Logique & Analyse **189–192** (2005), 301–310

LOGISCH ZWINGENDE TEILPRINZIPIEN VON ZFC

PETER SCHUSTER

Zusammenfassung
We unfold and discuss the well–known argument that the axiom of choice implies the law of excluded middle, and distill a weak form of the axiom of choice that is equivalent to the decidability of all bounded formulas. The same is done with the foundation axiom and the linearity of ordinals in place of the axiom of choice. As consequences of the law of excluded middle, these weak forms of principles of classical Zermelo–Fraenkel set theory (ZFC) are thus already enforced by the choice of the underlying logic. To make all this visible, we work in a fragment of Aczel's constructive Zermelo–Fraenkel set theory (CZF), which none of the principles under consideration is part of.

Wendet man die Brouwer-Heyting-Kolmogorow-Interpretation der intuitionistischen Logik auf das für die klassische Logik charakteristische Prinzip des *tertium non datur* an, so besagt es, daß jede Formel φ entscheidbar ist, man also entweder einen Beweis von φ oder einen ihrer Negation $\neg\varphi$ angeben kann. Im folgenden wird sich die Entscheidbarkeit aller sogenannten Δ_0-Formeln als äquivalent zu geeigneten Abschwächungen von drei Prinzipien der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlprinzip (ZFC)[1] herausstellen: des Auswahlaxioms, des Fundierungsaxioms und der Trichotomie der Ordinalzahlen. Die Gültigkeit dieser Abschwächungen wird also bereits durch die Wahl der zugrundeliegenden Logik erzwungen.

Im Geiste der "informal constructive reverse mathematics" nach Ishihara [11] präzisieren wir somit die bekannten Aussagen, daß die Entscheidbarkeit aller Δ_0-Formeln aus jedem der drei oben genannten mengentheoretischen Prinzipien folgt. Letzteres wurde im Rahmen des elementaren Fragments CZF_0 der von Aczel in [1] begründeten "constructive Zermelo-Fraenkel set theory" (CZF) gezeigt [2], welche auf der intuitionistischen Prädikatenlogik

[1] Für eine neuere deutschsprachige Darstellung von ZFC sei auf Deisers Monographie [8] verwiesen.

erster Stufe mit Gleichheit beruht. Da CZF keines der bisher erwähnten Prinzipien von ZFC beinhaltet, ist es auch als Grundlage der hier angestellten Betrachtungen geeignet.

Das einzige nichtlogische Zeichen von CZF ist das Symbol $\in$ für die Elementrelation. Wie üblich definiert man die Teilmengenrelation $\subseteq$ durch

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z \in x \ (z \in y) \ .$$

und verlangt, daß $=$ extensional ist, daß also

$$x = y \ \Leftrightarrow \ x \subseteq y \wedge y \subseteq x \tag{1}$$

gilt. Abbildungen werden in CZF als Graphen definiert; insbesondere gilt

$$x = y \ \Rightarrow \ f(x) = f(y) \tag{2}$$

für alle Argumente x, y einer Abbildung f.

Neben dem Paarmengen-, dem Vereinigungsmengen- und dem Ersetzungsaxiom werden in CZF_0 noch eine Verstärkung des Unendlichkeitsaxioms, welche die Existenz einer kleinsten induktiven Menge fordert, und das Axiomenschema der Δ_0-*Aussonderung* angenommen. Durch letzteres sind diejenigen Formeln zur Aussonderung zugelassen, in welchen jede gebundene Variable x nur als $\exists x \in u$ oder $\forall x \in v$ vorkommt, wobei u und v Mengen sind; man nennt Formeln dieser Art Δ_0-*Formeln*.[2] Ist also w eine Menge und φ eine Δ_0-Formel, so ist $\{x \in w : \varphi\}$ eine Menge.

Bekanntlich können die natürlichen Zahlen induktiv eingeführt werden, indem man

$$0 = \emptyset \quad \text{und} \quad n + 1 = n \cup \{n\}$$

setzt, also jede natürliche Zahl n mit der Menge $\{0, \ldots, n-1\}$ identifiziert; damit ist

$$0 = \emptyset\,, \quad 1 = \{0\} \quad \text{und} \quad 2 = \{0, 1\}\,.$$

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, und für $k, \ell \in \omega$ gilt

$$k < \ell \Leftrightarrow k \in \ell\,. \tag{3}$$

[2] In [2] werden auch die Bezeichnungen “bounded formula” und “restricted formula” verwendet.

Eine Aussage der Form $\forall n \in \omega\ \varphi$ kann man dann durch Induktion beweisen, wenn φ eine Δ_0-Formel ist. In diesem Fall ist nämlich $\Phi = \{n \in \omega : \varphi\}$ eine Menge, sodaß man mit Hilfe des (starken) Unendlichkeitsaxioms $\Phi = \omega$ erhält, sofern Φ induktiv ist. Da im folgenden Aussagen allgemeinerer Art durch Induktion gezeigt werden sollen, sei zusätzlich zu den oben aufgezählten Axiomen von CZF_0 noch das Induktionsprinzip für beliebige Formeln vorausgesetzt, das auch aus dem zu CZF gehörenden Axiom der Mengeninduktion folgt [2].

Eine Menge X heiße n-*aufzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung von n auf X gibt, und *endlich aufzählbar*, wenn sie n-aufzählbar ist für ein $n \in \omega$. Im letzteren Fall ist die natürliche Zahl n nicht eindeutig durch die Menge X bestimmt — es sei denn, daß X leer, also n-aufzählbar lediglich für $n = 0$ ist.

Eine Menge ist *bewohnt*, wenn sie mindestens ein Element hat. Jede der im folgenden mit X bezeichneten Mengen habe ausschließlich bewohnte Elemente. Das *Auswahlprinzip* für eine derartige Menge X besagt, daß es eine *Auswahlfunktion* zu X gibt, also eine Abbildung $f : X \to \bigcup X$ mit $f(x) \in x$ für alle $x \in X$. Ist X leer oder einelementig, so gibt es trivialerweise eine Auswahlfunktion zu X.

Ist X endlich aufzählbar, also $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ für ein $n \in \omega$, ohne daß $x_i = x_j$ nur für $i = j$ der Fall sein muß, so könnte man versuchen, eine Auswahlfunktion f zu X definieren, indem man für jedes i ein beliebiges $\xi_i \in x_i$ wählt und $f(x_i) = \xi_i$ setzt. Ist $x_i = x_j$ entscheidbar für alle i und j, so kann man erreichen, daß $x_i = x_j$ nur für $i = j$ der Fall ist. Insbesondere ist (2) dann automatisch erfüllt; man hat also in der Tat eine Auswahlfunktion zu X konstruiert.

Diese Aufgabe kann jedoch bereits dann erledigt werden, wenn $x_i = x_j$ nur für $i < j$ entscheidbar ist. Ist nämlich z eine bewohnte Menge derart, daß $z \in X$ entscheidbar ist, so kann man jede Auswahlfunktion zu X zu einer Auswahlfunktion zu $X \cup \{z\}$ fortsetzen, indem man z auf irgendein $\zeta \in Z$ abbildet, falls $z \notin X$ ist. Durch Induktion kann man so eine Auswahlfunktion zu jeder endlich aufzählbaren Menge X gewinnen.

Das soeben skizzierte, wohlbekannte Argument läßt sich wie folgt auch auf einem niedrigeren Typenniveau ausführen.

Lemma 1: *Es sei z eine Menge und $\zeta \in z$ derart, daß $\zeta \in x$ entscheidbar ist für jedes $x \in X$. Gibt es eine Auswahlfunktion zu X, so gibt es eine Auswahlfunktion zu $X \cup \{z\}$.*

Beweis. Aus einer Auswahlfunktion f zu X gewinnt man eine Auswahlfunktion F zu $X \cup \{z\}$, indem man

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad \zeta \notin x \\ \zeta & \text{falls} \quad \zeta \in x \end{cases}$$

setzt für $x \in X \cup \{z\}$ oder F als Graphen durch

$$F = \bigcup_{x \in X \cup \{z\}} \left(\{(x, f(x)) : \zeta \notin x\} \cup \{(x, \zeta) : \zeta \in x\} \right) \tag{4}$$

definiert. Dieses F ist wohldefiniert, da $\zeta \in z$ trivialerweise entscheidbar ist, und da für $x \in X \cup \{z\}$ aus $\zeta \notin x$ folgt, daß $x \neq z$, also $x \in X$ ist. □

Lemma 2: *Es sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Gibt es zu jedem $k \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\xi_k \in x_k$ derart, daß $\xi_j \in x_i$ entscheidbar ist für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j$, so gibt es eine Auswahlfunktion zu X.*

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 1 führe man Induktion nach n. □

Das *endliche* bzw. *binäre Auswahlprinzip* sei dasjenige für endlich aufzählbare bzw. 2-aufzählbare Mengen X. Aus Lemma 2 folgt:

Proposition 3: *Das endliche Auswahlprinzip gilt für diejenigen X, für welche $\xi \in x$ entscheidbar ist für alle $\xi \in \bigcup X$ und $x \in X$.*

Eine Menge z ist *transitiv*, wenn jedes Element von z auch Teilmenge von z ist.

Lemma 4: *Es sei $Z \subseteq \omega$ und Z transitiv. Ist Z bewohnt, so ist $0 \in Z$.*

Beweis. Man wähle $n \in Z$. Wegen $Z \subseteq \omega$ ist $n \in \omega$, also entweder $n = 0$ und damit $0 \in Z$, oder $0 \in n$, also auch $0 \in Z$, da ja Z transitiv ist. □

Das *Fundierungsprinzip* für eine Menge Y besagt: Ist Y bewohnt, so gibt es ein $y \in Y$ mit $y \cap Y = \emptyset$, also mit $x \notin Y$ für alle $x \in y$ und mit $x \notin y$ für alle $x \in Y$. Es gilt trivialerweise für $Y = \emptyset$, sowie mit $y = \emptyset$ für alle Y mit $\emptyset \in Y$. Das Fundierungsprinzip gilt somit nicht nur für alle $Y \subseteq 1$, sondern auch für alle transitiven $Y \subseteq \omega$, da $0 \in Y$ ist für jedes bewohnte Y dieser Art (Lemma 4).

Wegen (3) ist das Fundierungsprinzip für jedes bewohnte $Y \subseteq \omega$ dazu äquivalent, daß Y ein kleinstes Element hat.

Lemma 5: *Es sei $Y \subseteq \omega$. Gibt es ein $\ell \in Y$ derart, daß $k \in Y$ entscheidbar ist für alle $k \in \ell$, so hat Y ein kleinstes Element.*

Beweis. Man untersuche nacheinander, ob $0 \in Y, 1 \in Y, \ldots$ oder $\ell - 1 \in Y$ gilt. □

Eine *abtrennbare* Teilmenge T einer Menge S ist eine solche, für die $x \in T$ entscheidbar ist für alle $x \in S$. Mit Lemma 5 ergibt sich:

Proposition 6: *Das Fundierungsprinzip gilt für alle abtrennbaren Teilmengen Y von ω.*

Eine *Ordinalzahl* ist eine transitive Menge, deren Elemente wieder transitiv sind. Bekanntlich sind ω und alle $n \in \omega$ Ordinalzahlen; insbesondere gilt

$$u \subseteq n \Rightarrow u \subseteq \omega \,. \tag{5}$$

Alle transitiven Teilmengen einer Ordinalzahl sind Ordinalzahlen; insbesondere ist jede transitive Menge Z mit $Z \subseteq \omega$ eine Ordinalzahl.

Die *Trichotomie der Ordinalzahlen* besagt, daß für je zwei Ordinalzahlen x und y einer der drei Fälle $x \in y$, $x = y$ und $x \ni y$ eintritt; diese Trichotomie gilt etwa für $x, y \in \omega$. Unter dem *Prüfprinzip* für eine Menge Z wollen wir verstehen, daß Z, falls es transitiv ist, entweder bewohnt oder leer ist. Das Prüfprinzip für alle $Z \subseteq \omega$ folgt aus der Trichotomie der Ordinalzahlen, da die letztere der Alternativen $0 \in Z$, $Z = 0$ und $Z \in 0$ unmöglich ist.

Nach Lemma 4 ist das Prüfprinzip für jedes transitive $Z \subseteq \omega$ dazu äquivalent, daß $0 \in Z$ entscheidbar ist. Es folgt:

Proposition 7: *Das Prüfprinzip gilt für alle abtrennbaren Teilmengen Z von ω.*

Ist Z eine beliebige Teilmenge von $1 = \{0\}$, so ist $0 = \emptyset$ das einzig mögliche Element von Z, also Z transitiv. Das Prüfprinzip für alle $Z \subseteq 1$ bedeutet also, daß jede Teilmenge von 1 entweder gleich $\emptyset$ oder gleich 1 ist.

Es sei Γ eine Klasse von Formeln, den Γ-*Formeln*. Das *primitive Aussonderungsprinzip* für Γ besage, daß für jede Menge e und jede Γ-Formel φ die Teilmenge

$$\{e : \varphi\} = \{x \in \{e\} : \varphi\}$$

der einelementigen Menge $\{e\}$ wiederum eine Menge ist. Neben

$$\varphi \Leftrightarrow e \in \{e : \varphi\} \tag{6}$$

gilt dann $\{e : \varphi\} = \{e\}$ bzw. $\{e : \varphi\} = \emptyset$, falls φ bzw. $\neg\varphi$ beweisbar ist. In CZF_0 gilt natürlich das primitive Aussonderungsprinzip für alle $\Gamma \subseteq \Delta_0$.

Am bekannten topos- bzw. mengentheoretischen Argument aus [9] und [10][3] wurde in [2] gesehen, daß das Auswahlaxiom die Entscheidbarkeit aller Δ_0-Formeln nach sich zieht. Analoge Feststellungen wurden dort für das Fundierungsaxiom und die Trichotomie der Ordinalzahlen gemacht. Durch Inspektion der Beweise von [2] läßt sich dies wie folgt verallgemeinern, wobei auch im Fall $\Gamma \subseteq \Delta_0$ das Axiomenschema der Δ_0-Aussonderung nur in der schwächeren Form des primitiven Aussonderungsprinzips für Γ auftritt.

Theorem 8: *Es gelte das primitive Aussonderungsprinzip für* Γ. *Die Entscheidbarkeit aller* Γ*-Formeln ergibt sich aus jeder einzelnen der folgenden drei Aussagen: aus*

(a) dem binären Auswahlprinzip,
(b) dem Fundierungsprinzip für alle $Y \subseteq 2$,
(c) dem Prüfprinzip für alle $Z \subseteq 1$.

Beweis. Es sei eine Γ-Formel φ gegeben. Für (a) wähle man Mengen a_0 und b_0 mit $a_0 \neq b_0$, etwa $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$. Setzt man

$$A = \{a_0\} \cup \{b_0 : \varphi\} \text{ und } B = \{a_0 : \varphi\} \cup \{b_0\}\,, \tag{7}$$

so sind A und B Mengen gemäß dem primitiven Aussonderungsprinzip für Γ, und es gilt $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, sowie

$$b_0 \in A \Leftrightarrow \varphi \quad \text{und} \quad a_0 \in B \Leftrightarrow \varphi\,.$$

Mit (1) folgt

$$A = B \Leftrightarrow \varphi\ . \tag{8}$$

[3] Dies wurde wohl schon von Bishop [5] vorweggenommen (S. 58, Problem 2); siehe auch [6], S. 62. In [4, 15], [7, 12, 13] und [3] werden ähnliche Untersuchungen in intuitionistischer Logik mit Gleichheit, in Martin-Löfscher Typentheorie bzw. in der Topostheorie angestellt. Des weiteren sei auf [14] verwiesen.

Nun ist $\{A, B\}$ eine 2-aufzählbare Menge. Nach dem binären Auswahlprinzip gibt es eine Auswahlfunktion f zu $\{A, B\}$. Setzt man

$$a = f(A) \quad \text{und} \quad b = f(B) \ ,$$

so ist $a \in A$ und $b \in B$, und es gilt

$$a = b \Leftrightarrow \varphi \, . \tag{9}$$

Gemäß (8) folgt nämlich aus φ, daß $A = B$ ist, woraus $a = b$ folgt nach (2); ist andererseits $a = b$, also $\{a, b\} = \{c\}$ und damit $c \in A \cap B$ für ein $c \in \{a_0, b_0\}$, so ist $c = a_0$ oder $c = b_0$, also $a_0 \in B$ oder $b_0 \in A$, weshalb dann φ gilt. Mit (9) trifft schließlich φ oder $\neg\varphi$ zu je nachdem, ob $a = b$ oder $a \neq b$ ist; wegen $a, b \in \{a_0, b_0\}$ und $a_0 \neq b_0$ kann man sagen, welcher der beiden Fälle eintritt.

Für (b) setze man

$$Y = \{0 : \varphi\} \cup \{1\} \, ;$$

dies ist eine Menge gemäß dem primitiven Aussonderungsprinzip für Γ. Neben $1 \in Y$ und $Y \subseteq 2$ gilt

$$0 \in Y \Leftrightarrow \varphi \, .$$

Nach dem Fundierungsprinzip für dieses $Y \subseteq 2$ hat Y ein kleinstes Element k. Wegen $k \in Y$ ist entweder $k = 0$ und φ gilt, oder $k = 1$. Wegen $\ell \notin Y$ für alle $\ell < k$ muß im letzteren Fall $0 \notin Y$ sein, also $\neg\varphi$ gelten.

Für (c) setze man

$$Z = \{0 : \varphi\} \, ;$$

dies ist eine Menge gemäß dem primitiven Aussonderungsprinzip für Γ, und als Teilmenge von 1 ist sie automatisch transitiv. Nach dem Prüfprinzip für dieses $Z \subseteq 1$ ist $0 \in Z$ oder $Z = \emptyset$, weshalb φ oder $\neg\varphi$ gilt. □

Im Verlauf von Teil (a) des Beweises von Theorem 8 wird jede Γ-Formel φ in zwei Schritten umgewandelt, und zwar

(1) mit Hilfe des primitiven Aussonderungsprinzip für Γ in die Form $A = B$ für geeignete Mengen A und B und
(2) mit Hilfe des binären Auswahlprinzips für $\{A, B\}$ in die Form $a = b$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

Versieht man das binäre Auswahlprinzip für $\{A, B\}$ mit einer der Zusatzvoraussetzungen

— A und B sind Teilmengen von 2,

— $x = y$ ist entscheidbar für alle $x, y \in A \cup B$,
— $x = y$ ist entscheidbar für alle $x \in A$ und $y \in B$,

so erhält man ein äquivalentes Prinzip, weil es noch für Teil (a) des Beweises von Theorem 8 genügt.

Aus den Propositionen 3, 6 und 7, sowie aus Theorem 8 folgt:

Corollar 9: *Die Entscheidbarkeit aller Δ_0-Formeln ist zu jeder einzelnen der folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(A) zum endlichen Auswahlprinzip,
(B) zum Fundierungsprinzip für alle $Y \subseteq \omega$,
(C) zum Prüfprinzip für alle $Z \subseteq \omega$.

Unter einer $\in$-*Formel* verstehe man eine Formel der Gestalt $x \in y$; jede $\in$-Formel ist eine Δ_0-Formel. Vor Theorem 8 wurde vom Axiomenschema der Δ_0-Aussonderung lediglich das primitive Aussonderungsprinzip für $\in$-Formeln verwendet, und zwar bei (4). Setzt man nur dieses Teilprinzip voraus, so bleibt Corollar 9 gültig, wenn man dort die Entscheidbarkeit aller $\in$-Formeln an die Stelle derjenigen aller Δ_0-Formeln treten läßt. Allerdings folgt wie bei (6) aus dem vollen Axiomenschema der Δ_0-Aussonderung, daß die Δ_0-Formeln bis auf Äquivalenz genau die $\in$-Formeln sind.

Wegen (5) sind die in (a), (b) und (c) formulierten Aussagen Spezialfälle der in (A), (B) bzw. (C) genannten Prinzipien. Da jede der ersteren Aussagen bereits die Entscheidbarkeit aller Δ_0-Formeln (Theorem 8) und damit alle der letzteren Prinzipien nach sich zieht (Corollar 9), ist jeder der Spezialfälle zur Entscheidbarkeit aller Δ_0-Formeln und damit zum allgemeinen Fall äquivalent.

Für das Fundierungs- und das Prüfprinzip kann man diesen Umstand wie folgt auch direkt einsehen, ohne Bezug auf die Entscheidbarkeit aller Δ_0-Formeln zu nehmen. Im Fall des Prüfprinzips sei Z eine transitive Menge mit $Z \subseteq \omega$; dann ist auch $Z_0 = Z \cap 1$ transitiv mit $Z_0 \subseteq 1$. Nach dem Prüfprinzip für alle Teilmengen von 1 ist entweder $0 \in Z_0$ oder $Z_0 = \emptyset$, also Z bewohnt oder leer gemäß Lemma 4.

Was das Fundierungsprinzip angeht, so sei Y eine bewohnte Menge mit $Y \subseteq \omega$. Man wähle ein $n \in Y$ und setze

$$Y_0 = \{0 : \exists m \in Y \ (m < n)\} \cup \{1\} .$$

Dieses $Y_0 \subseteq 2$ ist bewohnt, hat also nach dem Fundierungsprinzip für alle Teilmengen von 2 ein kleinstes Element k. Ist $k = 1$, so ist n das kleinste Element von Y; ist $k = 0$, so gibt es ein $m \in Y$ mit $m < n$, und man wiederhole das Verfahren mit m anstelle von n, bis man ein kleinstes Element von Y gefunden hat.

DANKSAGUNG

Geoffrey Ostrin and Vincenzo Salipante haben zunächst die Frage gestellt, ob man eine schwache Form des Auswahlprinzips finden kann, die zu einem Fragment des *tertium non datur* äquivalent ist. Weitere Hinweise gaben Bernhard Banaschewski, John L. Bell, Laura Crosilla, Wilfried Buchholz, Iris Loeb, Jesper Carlström und Helmut Schwichtenberg, aber vor allem Klaus Thiel. Schließlich hat Albert Ziegler einige Klarstellungen angeregt.

Mathematisches Institut,
Universität München,
Theresienstraße 39,
D–80333 München
E-mail: Peter.Schuster@mathematik.uni-muenchen.de

LITERATUR

[1] ACZEL, P., The type theoretic interpretation of constructive set theory. In: A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris, eds., *Logic Colloquium ’77*. North-Holland, Amsterdam (1978), 55–66.

[2] ACZEL, P. und M. RATHJEN, *Notes on Constructive Set Theory.* Institut Mittag-Leffler Preprint 40 (2000/01).

[3] BANASCHEWSKI, B., Excluded middle versus choice in a topos. Manuskript, McMaster University (2004).

[4] BELL, J.L., Choice principles in intuitionistic set theory. Typoskript, University of Western Ontario (2004).

[5] BISHOP, E., *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, New York (1967).

[6] BISHOP, E. und D. BRIDGES, *Constructive Analysis.* Grundlehren Math. Wiss. 279, Springer, Berlin und Heidelberg (1985).

[7] CARLSTRÖM, J., $\mathrm{EM} + \mathrm{Ext}_{-} + \mathrm{AC}_{\mathrm{int}}$ is equivalent to $\mathrm{AC}_{\mathrm{ext}}$. *MLQ Math. Log. Q.* 50 (2004), 236–240.

[8] DEISER, O., *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.* 2., verb. u. erw. Aufl., Springer, Berlin und Heidelberg (2004).

[9] DIACONESCU, R., Axiom of choice and complementation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1975), 176–178.

[10] GOODMAN, N.D. und J. MYHILL, Choice implies excluded middle. *Z. Math. Log. Grundlagen Math.* 23 (1978), 461.

[11] ISHIHARA, H., Informal constructive reverse mathematics. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* 1381 (2004), 108–117.

[12] MAIETTI, M.E., About effective quotients in constructive type theory. In: T. Altenkirch, W. Naraschewski, B. Reus, Hrsg., *Types '98. Types for Proofs and Programs.* Proc. 1998 Irsee Conf. *Lecture Notes in Computer Science* 1657, Springer, Berlin and Heidelberg (1999), 164–178.
[13] MAIETTI, M.E. und S. VALENTINI, Can you add power-sets to Martin-Löf intuitionistic set theory? *MLQ Math. Log. Q.* 45 (1999), 521–532.
[14] SCHUSTER, P., Countable choice as a questionable uniformity principle. *Philos. Math.* 12 (2004), 106–134.
[15] SCHWICHTENBERG, H., Logic and the axiom of choice. In: M. Boffa, D. van Dalen, K. McAloon, Hrsg., *Logic Colloquium '78*. North–Holland, Amsterdam (1979), 351–356.