Logique & Analyse **194** (2006), 169–190

LES LOIS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DE L'IDENTITÉ ABSOLUE

ION VEZEANU

Résumé
La théorie logique de l'identité absolue telle qu'elle est exposée dans la logique standard contemporaine, la logique bivalente, est basée sur les lois de Leibniz, sur la formalisation axiomatique de Frege et sur la définition de Russell. L'auteur de cette étude compte systématiser cette théorie et rendre claires, grâce à la formalisation, les distinctions logiques entre la relation d'identité et d'autres relations remarquables comme l'égalité et l'équivalence.

Abstract
The logical theory of the absolute identity such as it is exposed in contemporary standard logic, bivalent logic, is based on the laws of Leibniz, the axiomatic formalization of Frege and the definition of Russell. The author of this study intends to systematize this theory and to make clear, by formalization, the logical distinctions between identity and other remarkable relations like the equality or equivalence.

Dans un article de 1901, Bertrand Russell faisait des remarques qui pourraient sembler paradoxales pour le sens commun. En discutant les fondements des mathématiques, il défendait l'idée d'une formalisation utile et exacte, même si compliquée et difficile, contre l'idée d'évidence comme véritable menace de la précision :

> Le fait est que le symbolisme est utile parce qu'il rend les choses difficiles. [...] Ce que nous souhaitons savoir est ce qui peut être déduit et de quoi. Maintenant, aux commencements, tout est évident en soi. Et il est très difficile de voir si une proposition évidente par elle-même suit d'une autre ou pas. L'évidence est toujours l'ennemi de l'exactitude. Par conséquent, nous inventons un nouveau et difficile symbolisme où rien ne semble évident. Alors nous introduisons

certaines règles pour opérer sur les symboles et tout devient mécanique.[1]

Parmi les relations logiques essentielles, l'identité est la plus évidente et occupe une place cruciale dans le débat philosophique contemporain. C'est une notion qui présente des difficultés irrémissibles et inhérentes ayant suscité une large littérature autour de sa problématique épineuse. Nous n'avons pas l'intention d'en parler dans cette étude[2]. Nous voulons seulement systématiser cette théorie et rendre claires, grâce à la formalisation «difficile», les distinctions logiques entre la relation d'identité et d'autres relations remarquables comme l'égalité et l'équivalence. La théorie logique de l'identité absolue telle qu'elle est exposée dans la logique standard contemporaine, la logique bivalente, est basée sur les lois de Leibniz, sur la formalisation axiomatique de Frege et sur la définition de Russell.

Alfred Tarski propose quelques définitions des lois d'identité sans pour autant nous donner leur expression formelle complète. Cette hésitation est d'autant plus étonnante que la formalisation est souvent salutaire en tant que thérapie contre les ambiguïtés du langage. Il pense que la plus fondamentale de ces lois logiques est, sous une forme légèrement modifiée, la loi de Leibniz, et il la propose sous la forme suivante : «$x = y$ si et seulement si x a chaque propriété qu'a y, et y a chaque propriété qu'a x» [3]. Cette loi fondamentale, qui a la forme d'une équivalence, est comprise comme définition de l'identité «=» .

Nous sommes autorisés à affirmer ceci, à la suite de Leibniz, parce que cette loi nous permet de remplacer le côté gauche de l'équivalence, l'expression ($x = y$) par une autre expression qui se trouve du côté droit de l'équivalence, et qui ne contient plus le signe d'identité. Ce qui n'est pas sans étonner car, pourquoi spécifier, expliquer, traduire le symbole d'identité qui apparaît comme étant très simple, très évident, par une définition complexe, apparemment plus obscure à la compréhension ?

Mais, selon Alfred Tarski, «[...] considérer la loi de Leibniz ici comme une définition ne saurait avoir de sens que si la signification du symbole "=" nous a semblé moins évidente que celle des expressions de la droite de la

[1] B. Russell, «Mathematics and Metaphysicians», in *Mysticism and Logic*, p. 77 ; notre traduction française de cet article, «Les mathématiques et les métaphysiciens» paraîtra in *Mysticisme et logique*, Paris, Vrin, 2006.

[2] Nous avons consacré tout un ouvrage aux problèmes philosophiques soulevés par la notion d'identité, *Le Principe d'identité. De quelques difficultés logiques et épistémiques de l'identité au XX*[e] *siècle*, à paraître chez Vrin en 2006.

[3] A. Tarski, *Introduction à la logique*, p. 50, 51 et 52.

loi, telle que "*x a chaque propriété qu'a y*"» [4]. Gardons un petit doute quant à l'évidence plus grande de cette expression «x a chaque propriété de y» par rapport à «$x = y$», et remarquons que ce genre de définition rend plus facile, par la suite, la déduction d'autres propriétés de l'identité, ceci étant une raison suffisante pour préférer, au niveau logique, une définition plus compliquée à une relation évidente. Comme disait Russell, il faut se méfier de l'évidence si nous voulons gagner en exactitude.

C'est pour accomplir cette tâche, que nous allons présenter les lois de l'identité complètement formalisées sans entrer ici dans le débat philosophique, bien ardu et intéressant, concernant la notion d'identité. La plupart des auteurs contemporains s'accordent, pour établir une théorie logique de l'identité, sur le fait qu'il y a deux perspectives à envisager dans la caractérisation de l'identité. Il s'agit d'un choix entre : une théorie axiomatique de premier ordre qui porte sur les individus, et une théorie définitionnelle de second ordre qui porte sur des prédicats d'individus[5]. Dans le premier contexte, il suffit de suivre la manière de Frege, véritable pionnier du formalisme logique, pour caractériser ou décrire l'identité[6].

1. *L'axiomatique de Frege*

Historiquement, la formulation axiomatique de l'identité fut donnée pour la première fois par Gottlob Frege, dans sa *Begriffsschrift* (1879)[7], à partir des deux propriétés — la réflexivité totale et la substitutivité des identiques :

(*i*) $(x)(x = x)$ (la réflexivité)

(*ii*) $(\mathcal{C})(x)(y)\{[(x = y) \circ \mathcal{C}x] \rightarrow \mathcal{C}y\}$ (le principe de substitution).

Dans ce cas, l'identité est considérée comme étant une *notion primitive*, ou une constante logique, qui est par conséquent indéfinissable. C'est le

[4] *Idem*, p. 50.

[5] Cf. par exemple, D. Vernant, *Introduction à la logique standard*, § 3.1.10.2, p. 282.

[6] D'autres logiciens contemporains considèrent que l'identité est introduite axiomatiquement, donc comme une *notion primitive* ; cf. J.-M. Bochenski, *A Precise of Mathematical Logic*, p. 53 ; cf. aussi A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 281, qui propose également d'axiomatiser l'identité à la manière frégéenne.

[7] G. Frege, *Idéographie*, formules 52 et 54, p. 68–69 ; cf. également N. Griffin, *Relative Identity*, p. 1 ; cf. aussi la transcription de D. Vernant, *Introduction à la logique standard*, p. 282.

cas d'une théorie du premier ordre[8]. Dans son expression leibnizienne, le principe de substitution *salva veritate* s'énonce ainsi : «*Eadem sunt quorum unum alteri substitui potest salva veritate*» [9]. Ce principe ne porte pas sur les objets ni sur leurs propriétés, mais il porte sur les noms des objets ou les expressions qui les désignent et sur la valeur de vérité des phrases où ceux-ci apparaissent. La règle de substituabilité des identiques découle du principe d'identité : dans un même contexte $\mathcal{C}$, on peut substituer les noms d'un même objet tout en gardant la vérité sauve, mais non pas l'objet de référence désigné par ces noms, qui est identique à lui-même et unique. Autrement, l'usage erroné des énoncés d'identité mène à des confusions graves qui rendent défectueux tout langage, quel qu'il soit.

Il faut toutefois préciser que, pour Frege, il s'agit ici d'une identité de contenu symbolisée par le signe «$\equiv$» et que le logicien allemand n'utilise pas la notion de contexte «$\mathcal{C}$», mais celle de fonction «f» . La substitution des identiques se traduit pour lui de la sorte :

> Le cas où le contenu de x est identique au contenu de y, où $f(x)$ est affirmé et $f(y)$ est nié, n'a pas lieu. Cette proposition exprime le fait que si $x \equiv y$, on pourrait partout remplacer x par y. Dans $f(x)$, x peut aussi apparaître à d'autres places que la place de l'argument. C'est pourquoi x peut aussi être inclus dans $f(y)$.[10]

Dans la lignée frégéenne, il est possible de construire la théorie logique de l'identité, à partir de la théorie classique de la quantification par l'addition d'un seul axiome dont la validité ne dépend pas de la forme quantificationnelle, mais de la signification du signe d'identité. Cet axiome est connu sous le nom de «Loi de Wang» .

[8] Cf. par exemple, D. Hilbert, «Sur les fondements de la logique», p. 260–261 : 1. $x = x$, 2. $\{x = y \in w(x)\} \mid w(y)$, qui est l'introduction axiomatique du concept «$=$» (egal). Il y a d'autres formes de présentation des deux axiomes de l'identité («Gleichheitsaxiome») en logique du premier ordre, dans le système d'Hilbert, par exemple : $(a = a)$ et $(a = b) \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$. Dans ce cas, l'utilité de ces axiomes réside dans leur utilisation en tant que lois *primitives* dans les différentes déductions ; on peut dériver la commutativité, la transitivité de l'identité (cf. D. Hilbert, «Sur l'infini», p. 235) ; cf. aussi M. Fichant, «Les axiomes de l'identité», *Revue Internationale de Philosophie*, p. 192, note 34.

[9] Cf. L. Couturat, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, p. 259.

[10] G. Frege, *Idéographie*, p. 68–69.

2. *La loi de Wang*

La loi de Wang a été formulée pour la première fois par Quine suite à une conversation entre les deux logiciens. Mais, elle ne fut jamais écrite comme telle par Hao Wang[11] :

(1) $\vdash Fa \leftrightarrow (\exists x)[Fx \circ (x = a)]$

Cette expression formelle peut se traduire de multiples façons : «Tout ce qui est vrai de quelque chose identique avec un objet a est vrai de a, et réciproquement» ou «Ce qui est prédicable d'un objet identique à un objet a, est prédicable de a, et réciproquement» . C'est à partir de cet unique axiome que l'on peut obtenir la loi d'identité : «$\vdash a = a$» . Pour en arriver là, nous considérons «$F\xi$» comme étant le prédicat «$\xi \neq a$» et par substitution en (1) nous obtenons :

(2) $\vdash (a \neq a) \leftrightarrow (\exists x)[(x \neq a) \circ (x = a)]$

De cette expression, il est facile de déduire par définition, spécification existentielle, simplification et principe de preuve indirecte la loi de la réflexivité totale de l'identité[12]. En effet, $(\exists x)(x = a)$; l'introduisant en (2), nous obtenons :

$$\vdash (a \neq a) \leftrightarrow [(a \neq a) \circ (a = a)]$$

Or, la formule $a \neq a$ est fausse, donc :

(3) $\vdash a = a$

[11] Nous tenons cette information de Nicholas Griffin ; cf. son courrier du 1er mars 2003. En effet, l'axiome est attribué à Hao Wang par W.-V.-O. Quine, *Set Theory and its Logic*, p. 13 ; il est repris par P.-T. Geach, *Logic Matters*, p. 238 ; on le retrouvera également chez M. Longeart-Roth, «L'identité est-elle relative ?», p. 697.

[12] Ou selon la formulation anglaise «Law of Self-Identity» . La démonstration tirée de Quine, *Set Theory and its Logic*, est reprise par Geach, *Logic Matters*, p. 239 et M. Longeart-Roth, «L'identité est-elle relative ?», p. 697 ; il y a plusieurs traductions de cette loi, toutes équivalentes ; Tarski l'énonce de cette façon : «chaque chose est égale à elle-même» le lecteur intéressé trouvera également une autre démonstration de cette loi *in* Tarski, *Introduction à la logique*, p. 51. Précisons qu'aucun des auteurs cités n'offre la démonstration complète de la loi d'identité ; Geach, par exemple, affirme «se fier» à Quine.

Pareillement, il est aisé de dériver (par définition, simplification et spécification) de la même loi de Wang le principe d'indiscernabilité des identiques et le principe de substituabilité. En effet, nous considérons en (1) que $(\exists x)(x = b)$ et nous obtenons :

$$\vdash Fa \leftrightarrow [Fb \circ (b = a)],$$

d'où nous pouvons conclure aux deux formules suivantes :

$\vdash Fa \rightarrow [Fb \circ (b = a)]$ et
(4) $\vdash [Fb \circ (b = a)] \rightarrow Fa$

De la sorte, grâce à la théorie classique de la quantification à laquelle nous ajoutons la loi de Wang (implicitement la loi d'identité et le principe d'indiscernabilité des identiques) nous pouvons obtenir toutes les lois formelles de la théorie logique de l'identité. Ce qui fait que cette théorie peut être considérée comme un système formel *déductif complet*[13], ainsi que l'a montré Kurt Gödel :

> D'abord il est facile de faire entrer en compte la notion d'identité (entre individus) en ajoutant aux axiomes ci-dessus 1–6 deux nouveaux axiomes :
> 7. $x = x$. 8. $(x = y) \rightarrow [(F(x) \leftrightarrow F(y)]$.
> Pour cet ensemble plus vaste de formules on a des théorèmes analogues, le Théorème VII : toute formule valide (plus précisément : valide dans tout domaine d'individus) appartenant à cet ensemble plus vaste de formules, est démontrable, et le Théorème VIII, qui équivaut au Théorème VII : toute formule appartenant à cet ensemble plus vaste de formules est ou bien réfutable ou bien satisfiable (et cela dans un domaine d'individus fini ou dénombrable)[14].

De ceci on peut tirer une conséquence immédiate, à savoir que tout système d'énoncés qui admet un énoncé qui contredit la loi d'identité $(x = x)$

[13] P.-T. Geach, *Logic Matters*, p. 239 : «The logical system got by adjoining schema (1) to classical quantification theory is a system with a complete proof procedure» .

[14] K. Gödel, «La complétude des axiomes du calcul fonctionnel» *in* J. Largeault, *Logique mathématique. Textes*, p. 182–183 ; cf. également W.-V. Quine, *La Philosophie de la logique*, p. 93.

est inconsistant. Autrement dit, on peut déduire la *règle d'identité* : tout système de propositions qui contient la proposition "$\neg a = a$" est inconsistant[15].

Cette conception frégéenne de l'identité, comme *idée primitive*, qui dénonce l'impossibilité d'une définition adéquate de l'identité sous peine de tomber dans un cercle vicieux ou de faire une pétition de principe (prendre le *definiens* pour le *definiendum*), sera critiquée notamment par Russell dans *Principia Mathematica*, lorsqu'il assurera le passage à la logique de second ordre. À cette occasion, il utilisera l'axiome de réductibilité pour assurer la généralité des lois logiques fondamentales lui permettant entre autres de définir l'identité. Sinon, pour le philosophe de Cambridge, le fait de ne pas employer l'axiome de réductibilité pour déterminer l'identité aurait des conséquences fâcheuses :

> Mais sans l'axiome de réductibilité ou quelque axiome équivalent à cet égard, nous serions contraints de considérer l'identité comme *indéfinissable*, et d'admettre (ce qui semble impossible) que deux objets peuvent s'accorder sur tous leurs prédicats sans être identiques[16].

3. *Les lois de Leibniz et la définition de Russell*

Si la quantification porte sur des prédicats de second ordre, l'identité peut être définie à partir des deux principes leibniziens suivants, l'indiscernabilité des identiques et l'identité des indiscernables :

(*iii*) $\quad (x)(y)[(x = y) \rightarrow (Q)(Qx \equiv Qy)]$

C'est le principe d'indiscernabilité des identiques (*ind. id.*) connu sous le nom de la *loi de Leibniz*[17]. Le principe énonce que si deux choses sont identiques, alors elles sont indiscernables. Si x est identique à y, alors toute propriété Q s'appliquant à x, s'applique aussi à y. Cette relation apparaît

[15] W. Hodges, *Logic. An Introduction to Elementary Logic*, p. 164 : «de la loi d'identité nous déduisons la *règle d'identité* : si a est un désignateur, alors tout ensemble de propositions contenant l'énoncé "$\neg a = a$" est inconsistant» .

[16] Cf. *op. cit.*, p. 298 ; nous soulignons.

[17] La loi de Leibniz est le principe d'*indiscernabilité des identiques* et non pas celui de l'*identité des indiscernables* comme on le rencontre parfois dans les écrits de logique. Leibniz le considère comme un principe logique de ses systèmes ; cf. L. Couturat, *La Logique de Leibniz*, p. 338.

comme la réciproque de :

(*iv*) $(x)(y)[(Q)(Qx \to Qy) \to (x = y)]$,

qui est le principe d'identité des indiscernables (*id. ind.*). Ce principe précise que toute propriété *qualitative* Q qui s'applique à x, s'applique pareillement à y. Ainsi, les individus ne font qu'un puisqu'ils ne peuvent guère être discernés au niveau conceptuel. Par conséquent, ils sont numériquement (*solo numero*) identiques. Leibniz avait donné plusieurs expressions négatives de cette loi dans sa correspondance avec Clarke :

> Il n'y a point deux individus indiscernables. Un gentilhomme d'esprit de mes amis en parlant avec moy en presence de Mme l'Electrice dans le jardin de Herrenhausen, crût qu'il trouveroit bien deux feuilles entièrement semblables. Mme l'Electrice l'en défia, et il courut longtemps en vain pour en chercher. Deux gouttes d'eau ou de lait, regardées par le microscope, se trouveront discernables. [...] Poser deux choses indiscernables est la même chose sous deux noms.[18]

Si on combine les deux principes (*iii*) et (*iv*) on obtient la *définition de l'identité* en calcul des prédicats en acceptant la quantification de second ordre :

(*v*) $(x)(y)[(x = y) =_{\mathrm{Df}} (Q)(Qx \to Qy)]$.

Cette définition de l'identité a son origine chez Russell : «Il s'ensuit que nous pouvons *définir* x et y comme identiques quand tous les prédicats de x appartiennent à y, c'est-à-dire quand $(Q)(Qx \to Qy)]$» [19]. Dans la notation originale, la formule s'écrit de la sorte :

$$x = y . =: (\varphi) : \varphi\ !x . \supset . \varphi\ !y \text{ Df.}$$

Et Russell de préciser en note que c'est le premier signe d'égalité qui est défini, alors que le second signe d'égalité doit être considéré ensemble avec

[18] Leibniz, «Quatrième écrit de Leibniz», *Correspondance Leibniz-Clarke* (lettre de 2 juin 1716), p. 83–85.

[19] Cf. *Principia Mathematica*, p. 298 (*13.01, p. 168).

le symbole «Df» [20]. Cette remarque est une autre réponse à la conception frégéenne de l'indéfinissabilité de l'identité.

Mais bien évidemment, la définition russellienne de l'identité n'échappa, elle non plus, aux critiques. Russell semble avoir confondu les objets (identiques) avec les noms (différents) qui désignent un même objet[21]. Dès lors, les disputes et les critiques des interprétations données aux expressions formelles ne cessent plus[22]. C'est parce que le choix entre l'introduction *axiomatique* ou la *définition* de l'identité est basé sur des présupposés philosophiques. Pour donner deux exemples seulement, Frege se détache nettement de la conception aristotélicienne, fait qui lui a permis de dépasser la logique syllogistique et d'inventer le formalisme contemporain. Mais le philosophe allemand reste redevable à une conception platonicienne des *pensées*, l'identité étant pour lui une sorte de principe absolu et premier de la pensée, donc indéfinissable. Alors que Russell compte se défaire de toute forme d'idéalisme philosophique et ce qui avait statut de «principe» chez les anciens, comme l'identité par exemple, devient chez le philosophe britannique un simple théorème démontrable.

Mais quelque soit le parti pris philosophique ou l'interprétation que l'on en donne, on peut tirer de ces expressions formelles les propriétés caractéristiques de la relation d'identité. Et les déductions formelles ne sont pas plus difficiles dans le cas axiomatique que dans le cas définitionnel.

[20] Il y a évidemment d'autres définitions équivalentes de l'identité en calcul des prédicats du second ordre ; Alonzo Church en propose une qui permet de réduire l'identité à la quantification et aux lois du calcul propositionnel : $(a = b) =_{\mathrm{Df}} (F)[F(a) \rightarrow F(b)]$. À partir de cette définition et de la loi logique «$p \rightarrow p$» on peut dériver les propriétés de l'identité et la substituabilité des identiques ; in *Introduction to Mathematical Logic*, p. 300, note 52 ; cf. aussi M. Fichant, «Les axiomes de l'identité et la démonstration des formules arithmétiques : $2 + 2 = 4$», p. 192, note 34.

[21] Cf. par exemple la critique de Gochet, *in* P. Gochet et P. Gribomont, *Logique*, vol. I, p. 41. De cette définition russellienne (B. Russell, «De la dénotation», p. 209) ne ressort pas clairement la différence entre les objets identifiés a et b et les termes qui les désignent et qui sont eux interchangeables *salva veritate*.

[22] J.-L. Gardies, «La définition de l'identité d'Aristote à Zermelo», p. 58. L'auteur français, particulièrement virulent contre Leibniz et Frege, semble ne pas avoir saisi l'erreur de Russell et tombe dans la même méprise.

4. *Des preuves et des propriétés essentielles*

D'abord, la plus importante propriété est connue sous le nom de *réflexivité totale* : tout individu (*quatenus individuum*) est identique à lui-même.

(*vi*) $(x)(x = x)$

Une relation est dite totalement *réflexive*, quand elle relie universellement un individu quelconque à lui-même[23].

Ensuite, la relation d'identité est *symétrique* ou, en termes mathématiques, *commutative*.

(*vii*) $(x)(y)[(x = y) \rightarrow (y = x)]$

Elle vaut dans les deux sens ; une relation est symétrique si du fait qu'elle relie x et y, chaque fois elle relie aussi y et x.

Enfin, la relation d'identité est *transitive*.

(*viii*) $(x)(y)(z)\{[(x = y) \circ (y = z)] \rightarrow (x = z)\}$

Celle-ci est la troisième propriété caractéristique de l'identité et de toute relation d'équivalence. Une relation est transitive si du fait qu'elle relie x à y, et y à z, chaque fois elle relie aussi x à z. Les relations formelles de (*i*) à (*viii*) constituent la théorie logique de l'identité absolue.

Les logiciens, pour la plupart, utilisent les principes leibniziens pour donner les preuves et déduire d'autres propriétés de l'identité. Ainsi pour la symétrie :

$$(x)(y)[(x = y) \rightarrow (y = x)]$$

En substituant, dans la loi de Leibniz, «x» à «y» et «y» à «x», nous parvenons à la formulation suivante :

$$(y)(x)[(y = x) \rightarrow (Q)(Qy \equiv Qx)]$$

Or, si nous appliquons maintenant le principe d'identité des indiscernables,

$$(x)(y)[(Q)(Qx \rightarrow Qy) \rightarrow (x = y)],$$

[23] Cf. Russell, *Principia Mathematica*, p. 250.

nous obtenons la propriété de symétrie : $(y = x) \to (x = y)$. En substituant «x» à «y» et «y» à «x», nous prouvons ce qu'il fallait démonter : $(x = y) \to (y = x)$[24].

Pareillement pour la transitivité :

$$(x)(y)(z)[(x = y) \circ (y = z) \to (x = z)]$$

Par hypothèse, les formules $(x = y)$ et $(y = z)$ sont valides : selon la loi de Leibniz, considérée pour la deuxième formule $(y = z)$, tout ce qui peut se dire de y peut se dire aussi de z :

$$(y)(z)[(y = z) \to (Q)(Qy \equiv Qz)].$$

En remplaçant «y» par «z» dans la première formule nous obtenons $(x = z)$, ce qu'il fallait prouver. Partant, l'identité $(x = y)$ peut être considérée comme une relation binaire d'équivalence forte, «elle engendre des classes d'équivalence dont chacune ne comporte qu'un seul élément» [25].

5. *D'autres propriétés et quelques applications*

Par la suite, on peut démontrer une autre propriété importante pour la relation d'identité qui est celle d'*unicité* : «L'identité est une relation donnée à nous dans une telle forme spécifique qu'il est inconcevable qu'il puisse exister plusieurs formes» [26]. Dans un article récent, un logicien suisse met en valeur le caractère unique de l'identité absolue : «En logique formelle, on peut distinguer diverses interprétations des énoncés d'identité. Selon celle qui fut défendue par Frege et Russell, l'identité exprime une relation objectuelle au caractère *unique* et absolue» [27].

[24] A. Tarski, *Introduction à la logique*, p. 51–52 ; de même C. Howson, *Logic with Trees. An Introduction to Symbolic Logic*, p. 118–120, prouve la transitivité et la symétrie, ou encore R. Jeffrey, *Formal Logic : Its Scope and Limits*, p. 88–89. Le lecteur intéressé trouvera d'autres méthodes de démonstration de ces propriétés de l'identité chez W.-V. Quine, *Méthodes de logique*, p. 239–240.

[25] D. Vernant, *Introduction à la logique standard*, p. 277.

[26] G. Frege, *Grundgesetze*, vol. II, p. 254 ; cf. aussi P.-T. Geach, *Logic Matters*, chap. 7, p. 238 : «Identity is a relation given to us in such a specific form that it is inconceivable that various forms of it should occur» . Cette position frégéenne va dans le sens opposé à la relativisation de l'identité.

[27] P. Joray, «L'identité est-elle relative ? Remarques sur une illusion logique», p. 1 ; nous soulignons.

Supposons, par réduction à l'absurde, qu'il y ait deux relations d'identité «$=_1$» et «$=_2$» qui vérifient les propriétés de l'égalité dans une théorie donnée, on voit alors que ces définitions quelconques de l'identité coïncideront chaque fois que deux objets seront considérés identiques. En vertu de (*ii*), nous avons : $[(x =_1 y) \circ Qx)] \rightarrow Qy$; qui est réalisée pour toutes les substitutions à «Qx» et à «Qy», par conséquent,

$$[(x =_1 y) \circ (x =_2 x)] \rightarrow (x =_2 y);$$

or, de (*i*) nous avons $(x =_2 x)$; donc :

$$(x =_1 y) \rightarrow (x =_2 y);$$

de même, $(x =_2 y) \rightarrow (x =_1 y)$ et par la suite,

$$(x =_1 y) \equiv (x =_2 y).$$

En conclusion, «$=_1$» et «$=_2$» sont la même relation[28]. De cette manière, on peut comprendre ce qui fait la spécificité de la relation d'identité par rapport à toute autre relation d'équivalence, cette dernière étant plus générale par rapport à l'identité. En effet, l'identité est toujours une relation d'équivalence (*équivalence forte*), par contre il y a des relations d'équivalence qui ne sont pas des identités, car elles ne vérifient pas le principe de substitution *salva veritate*. Cette propriété de remplacement des identiques est essentielle à l'identité[29]. Par exemple, la congruence arithmétique est une relation d'équivalence sans pour autant être une relation d'identité. Elle est réflexive dans son champ, symétrique et transitive[30], mais ne vérifie pas le principe de substitution et, dans une addition arithmétique, le resultat change si l'on substitue un de ses termes par un nombre qui lui est congru modulo n[31].

[28] Cf. W.-V.-O. Quine, *La Philosophie de la logique*, p. 94 ; cf. également A.-H. Lightstone, *Mathematical Logic : an Introduction to Model Theory*, p. 263–273. Après avoir *démontré* la propriété d'unicité de l'identité, nous allons *déduire* la propriété logique générale d'unicité à l'aide de l'identité ; cf. *infra*.

[29] S.-C. Kleene, *Logique mathématique*, p. 165 : «[. . .] il est important de se rendre compte qu'une relation qui ne vérifie que les 3 premières propriétés [réflexivité, symétrie et transitivité] n'est pas l'égalité au sens ci-dessus. Nous préférons dans ce cas parler seulement *d'équivalence* ou de *relation d'équivalence*» .

[30] Elle ne vaut que pour les nombres.

[31] M. Longeart-Roth, «L'identité est-elle relative ?», p. 699 : «Deux nombres entiers sont dits congrus par rapport à un troisième nombre n si leur différence est divisible par ce nombre. Le nombre n est appelé le module» .

Définie de cette façon l'identité est un opérateur logique indispensable. Signalons quelques-unes de ses vertus :

> L'introduction de l'identité et de la différence dans le formalisme du langage des prédicats accroît considérablement sa puissance expressive. Elle permet notamment de formuler une *quantification numériquement définie* et elle est au cœur de la définition des nombres et de la formalisation de l'arithmétique.[32]

L'identité permet la définition de la classe universelle, de la classe vide, de la relation de différence, de l'unicité, de la dualité, des nombres. Par exemple, la classe universelle «V» est la classe qui comprend tous les individus possibles. La fonction d'identité de tout individu x avec lui-même détermine justement la classe universelle :

$$\mathrm{V} =_{\mathrm{Df}} \{x : (x = x)\}.$$

La classe vide «$\emptyset$», qui est aussi la négation de la classe universelle, est déterminée par les fonctions contradictoires. Celles-ci ne peuvent être satisfaites par aucun individu. Ainsi, la fonction contradictoire «$x \neq x$» détermine la classe vide :

$$\emptyset =_{\mathrm{Df}} \{x : (x \neq x)\}.$$

Or, la fonction contradictoire comme la relation de différence s'obtiennent par la négation de la relation d'identité. Deux individus sont différents s'ils ne partagent pas au moins un predicat :

$$(x)(y)[(x \neq y) =_{\mathrm{Df}} \neg(Q)(Qx \to Qy) \equiv \exists Q(Qx \circ \neg Qy)].$$

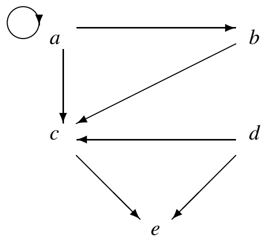
L'opérateur d'identité sert aussi pour la définition de la structure du champ d'une relation. Par exemple, la relation R est définie en extension comme l'ensemble des couples suivants :

$$R = \{<\mathrm{a},\mathrm{a}>, <\mathrm{a},\mathrm{b}>, <\mathrm{a},\mathrm{c}>, <\mathrm{b},\mathrm{c}>, <\mathrm{c},\mathrm{e}>,$$
$$<\mathrm{d},\mathrm{c}>, <\mathrm{d},\mathrm{e}>\}.$$

Sa structure peut être représentée par un diagramme sagittal :

[32] D. Vernant, *Introduction à la logique standard*, p. 278.

Fig. 1



Une autre propriété logique importante qui se définit grâce à l'opérateur d'identité est l'*unicité*. Il s'agit d'exprimer le fait qu'un seul et uniquement un seul individu a la propriété Q. En utilisant l'identité, on peut exprimer le fait qu'*au plus* un individu a la propriété Q :

$$(x)(y)[Qx \circ Qy) \rightarrow (x = y)].$$

Or, on sait que la quantification existentielle $\exists xQx$ exprime le fait qu'*au moins* un individu x a la propriété Q. Par la conjonction des deux formules, on peut expliciter le fait qu'*exactement un*, c'est-à-dire *un et un seul*, individu, a la propriété Q :

$$\exists xQx \circ (x)(y)[Qx \circ Qy) \rightarrow (x = y)].$$

Par simplification, nous obtenons la formule utilisée pour exprimer l'unicité :

$$\exists x\{Qx \circ (y)[Qy \rightarrow (x = y)]\}.$$

La dualité est définie de la même façon, mais à l'aide de la différence : il existe *exactement deux* individus qui ont la propriété Q :

$$\exists x \exists y\{Qx \circ Qy \circ (x \neq y) \circ (z)(Qz \rightarrow [(z = x) \vee (z = y)]\}^{33}.$$

[33] *Idem*, § 3.1.10.2, p. 280.

6. *Identité et égalité*

Les lois fondamentales de l'identité peuvent toutes, de cette façon, être explicitées formellement dans le cadre d'une théorie logique de l'identité ou de l'égalité et fondent un système formel déductif complet. En ce sens, Russell pensait qu'il n'y a pas de distinction à faire entre le signe d'égalité et celui d'identité :

> Nous verrons qu'aucune définition nouvelle du signe de l'égalité n'est exigée par la mathématique : toutes les équations mathématiques dans lesquelles le signe de l'égalité est employé de la façon habituelle expriment une identité, et donc font usage du signe de l'égalité au sens expliqué ci-dessus.[34]

Toutefois, il est nécessaire de faire une dernière précision, ou plutôt mettre en évidence une distinction entre le concept d'identité et celui d'égalité, détail qui n'apparaît pas souvent dans les écrits contemporains et dont l'ignorance peut prêter à confusion. Cette confusion, Frege la faisait déjà dans son fameux article «Sens et référence» . Toutefois, soucieux de rigueur, il spécifie en note : «j'emploie le mot [égalité] au sens d'identité et j'interprète "$a = b$" au sens de "a est la même chose que b" ou "a est b coïncident"»[35]. La conception frégéenne de l'identité avait changé par deux fois depuis sa *Begriffsschrift* jusqu'à *Sinn und Bedeutung*. A cet égard, les critiques sont assez nombreuses. A titre d'exemple, Jonathan Barnes parle d'un véritable Capharnaüm lorsqu'il analyse le paragraphe § 8 de l'*Idéographie*[36].

Bon nombre de logiciens et de philosophes tiennent la notion arithmétique d'égalité entre les nombres pour un cas particulier du concept logique d'identité, à la manière de Tarski, par exemple. La liste est bien longue et, sans vouloir susciter la polémique, nous allons indiquer quelques exemples. En 1896, Giuseppe Peano ne distingue pas entre identité et égalité ; cette

[34] B. Russell, *Principia Mathematica*, p. 251.

[35] G. Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, p. 102 ; cf. aussi Cl. Imbert, «Introduction» *in* G. Frege, *Les Fondements de l'arithmétique*, p. 35 : «Selon Frege, une égalité est une *identité* ; comme telle c'est une relation entre objets» ; cf. aussi p. 49.

[36] J. Barnes, «Postface», *in* G. Frege, *Idéographie*, p. 119–206.

confusion fut reprise comme telle par Russell[37]. Lorsqu'ils critiquent Frege, Gardies et Barnes confondent également les deux notions[38].

Malgré cela, certains mathématiciens et philosophes font la distinction entre le symbole «=» d'égalité arithmétique et celui d'identité logique ne considérant pas les nombres égaux comme étant identiques[39]. Aussi parle-t-on d'égalité, en mathématiques, seulement lorsqu'une équation est conditionnelle, autrement dit, quand elle ne se vérifie que pour *certaines* valeurs des variables. Par contre, si l'équation se vérifie pour *toutes* les valeurs des variables qui concernent cette équation et qui rendent l'égalité vraie, alors l'équation est appelée identité[40]. Une des conséquences de cette conception (le refus d'assimiler l'égalité à l'identité) est le rejet de la loi de Leibniz sous sa forme générale et son acceptation sous des formes particulières, considérées comme étant spécifiquement mathématiques, du genre «chaque fois que $x = y$ et que x satisfait à quelque formule construite seulement de symboles arithmétiques, alors y satisfait la même formule. Ainsi, par exemple, le théorème : *si* $x = y$ *et* $x < z$*, alors* $y < z$» [41]. Mais, une telle conception s'avère très lourde voire laborieuse en pratique sans présenter pour autant un quelconque profit théorique, car elle suppose que l'on doive présenter des preuves spécifiques pour chaque équation particulière, pour légitimer la substitution du terme gauche par le côté droit de l'égalité. Prenons l'exemple fourni par Tarski[42] d'un système de deux équations à deux variables :

$$x = y^2;$$
$$x^2 + y^2 = 2x - 3y + 18.$$

Ce système d'équations peut se résoudre facilement par la méthode de substitution qui consiste à remplacer x par y^2 partout dans la deuxième équation.

[37] G. Peano, *Formulario matematico*, p. 3 et p. 6. B. Russell, *Principia Mathematica*, in *Écrits de logique philosophique*, p. 235 ; Russell s'est inspiré en effet de la définition donnée par Peano au signe «$=_{\mathrm{Df}}$», cf. *op. cit.*, p. 14–15. Kleene confond également égalité et identité ; cf. *supra*.

[38] J.-L. Gardies, «La définition de l'identité d'Aristote à Zermelo», p. 59 ; cf. aussi J. Barnes, *op. cit.*, p. 155.

[39] A. Church, A. Tarski, D. Vernant, P. Engel, M. Longearth-Roth, etc. (cf. *supra*) ne font pas cette méprise.

[40] M. Longeart-Roth, «L'identité est-elle relative ?», p. 698, note 4.

[41] Cf. A. Tarski, *Introduction à la logique*, p. 55.

[42] *Idem*, p. 56.

Partant, on obtient un système d'équations (qui devrait être) équivalent au premier :

$$x = y^2$$
$$(y^2)^2 + y^2 = 2y^2 - 3y + 18.$$

En effet, quelle que soit la conception que l'on peut avoir de la notion d'égalité des nombres, les deux systèmes d'équations sont équivalents même si pour prouver cela il faudrait justifier à chaque fois que la substitution est correcte. Cela ne fait pas de difficulté de principe, mais rend la méthode «plutôt longue et fastidieuse» [43]. Par contre, si le symbole «$=$» est compris en tant qu'identité logique, en admettant la loi de Leibniz, l'identité $x = y^2$ nous permet de remplacer «x» par «y^2» dans la deuxième équation sans justifier chaque fois la validité de cette opération. Par conséquent, cela ne servirait pas à grande chose de distinguer entre identité logique et égalité arithmétique.

En revanche, la notion d'égalité en géometrie euclidienne a une tout autre signification et une confusion entre celle-ci et l'identité mènerait à des erreurs d'interprétation. Car, lorsque nous affirmons que deux figures géométriques (deux segments de droite, deux angles, deux polygones) sont égales ou congruentes, nous ne voulons pas dire par là qu'elles sont identiques. Mais plutôt qu'elles ont la même grandeur et la même forme. Il est facile de comprendre pourquoi nous ne pouvons pas affirmer l'identité de deux côtés égaux d'un triangle, entendu qu'ils sont *deux* et non pas *un* et le même. Ce genre de situation peut prêter à confusion avec d'autres cas, d'identités logiques cette fois-ci, mais concernant toujours les figures géométriques. Ainsi, dans un triangle isocèle, la hauteur et la médiane sont en même temps géométriquement égales et logiquement identiques, puisqu'il s'agit d'un seul et même segment de droite. Les exemples sont nombreux (telles les médiatrices, les hauteurs et les médianes correspondantes à chaque côté d'un triangle équilateral et qui coïncident) et par conséquent, pour éviter les confusions, il faudrait utiliser le terme «congruence» désigné par le symbole «$\equiv$» à la place du terme «égalité» désigné par «$=$», chaque fois qu'il est question d'égalité géométrique et non pas d'identité logique.

Il faut également distinguer l'identité de l'égalité des classes, de l'égalité des relations ou de l'égalité arithmétique entre nombres, «qui toutes sont *relatives à* des champs déterminés d'individus qualifiés : classes, relations, nombres, etc.» [44]. De cette théorie formelle de l'identité (qui est en fait la

[43] *Ibidem*.

[44] D. Vernant, *Introduction à la logique standard*, p. 278. Pour l'égalité des classes et des relations cf. G. Peano, *Formulario Matematico*, I, § 2, p. 4–7 ; cf. aussi J. Largeault, *Logique*

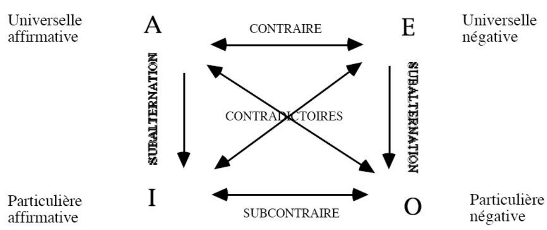
conception contemporaine de l’identité absolue), on peut tirer une dernière conséquence importante : à partir de la relation de réflexivité $(x)(x = x)$ et de la notion de négation logique «$\neg$» nous pouvons dériver une relation contraire et deux relations contradictoires :

la contraire : $(x)\neg(x = x)$

les contradictoires : $\neg(x)(x = x); \neg(x)\neg(x = x)$

C’est grâce à ces relations que nous pouvons construire *le carré logique d’oppositions* pour la logique standard (ou logique bivalente) contemporaine. Ce carré a été schématisé pour la première fois au II^{e} siècle par Apulée[45]. Celui-ci est composé par quatre formes de propositions connues et notées par les scolastiques de la façon suivante : A (proposition affirmative universelle, par exemple, $(x)(x = x)$) ; E (proposition négative universelle, par exemple, $(x)\neg(x = x)$) ; I (proposition affirmative particulière, par exemple, $\neg(x)\neg(x = x)$) ; O (proposition négative particulière, par exemple, $\neg(x)(x = x)$). Les rapports de contrariété, de contradiction et de subalternation sont illustrés par le schéma suivant :

Fig. 2



7. *Identité et équivalence*

Bref, on peut soutenir qu’il y a deux propriétés logiques importantes spécifiques à l’identité, qui sont à la base de la théorie formelle de l’identité : d’une part, le fait pour celleci d’être une relation d’équivalence forte et d’autre part de satisfaire au principe de substitutivité des identiques *salva veritate*. Les deux relations remarquables l’identité et l’équivalence ont des

mathématique. Textes, p. 183, ou encore J.-L. Gardies, «La définition de l’identité d’Aristote à Zermelo», p. 63–64.

45 M.-D. Popelard et D. Vernant, *Éléments de logique*, p. 11.

propriétés communes comme la réflexivité, la symétrie et la transitivité. Pourtant, elles ne peuvent pas être confondues, puisqu'elles se distinguent par des propriétés spécifiques. L'identité est réflexive totalement, alors que l'équivalence est réflexive par rapport à un champ déterminé. L'identité est une relation entre un individu et lui-même, alors que l'équivalence concerne de façon générale deux individus. L'identité est caractérisée par le principe de substitution des identiques *salva veritate*, alors qu'aucune autre relation logique ne vérifie ce principe.

On peut formaliser ces remarques pour mieux distinguer l'équivalence de l'identité. Considérons une relation binaire R qui est réflexive, symétrique et transitive, alors elle satisfait les trois conditions formelles suivantes :

I) $\textit{Réfl}(R) \equiv (x)[(\exists y)(xRy \vee yRx) \rightarrow xRx]$
II) $\textit{Sym}(R) \equiv (x)(y)(xRy \rightarrow yRx)$
III) $\textit{Trans}(R) \equiv (x)(y)(z)[(xRy \circ yRz) \rightarrow xRz)$

Ces propriétés sont spécifiques à toute relation d'équivalence et satisfont également la relation d'identité. Seulement, ces propriétés ne suffisent pas à elles seules à caractériser totalement l'identité. Pour caractériser l'équivalence, il faut lui associer un domaine ou un champ spécifique d'application ou de pertinence : nombres naturels, figures géométriques, organismes vivants, ensembles, etc.[46] Pour dire qu'un certain x est *pertinent* pour une relation R on utilise la condition formelle suivante :

IV) $\textit{Pert}(x, R) \equiv (\exists y)(xRy \vee yRx)$

Cette condition est inutile dans le cas de l'identité, car celle-ci a une applicabilité universelle. Formellement cette propriété s'exprime ainsi :

V) $\textit{Uni}(R) \equiv (x)(\exists y)(xRy \circ yRx)$

Par conséquent, à l'aide des conditions I) et V), on déduit une des propriétés essentielles de l'identité, la réflexivité totale :

VI) $\textit{Réfl} * (R) \equiv (x)(xRx)$

Cette propriété ajoutée à celle opératoire de substitution caractérisent complètement la relation d'identité standard. Retenons en conclusion, qu'il y a plusieurs façons d'envisager une théorie formelle de l'identité : d'abord, en logique du premier ordre (en tant que notion primitive et irréductible, introduite de manière axiomatique comme chez Frege ou chez Wang) et ensuite, en logique du second ordre (en tant que système de lois dérivées des relations plus complexes telles, par exemple, les principes de Leibniz définis à la manière de Russell). Enfin, on ne doit pas oublier que cette multitude de possibilités de présentation de l'identité fait place à une certaine ambiguïté et à quelques doutes quant à la solidité de cette théorie. Ces doutes se

[46] Cf. P. Joray, «L'identité est-elle relative ? Remarques sur une illusion logique», p. 3–4.

manifestent notamment au niveau de l'*interprétation* des formules symboliques[47]. Toutefois, c'est cette théorie de l'identité absolue que l'on retrouve dans la plupart des livres de logique contemporaine et qui est généralement acceptée comme correcte.

Bref, la théorie logique de l'identité absolue telle qu'elle est exposée dans la logique standard contemporaine, la logique bivalente, est basée sur les principes de Leibniz, sur la formalisation axiomatique de Frege et sur la définition de Russell. Nous avons montré dans notre étude, en systématisant cette théorie, que l'on peut au moins rendre claires, grâce à la formalisation, les distinctions logiques entre la relation d'identité et d'autres relations remarquables comme l'égalité et l'équivalence. Dès lors la confusion n'est plus possible.

Docteur ès philosophie
Dépt. de Philosophie - Univ. Pierre Mendès France
BP 47-1251 av. Centrale
F-38040 Grenoble Cedex 9
E-mail: ion.vezeanu@upmf-grenoble.fr

BIBLIOGRAPHIE

BOCHENSKI Marie-Joseph, *A Precise of Mathematical Logic*, Dordrecht-Holland, D. Reidel, 1959 ; tr. du français et de l'allemand par Otto Bird, *Précis de logique mathématique*, 1954.

CHURCH Alonzo, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, Princeton University Press, 1956.

COUTURAT Louis, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris, 1961 (1903 ; 1901).

FICHANT Michel, «Les axiomes de l'identité et la démonstration des formules arithmétiques : $2 + 2 = 4$», *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 48, n°188, 1994, p. 175–221.

FREGE Gottlob, *Begriffsschrift* (1879), tr. fr. par Corine Besson, *Idéographie*, Paris, Vrin, 1999.

FREGE Gottlob, *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, Max und Hermann Marcus, 1884 ; tr. fr. Cl. Imbert, *Les Fondements de l'arithmétique*, Paris, Seuil, 1969.

[47] Il s'agit d'un ample débat philosophique autour des principes leibniziens, mais également d'une confrontation entre les absolutistes et les relativistes que nous n'avons pas pu exposer ici.

FREGE Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), Hildesheim, Olms, 1966 (1962).

FREGE Gottlob, *Écrits logiques et philosophiques*, tr. fr. par Cl. Imbert, Paris, Seuil, Collection «Essais», 1994 (1971).

GARDIES Jean-Louis, «La définition de l'identité d'Aristote à Zermelo», *Theoria*, Segundo Epoca, Año IV, n°10, San Sebastian, 1988–1989, p. 55–79.

GEACH Peter T., *Logic Matters*, Basil Blackwell, Oxford, 1972.

GÖDEL Kurt, «La complétude des axiomes du calcul fonctionnel» *in* J. Largeault, *Logique mathématique. Textes*, Armand Colin, Paris, 1972, p. 175–185.

GRIFFIN Nicholas, *Relative Identity*, Oxford, Oxford University Press (Clarendon Press), 1977.

HILBERT David, «Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique» (1904) ; tr. fr. par H. Sinaceur *in* François Rivenc et Philippe de Rouilhan (sous la dir. de), *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850–1914)*, Paris, Payot, 1992, p. 245–270.

HODGES Wilfred, *Logic. An Introduction to Elementary Logic*, Penguins Books, Harmondsworth, 1985 (1977).

HOWSON Colin, *Logic with Trees. An Introduction to Symbolic Logic*, Routledge, 1997.

JEFFREY Richard, *Formal Logic : Its Scope and Limits*, McGrow-Hill Company, 1981.

JORAY Pierre, «L'identité est-elle relative ? Remarques sur une illusion logique», *Revue de Théologie et de philosophie*, n°134, 2002, p. 1–14.

KLEENE Stephen C., *Mathematical Logic*, New York, John Wiley & Sons, 1967 ; tr. fr. par Jean Largeault, *Logique Mathématique*, Paris, Editions Jacques Gabay, 1987 (Armand Colin, 1971).

LARGEAULT Jean, *Logique mathématique. Textes*, Paris, Armand Colin, 1972.

LEIBNIZ Gottfried, «Quatrième écrit de Leibniz», (lettre de 2 juin 1716), *Correspondance Leibniz-Clarke*, présenté par André Robinet, Paris, P.U.F, 1957.

LIGHTSTONE A.-H., *Mathematical Logic : an Introduction to Model Theory*, Plenum Press, New York, 1978.

LONGEART-ROTH Maryvonne, «L'identité est-elle relative ?», *Dialogue*, n°20, 1981, p. 697–713.

PEANO Giuseppe, *Formulario matematico*, Roma, Edizioni Cremonese, 1960 ; l'ouvrage est paru d'abord en version française sous le titre *Formulaire de mathématiques*, Turin, Bocca frères, Cl. Clausen, 1894–1908.

POPELARD Marie-Dominique et VERNANT Denis, *Eléments de logique*, Paris, Seuil, 1998.

QUINE Willard Van Orman, *Methods of Logics*, by Holt, Rinehart and Winston, 1972 (1950) ; tr. fr. par Maurice Clavelin, *Méthodes de Logique*, Paris, Armand Colin, 1984 (1973).

QUINE Willard Van Orman, *Set Theory and its Logic*, Cambridge, Belknap Press of Harvard University Press, 1963.

QUINE Willard Van Orman, *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, 1970 ; tr. fr. J. Largeault, *La Philosophie de la logique*, Paris, Aubier-Montaigne, 1975.

RUSSELL Bertrand Arthur William, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, (1910–1913) ; tr. partielle par le Roy *in* B. Russell, *Écrits de logique philosophique*, Paris, P.U.F, 1989, p. 192–201 et p. 270–309 ; (Cf. aussi *Principia Mathematica*, (seconde édition), Cambridge University Press, vol. 1, 1925–1927).

RUSSELL Bertrand Arthur William, «Mathematics and Metaphysicians» (1901), in *Mysticism and Logic*, London, Longmans, Green and Co., 1925, p. 74–93.

RUSSELL Bertrand Arthur William, «On Denoting», *Mind*, vol. 14, Londres, 1905, p. 479–493 ; tr. fr. par le Roy, «De la dénotation» *in* B. Russell, *Écrits de logique philosophique*, Paris, P.U.F, 1989, 201–218.

TARSKI Alfred, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Lwow et Varsovie, 1936 ; c'est la version anglaise de ce livre qui fait référence aujourd'hui en tant que source pour d'autres traductions : *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductives Sciences*, New York, 1946 (1941) ; tr. fr. par Jacques Tramblay, *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

VERNANT Denis, *Introduction à la logique standard*, Paris, Flammarion, 2001.