERATUR

[1] Aczel, P., The type theoretic interpretation of constructive set theory. *Logic Colloquium ’77*. Hrsg. A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris. North-Holland, Amsterdam (1978), 55–66.
[2] Aczel, P. and M. Rathjen, *Notes on Constructive Set Theory.* Institut Mittag-Leffler Preprint 40 (2000/01).
[3] van Atten, M., *On Brouwer.* Wadsworth/Thomson Learning, Belmont, CA (2004).
[4] Beeson, M.J., *Foundations of Constructive Mathematics.* Springer, Berlin und Heidelberg (1985).
[5] Berger, J. and P. Schuster, Classifying Dini’s theorem. *Notre Dame J. Formal Logic* 47 (2006), 253–262.
[6] Bishop, E., *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, New York (1967).
[7] Bishop, E. und D. Bridges, *Constructive Analysis.* Grundlehren Math. Wiss. 279, Springer, Berlin und Heidelberg (1985).
[8] Bridges, D. und F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics.* Cambridge University Press (1987).
[9] Bridges, D. und L. Vîţă, *Techniques of Constructive Analysis.* Springer, New York (2006).
[10] Brouwer, L.E.J., Essentieel negatieve eigenschappen. *Indagationes Math.* 10 (1948), 322–323. Engl. Übers.: Essentially negative properties [12, 1948A].
[11] Brouwer, L.E.J., Points and spaces. *Canadian J. Math.* 6 (1954), 1–17. Auch: [12, 1954A].

[12] Brouwer, L.E.J., *Collected Works. Vol. 1, Philosophy and Foundations of Mathematics.* Hrsg. A. Heyting. North-Holland, Amsterdam (1975).
[13] Brouwer, L.E.J., *Intuitionismus.* Hrsg. D. van Dalen. Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus, Mannheim (1992).
[14] van Dalen, D., How connected is the intuitionistic continuum? *J. Symbolic Logic* 62 (1997), 1147–1150.
[15] Dummett, M., *Elements of Intuitionism.* Oxford University Press, 2. Aufl. (2000).
[16] Ishihara, H., Informal constructive reverse mathematics. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* 1381 (2004), 108–117.
[17] Ishihara, H., Constructive reverse mathematics: compactness properties. *From Sets and Types to Topology and Analysis.* Hrsg. L. Crosilla, P. Schuster. Oxford Logic Guides 48, Oxford University Press (2005), 245–267.
[18] Ishihara, H., Reverse mathematics in Bishop's constructive mathematics. *Philosophia Scientiae*, cahier spécial 6 (2006), 43–59.
[19] Loeb, I., Equivalents of the (weak) fan theorem. *Ann. Pure Appl. Logic* 132 (2005), 51–66.
[20] Mines, R., W. Ruitenburg und F. Richman, *A Course in Constructive Algebra.* Springer, New York (1987).
[21] Schuster, P., Logisch zwingende Teilprinzipien von ZFC. *Logique et Analyse (N.S.)* 48 (2005), 301–310.
[22] Simpson, S.G., *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Springer, Berlin etc. (1999).
[23] Troelstra, A.S., *Principles of Intuitionism.* Lecture Notes in Math. 95, Springer, Berlin and Heidelberg (1969).
[24] Troelstra, A.S. und D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics.* Zwei Bände. North-Holland, Amsterdam (1988).
[25] Veldman, W., Brouwer's fan theorem as an axiom and as a contrast to Kleene's alternative. Preprint, Radboud University, Nijmegen (2005).