Logique & Analyse **189–192** (2005), 169–188

LA THÉORIE CONSTRUCTIVE DE LA RÉFÉRENCE TYPES Σ ET DESCRIPTIONS DÉFINIES

MICHEL BOURDEAU

L'usage aujourd'hui fort répandu et presqu'innocent de l'expression *théorie de la référence* témoigne de l'influence durable de Quine sur la philosophie contemporaine. Non que la chose ait été ignorée avant lui, bien sûr ; mais la terminologie restait flottante et par exemple le mot *référence* ne figure pas dans l'index de *Meaning and Necessity*, qui date pourtant de 1947. Russell, comme on sait, parlait de dénotation, et Carnap avait proposé de traduire par *nominatum* la *Bedeutung* frégéenne[1]. C'est Quine qui a imposé l'usage actuel (qui n'a jamais été remis en cause). Dans *From a Logical Point of View*, il proposait de distinguer une théorie du sens[2] et une théorie de la référence, formant respectivement la partie malade et la partie saine de la sémantique, et allait même jusqu'à soutenir que, n'ayant rien en commun, elles ne méritaient même pas d'être considérées comme deux branches d'une même discipline[3]. L'usage s'est conservé, alors pourtant que nous ne partageons plus l'attachement à la thèse de l'extensionalité que ce choix terminologique avait pour fonction d'exprimer.

Depuis lors en effet, la théorie a bien évolué, grâce notamment à Kripke. S'appuyant sur la sémantique qu'il avait donnée pour la logique modale, celui-ci rejetait la théorie descriptive des noms propres et proposait d'en faire à la place des désignateurs rigides, c'est-à-dire des termes qui gardent la même référence dans tous les mondes possibles. On était ainsi amené à distinguer deux sortes de référence : celle qui lie directement le mot à la chose, sans intermédiaire, comme le nom propre ou le démonstratif, et la référence indirecte, telle qu'elle a lieu par exemple dans la description définie. L'expression "référence directe" est, semble-t-il, due à Kaplan dont les travaux sur les indexicaux rejoignaient sur ce point ceux de Kripke, et qui proposait

[1] R. Carnap : *Meaning and Necessity*, Chicago, Chicago U.P., 1956, p. 118.

[2] Ou de la signification. Sauf dans des cas particuliers, il semble difficile de distinguer clairement entre les deux notions. *Meaning*, par exemple, admet à peu près également les deux traductions.

[3] W.V.O. Quine : *From a Logical Point of View*, New York, Harper, 1963, p. 130–1.

d’y voir des termes qui réfèrent directement, c’est-à-dire sans passer par l’intermédiaire du sens[4]. Mais c’est sans doute Gareth Evans qui nous a le mieux aidés à voir clair dans la situation ainsi surgie. A plusieurs reprises, Kripke faisait appel à des considérations relevant non de la philosophie du langage mais de la philosophie de l’esprit ; en quoi il ne faisait d’ailleurs que suivre l’exemple donné par Russell, qui, en 1905, associait lui aussi étroitement les noms propres à un certain type de connaissance, à savoir la connaissance par familiarité.

Avec la théorie de la référence directe, c’est donc bien en un sens d’un nouveau départ qu’il s’agit. Chez Quine, la théorie de la référence était développée en lien constant avec la logique, et mise au service d’un programme nominaliste : tout comme Russell avait éliminé les descriptions définies, celui qui se plaisait à répéter que le nom n’est qu’un pro-pronom proposait d’éliminer les noms propres, de façon à faire de la variable la seule expression référentielle. Tout cela a maintenant disparu ; sous le couvert de la pragmatique, qui demande la prise en compte du locuteur, la théorie de la référence directe marque le retour en force de la philosophie de l’esprit. Avec la théorie causale de la référence, la distance s’agrandit encore : la logique et la philosophie du langage ont cette fois à peu près complètement disparu de l’horizon et il ne s’agit plus que de spéculer sur la chaîne causale censée relier le mot à la chose.

Le constructivisme

A première vue le constructivisme, sauf à y inclure le constructionalisme adopté un temps par Russell, est resté étranger à ces développements. Non qu’il se soit désintéressé des questions qui touchent au sens ; bien au contraire, si Dummett a pu chercher du côté de Wittgenstein les fondements philosophiques de la logique intuitionniste, c’est qu’il avait bien vu la place centrale qu’y occupait la théorie de la signification (*Meaning-theory*, en tant que distincte de la *theory of meaning*). En revanche, il est sûr qu’il n’y a pas de sémantique au sens que le mot a pris sous l’influence des travaux de Tarski. Certes, s’appuyant sur les interprétations topologiques proposées par le même Tarski, Beth puis Kripke ont présenté des modèles pour la logique intuitionniste ; mais ces résultats sont obtenus par des méthodes étrangères à l’intuitionnisme, dont aucun des trois ne se réclame d’ailleurs. Le lien étroit établi entre vérité et preuve fait que, des deux façons de construire la logique,

[4] B. Dale et C. Wright : *A Companion to the Philosophy of Language*, Oxford, Blackwell, 1997, p. 660.

théorie de la preuve et théorie des modèles, l'intuitionniste choisit spontanément la première. Le choix n'a rien d'étrange si l'on veut bien considérer que la théorie des modèles se donne la théorie des ensembles, alors que l'intuitionnisme est né d'un examen critique contre la création cantorienne. L'intuitionniste, si l'on préfère, n'a jamais pleinement accepté le point de vue extensionnel qui passe pour aller de soi en mathématiques depuis que celles-ci ont adopté la théorie des ensembles comme langue vernaculaire ; il s'en tient à l'approche classique, c'est-à-dire pré-ensembliste, où la fonction, en tant que procédure de calcul, restait distincte de son graphe. A cette première raison s'en ajoute une autre, d'ordre philosophique. La référence, dira-t-on, c'est l'objet ; elle nous fait sortir du langage pour rejoindre la réalité extérieure, qu'elle soit sensible ou intelligible, peu importe. La théorie de la référence aurait partie liée avec le réalisme et serait incompatible avec un idéalisme qui condamne chacun à rester prisonnier des frontières de son moi. Dans un cas comme dans l'autre la conclusion est la même : il n'y aurait pas de place dans le constructivisme pour une théorie de la référence.

Si cette première approche était satisfaisante, il serait inutile d'aller plus loin et le lecteur aura compris qu'en dépit de ce qui précède, il n'y a aucune incompatibilité réelle entre le programme d'une théorie de la référence et le constructivisme. L'idée de sémantique constructive, tout d'abord, nous est devenue familière. Si l'intuitionniste et son adversaire ne parviennent pas à se mettre d'accord, c'est qu'ils ne s'entendent pas sur le sens à donner aux constantes logiques. Heyting a donc explicité la teneur proprement constructive de celles-ci ; il est clair que cette sémantique, connue le plus souvent comme *interprétation BHK* (Brouwer–Heyting–Kolmogorov), n'est pas "modèle-théorétique", et c'est pourquoi elle est encore appelée *proof-theoretical*. Dans le cas de Per Martin-Löf, qui sera le seul à nous retenir désormais, cela a donné lieu à une critique de la sémantique tarskienne, qui se contente de traduire un langage dans un autre. Le processus ne peut être prolongé indéfiniment, et il faut à un moment ou à un autre recourir à une méthode différente, plus proprement philosophique[5].

Ce qui a été dit plus haut de l'attitude de l'intuitionniste devant la théorie des ensembles et la conception extensionnelle des mathématiques qu'elle véhicule fait qu'il n'est pas difficile de retrouver, à l'intérieur de cette sémantique, la distinction frégéenne du sens et de la référence[6]. C'est dans ce

[5] Cf. Per Martin-Löf : "Truth of a Proposition, Evidence of a Judgment, Validity of a Proof", *Synthese* 73 (1987), p. 413–415.

[6] Y. Moschovakis : "Sense and denotation as algorithm and value", in *Logic colloquium '90*, J. Oikkonen and J. Väänänen (eds), Berlin, Springer, 1993, t. 2, p. 210–249. Voir aussi G. Somaruga : *History and Philosophy of Constructive Type Theory*, Dordrecht, Kluwer, 2000, p. 68–9.

cadre que Bernard Jaulin a montré comment les types Σ permettent de revenir sur le débat qui a opposé Russell à Frege et de donner raison à ce dernier lorsqu'il affirmait que les descriptions définies étaient bien des expressions référentielles ; et cela, tout en bloquant l'argument du lance-pierres, utilisé dans ce contexte et dont les conséquences sont, comme on sait, irrecevables pour le constructiviste. Ce sont les idées présentées dans un article récent que nous voudrions exposer ici, car elles nous paraissent mériter d'être mieux connues[7].

Pour l'intelligence de ce qui suit, aucune connaissance préalable de la théorie constructive des types n'est requise. Pour ceux toutefois à qui elle ne serait pas familière, on en rappellera les principes, en commençant par montrer comment le constructivisme a été tout naturellement conduite à se réapproprier la distinction frégéenne du sens et de la référence et à donner ainsi raison sur ce point à Frege contre Russell. Après quoi on introduira les règles pour N ou Nat (i.e. pour un des types primitifs) et pour cela, le début du symbolisme ; et ensuite seulement les types dérivés, en l'occurrence le type Σ. Les autres lecteurs peuvent dans un premier temps sauter sans grand dommage cette section, quitte à y revenir si besoin est par la suite.

Sens et référence dans la sémantique constructive

Les principes

Avant de montrer comment la distinction du sens et de la référence trouve immédiatement à s'appliquer dans la sémantique constructive, il y a lieu de présenter pour elle-même cette approche du sens qui ne doit rien aux méthodes ensemblistes de la théorie des modèles et qui n'en mérite pourtant pas moins d'être considérée elle aussi comme formelle, puisqu'elle repose sur le fait qu'il existe un lien étroit entre sens et calcul. Dans la division du travail qui s'est imposée en logique, la théorie des modèles a comme confisqué à son profit tout ce qui touche à l'idée d'évaluation : on parle de valeur de vérité, de valuation et pour s'assurer qu'une formule est valide, on l'évalue. Si l'on veut bien y réfléchir, cet usage est assez récent, alors qu'il en existe un autre, beaucoup plus ancien et toujours suivi, qui associe évaluer et calculer. La sémantique constructive est une "sémantique calculatoire". On ne s'étonnera pas qu'une telle approche ait intéressé les informaticiens : les

[7] B. Jaulin : "Sur l'article défini", in *Les facettes du dire, hommage à Oswald Ducrot*, préparé par M. Carrel, Paris, Kimé, 2002, p. 129–39.

ordinateurs ne sont jamais que des machines à calculer, et, en programmation fonctionnelle, tout se ramène à évaluer une fonction[8].

Dans ce cadre, la distinction entre intension et extension correspond à un phénomène familier : deux fonctions qui calculent les mêmes valeurs pour les mêmes arguments ne sont pas pour autant identiques. Le fait [allait de soi dans les mathématiques pré ensemblistes ; il] était par exemple bien connu de Frege, qui distinguait la fonction en soi F(x) et son parcours de valeur eF(e). La référence est alors la valeur de la fonction, le résultat de l'évaluation entendue comme effectuation du calcul. Quant au sens, c'est la procédure de calcul : Frege disait "le mode de donation", mais dans le cas des objets mathématiques, on peut tout aussi bien dire le mode de construction, d'engendrement. Quant à l'égalité, comme dans $f(x) = y$, ou dans $5 + 2 = 7$, elle exprime la coréférentialité. L'exigence d'effectivité imposée par la machine a conduit les informaticiens à retrouver l'esprit constructif qui caractérisait les mathématiques classiques et qui n'a été abandonné qu'avec la théorie des ensembles. Ce n'est pas un hasard si Church qui, au beau temps de la thèse de l'extensionalité, a été le seul à défendre la sémantique frégéenne et s'était un moment proposé de fonder les mathématiques non sur le concept d'ensemble mais sur celui de fonction, — ce n'est pas un hasard si Church est aussi un des créateurs de cette théorie de la calculabilité d'où sont sortis les ordinateurs. Ces idées, familières aux informaticiens, le sont peut-être moins chez les philosophes, où l'influence de Russell, de Quine et des autres défenseurs de la thèse d l'extensionnalité reste très marquée. Il s'agit pourtant incontestablement d'une théorie de la référence, comme le montre l'accord en quelque sorte spontanée avec l'auteur de *Über Sinn und Bedeutung*[9].

Un exemple : le type Nat dans la théorie constructive des types

Rappelons tout d'abord brièvement les principes de la théorie constructive des types[10]. Au point de départ se trouve la distinction entre proposition, A, et son assertion, qu'on notera $\vdash A$ et qu'on appellera encore *jugement*.

[8] Cf. J.-Y. Girard et J. Lafon : *Proofs and Types*, Cambridge, Cambridge UP, 1989, p. 1–7.

[9] Il ne s'agit bien sûr pas de nier les immenses services rendus par la sémantique classique. Toutefois, devant la prégnance du paradigme tarskien, il n'est pas inutile de rappeler que l'association qu'il établit entre évaluer et interpréter n'est nullement nécessaire. La valeur d'une fonction pour un argument donné s'obtient non par un travail d'interprétation, mais par un calcul.

[10] Pour l'appareil formel on pourra se reporter à P. Martin-Löf : *Intuitionistic Type Theory*, Naples, Bibliopolis, 1984 (cité par la suite : 1984), ainsi qu'à A. Ranta : *Type Theoretical Grammar*, Oxford, Oxford U.P., 1994 (cité par la suite : Ranta) ; et pour la justification philosophique, à P. Martin-Löf : "Truth and Knowability : on the principles C and K of Michael Dummett", in *Truth and Mathematics*, H.G. Dales et G. Oliveri (eds), Oxford, Clarendon

Dans : A. *Donc* B, il y a deux jugements catégoriques (la grammaire disait : deux propositions indépendantes) : A est asserté et B est asserté. En revanche, dans : *Si* A *alors* B, A et B sont des propositions. Ni A ni B ne sont assertés ; il n'y a qu'un seul jugement, hypothétique, qui pose que les deux propositions sont conditionnellement liées. Avant de devenir un symbole métathéorique, le *turnstyle* était chez Frege un *Urteilsstrich*, un indicateur de force assertorique qui posait A comme vrai ; c'est pourquoi Per Martin-Löf remplace $\vdash A$ par A *vrai*. Mais pour un intuitionniste, affirmer que A est vrai, c'est affirmer qu'on en possède une preuve, qu'on notera a. En attendant de revenir sur ces objets preuves, il suffira pour l'instant de retenir que : $a : A$ se lit : a est une preuve de A. En vertu de l'isomorphisme de Curry Howard, qui identifie la proposition à l'ensemble de ses preuves, $a : A$ admet une seconde lecture : a est un élément de l'ensemble A ; ou plus simplement : a *est un* A.

Les types de la théorie constructive sont décrits dans le format des règles de la déduction naturelle, i.e. avec des règles d'introduction et des règles d'élimination, auxquelles on ajoutera des règles d'égalité, qui sont des règles de calcul. Règles d'introduction introduisent les éléments canoniques, les constructeurs de l'ensemble. Les règles d'élimination les éléments non canoniques, qui sont des procédures de calcul. les règles d'égalité permettent de ramener les expressions non canoniques, comme 1+1, à leur forme canonique, $s(s(0))$.

Gentzen estimait que les règles d'introduction donnaient le sens des constantes logiques ; de la même façon, les règles d'introduction de N définissent le concept d'entier naturel, c'est-à-dire en donnent le sens[11]. Si l'on veut bien se souvenir par ailleurs que les axiomes sont souvent conçus comme des définitions implicites, on ne s'étonnera pas que les deux règles d'introduction pour N ne soient que deux des axiomes de Peano, réécrits dans un autre format :

$$N : \mathrm{set}^{NF}, \qquad 0 : N^{NI}, \qquad \frac{a : N}{s(a) : N} NI,$$

La règle d'élimination de N n'est pas aussi immédiatement intelligible, et il est bon de commencer par la forme simplifiée qu'elle prend quand on la considère comme règle d'induction :

Press, 1998, p. 105–14, ainsi qu'à G. Sundholm : "Implicit Epistemic Aspects of Constructive Logic", *Journal of Logic, Language and Information* 6 (1997), p. 191–212.

[11] Cf. D. Prawitz : "Truth and objectivity from a verificationist point of view", dans l'ouvrage de Dales et Oliveri cité à la note précédente, p. 42–44.

$$\frac{c : N \qquad C(0)\ \textit{vrai} \qquad \begin{array}{c}(x : N, C(x)\ \textit{vrai})\\ C(s(x))\ \textit{vrai}\end{array}}{C(c)\ \textit{vrai}}$$

L'induction est ici appelée élimination, parce que le N, qui figurait dans la prémisse de gauche ($c : N$), a disparu de la conclusion. Pour le reste, on reconnaît sans peine dans les deux autres prémisses la base d'induction ($C(0)$ *vrai*), et le pas d'induction, avec ses deux étapes : à supposer qu'on ait $C(x)$ *vrai*, alors on a aussi $C(s(x))$ *vrai*. De ces prémisses, on est autorisé à conclure que la propriété C est vraie de n'importe quel nombre : $C(c)$.

Pour obtenir la forme développée, il suffit de réintroduire la preuve objet ; ce qui donne :

$$\frac{c : N \qquad d : C(0) \qquad \begin{array}{c}(x : N, y : C(x))\\ e(x, y) : C(s(x))\end{array}}{R(c, d, (x, y)e(x, y)) : C(c)}\,NE$$

Les difficultés à lire cette règle tiennent à la présence de l'opérateur R dans la conclusion, et subsidiairement à celle de l'expression $e(x, y)$, qui figure dans la troisième prémisse et réapparaît dans R. Dans ce dernier cas, la prémisse nous dit que si $y : C(x)$, alors $e(x, y) : C(s(x))$. Cette preuve, $e(x, y)$ dépend de la preuve y supposée donnée de $C(x)$, et donc également de x. C'est une fonction, e, de deux variables, x et de y. En passant dans la conclusion, l'hypothèse ($x : N$, $y : C(x)$) est déchargée, et les variables sont liées, ce qu'indique le (x, y) qui précède $e(x, y)$. — Quant à R, c'est un opérateur de récursion, bien connu des praticiens du lambda calcul[12]. Tout ce qui est calculable par une fonction récursive est calculable dans le lambda calcul ; R est le lambda terme qui permet de définir toutes les fonction récursives. Soit $R(Z, X, Y)$, où Z et X sont des nombres (ici, c et d) et Y une fonction (ici, $(x, y)e(x, y)$). $R(Z, X, Y)$ est l'opérateur qui renvoie X si $Z = 0$ et qui sinon renvoie Y. Plus précisément, appliqué à 0, $R(Z, X, Y)$ renvoie la valeur X, ce qu'on écrit $R(Z, X, Y) = X$; appliqué à l'argument $s(a)$, $R(Z, X, Y)$ renvoie la fonction Y, appliquée cette fois à a et au résultat de l'application de R diminuée d'un pas (le premier argument de R n'est plus $s(a)$ mais a) : $R(Z, X, Y) = Y(a, R(a, X, Y))$.

[12] Cf. J. Hindley et J. Seldin : *Introduction to Combinators and λ Calculus*, Cambridge, Cambridge UP, 1986, p. 47–60.

Pour expliquer la règle d'élimination de la théorie des types, il reste encore à présenter la distinction entre éléments canoniques et éléments non canoniques. Les premiers sont ceux qui sont introduits par les règles d'introduction (les règles d'introduction sont les règles de formation des éléments canoniques). Ainsi, les éléments canoniques de N sont 0 et ses successeurs, qui s'écrivent $s(s(....(0)...))$. 2^2 ou $3+5$ ne sont pas des éléments canoniques : ils ont été introduits par des fonctions (puissance, ou addition). Mais s'ils sont des nombres, c'est qu'ils sont réductibles à des éléments canoniques : 2^2 par exemple n'est autre que $s(s(s(s(0))))$.[13]

Dire que NE introduit l'opérateur R, c'est dire que la règle nous indique comment définir des fonctions sur N. La signification de la règle, c'est-à-dire le mode de fonctionnement de R, est donnée par deux règles d'égalité (Neq) qui nous disent comment ramener des éléments non canoniques à des éléments canoniques, ou si l'on préfère comment calculer la valeur d'une fonction introduite par NE.

Revenons en effet sur le mode de fonctionnement de R dans NE[14]. On commence par évaluer c, ce qui donne un élément canonique de N, lequel, en vertu de NI, ne peut être que 0 ou $s(a)$, pour $a : N$. A chacun de ces cas correspond une des règles de Neq. Dans NE, posons $c = 0$. On évalue alors d, ce qui donnera un élément canonique qu'on désignera par f ; puisque par hypothèse $d : C(0)$, on a aussi $f : C(0)$. Comme par ailleurs on a par hypothèse $c = 0$, on aura aussi $C(c) = C(0)$. Rassemblant ces deux résultats, on obtient $f : C(c)$, ce qui est bien la conclusion demandée, et justifie la première règle d'égalité :

$$\frac{d : C(0) \qquad \begin{array}{c}(x : N, y : C(x)) \\ e(x,y) : C(s(x))\end{array}}{R(0, d, (x,y)e(x,y)) = d : C(0)}\,Neq, 1$$

La seconde règle d'égalité, plus complexe, correspond à la seconde règle d'introduction, à savoir au cas où c est de la forme $s(a)$ pour un a quelconque. Examinons ce qu'il advient dans ce cas de la règle d'élimination.

[13] Les nombres, 1,2,... sont des abréviations. Par définition, $1 = s(0)$, $2 = s(1)$, ... La seule différence entre les termes qui figurent de part et d'autre de l'égalité, c'est que le membre de gauche est un nom propre, et celui de droite, une description définie, pour le reste, 1, 2, peuvent aussi être considérés comme des éléments canoniques. On doit donc distinguer soigneusement deux sortes d'égalité : entre $1 + 1 = 2$ et $s(s(0)) = 2$, il existe une différence capitale, puisque la première présuppose les règles d'égalité. Inversement les deux descriptions ne sont pas du même ordre : $s(s(0))$ est certes une procédure de formation, mais elle n'est pas à proprement parler une procédure de calcul.

[14] Cf. Per Martin-Löf 1984, p. 71–2.

L'application de R s'effectue alors en deux temps. Tout d'abord on instancie les variables du $(x, y)e(x, y)$ qui figurent dans la conclusion de NE : x est remplacé par a, et y par $R(a, d, (x, y)e(x, y))$, ce qui nous fait descendre d'un cran, comme dans la deuxième équation de récurrence et nous renvoie la fonction e, appliquée cette fois à a et au résultat de l'application de R à a. C'est ce que dit la conclusion de $Neq, 2$:

$$R(s(a), d, (x, y)e(x, y)) = e(a, R(a, d, (x, y)e(x, y))).$$

On évalue alors l'expression qui figure à droite de l'égalité ainsi obtenue :

$$e(a, R(a, d, (x, y)e(x, y));$$

on obtient ainsi un élément canonique, f, qui par le pas de récurrence décrit dans la prémisse de droite, est dans $C(s(a))$ sous l'hypothèse où $R(a, d, (x, y)e(x, y)$ est dans $C(a)$. Deux cas peuvent se présenter. $a = 0$; l'on se trouve alors dans la situation décrite dans la première règle d'égalité et l'évaluation s'arrête. Dans le cas contraire, on réitère la seconde règle, $s(a)$ et a étant cette fois remplacés respectivement par a et par son prédécesseur, jusqu'à ce qu'on atteigne 0. Ce calcul correspond à la seconde règle d'égalité :

$$\frac{d : C(0) \qquad \begin{array}{c}(x : N, y : C(x))\\ e(x, y) : C(s(x))\end{array}}{R(s(a), d, (x, y)e(x, y)) = e(a, R(a, d, (x, y)e(x, y))) : C(s(a))}\,Neq, 2$$

NE met bien en évidence ce lien qui unit induction et récursion puisqu'elle peut aussi bien être vue comme exprimant la preuve d'une proposition par induction ou la définition d'une fonction par récursion. L'addition par exemple sera définie :

$$a + b = R(b, a, (x, y)s(y)) : N \text{ pour } a, b : N.$$

Si $b = 0$, on applique la première règle d'égalité, qui donne pour valeur a ; soit $a + 0 = a$. Dans le cas contraire, b est le successeur d'un nombre donné, c. $a + b$ est donc $a + s(c)$ c'est-à-dire encore $R(s(c), a, (x, y)s(y))$. On applique alors la seconde règle d'égalité, dont la conclusion s'écrit maintenant :

$$R(s(c), a, (x, y)s(y)) = s(R(c, a, (x, y)s(y)) : C(s(c))$$

Pour calculer la valeur du premier membre de cette égalité, on calcule $R(c, a, (x, y)s(y))$, qui n'est autre que $a + c$, et l'on prend son successeur, ce qui correspond bien à la seconde équation de récurrence : $a + s(b) = s(a + b)$.

Les types Σ

Introduction : extension du concept de référence ; référence et objet preuve

Avec le type N, les applications sémantiques restaient fort limitées. Certes, les procédures de calcul offrent une première approche du sens, mais les possibilités offertes par le constructivisme n'apparaissent vraiment qu'avec les types Σ, qu'il faut tout d'abord présenter. A côté d'un type primitif comme N, la théorie des types admet également des types dérivés, obtenus à partir des premiers au moyen de quelques opérations. Comparée à la théorie de Church, qui contient déjà des types fonctionnels correspondants à la lambda abstraction, la théorie de Per Martin-Löf se caractérise par l'introduction de types dépendants, les types Σ et Π, qui lui donnent un pouvoir accru. Pour présenter le type des entiers, il a fallu dire quelques mots de la distinction entre proposition et jugement ; de même, le principe de la proposition comme ensemble nous a permis de considérer a, dans $a : A$, comme un preuve de la proposition A. Pour bien comprendre l'intérêt des types Σ, les seuls dont nous aurons à nous occuper, il convient tout d'abord de voir que le concept d'objet preuve appartient à la théorie de la référence, qu'il nous oblige à considérer sous un jour quelque peu nouveau.

D'ordinaire, on associe étroitement terme singulier (nom propre ou description définie) référence et objet : l'expression référentielle par excellence, c'est le nom, et le nom nomme un objet. Pourtant, même si c'est peut-être dans un autre vocabulaire, la sémantique logique nous a accoutumés depuis longtemps déjà à dissocier ces concepts. On se souviendra par exemple que les positivistes logiques nous invitaient à voir dans le concept d'objet le prototype des pseudo-concepts et que Ryle avait dénoncé, avec son principe "*Fido*" *Fido* l'idée qu'il n'existerait qu'un seul *modus significandi*.[15] Les phrases déclaratives, elles aussi, ont une référence et autour de 1900 les débats faisaient rage pour savoir quel pouvait être ce référent. Frege, comme on sait, y voyait ces deux premiers objets logiques que sont le Vrai et le Faux, et il proposait donc de considérer les phrases comme des noms propres. Russell et bien d'autres, pour échapper à cette conséquence choquante, préféraient parler de fait, ou d'état de choses. Encore que la question se pose de savoir

[15] G. Ryle : "Meaning and Necessity", *Philosophy* 24(1949), p. 69–76. Ryle reprochait aux néo-positivistes, et en particulier à Carnap, de réduire la signification à la dénomination, comme si tous les mots fonctionnaient comme des noms.

s'il est permis de parler dans ce cas de référence, il est clair que la sémantique constructive, en associant une phrase un objet qui la rend vraie, est beaucoup moins éloignée qu'il ne paraît de la logique extensionelle classique. Ce qu'elle a en propre, c'est de donner un nouveau contenu au concept d'objet : le référent de la phrase n'est plus une valeur de vérité choisie dans Vrai, Faux, mais un objet preuve, lequel peut prendre des formes très différentes. Ainsi, comme on va le voir, celui qui correspond au type Σ est une paire, et il faut bien avouer que ceci ne correspond que très approximativement à l'idée que nous nous faisons d'un objet.

Les règles

Le type Σ généralise le produit cartésien $A \times B$ et sert à former l'union disjointe d'une famille d'ensembles, ce qui rend compte de la dépendance fonctionnelle, puisque B dépend d'un élément x de A, ce qui fait qu'on écrit $B(x)$. Les règles correspondantes sont les suivantes :

$$\frac{A : \text{set} \quad \begin{array}{c}(x : A)\\ B(x) : \text{set}\end{array}}{(\Sigma x.A)B(x) : \text{set}}\Sigma^F$$

$$\frac{a : A \quad b : B(a)}{(a,b) : (\Sigma x : A)B(x)}\Sigma^I$$

On voit que les éléments canoniques de l'ensemble sont des paires, (a,b), dont les éléments ne sont pas du même type. Les deux règles d'élimination introduisent des projections, respectivement gauche et droite, ainsi nommées parce qu'elles permettent d'obtenir la valeur de chacun des deux éléments de la paire, appelés encore *coordonnées*.

$$\frac{c : (\Sigma x : A)B(x)}{p(c) : A}\Sigma E \qquad\qquad \frac{c : (\Sigma x : A)B(x)}{q(c) : B(p(c))}\Sigma E$$

Leur correspondent les deux règles d'égalité suivantes :

$$\frac{a : A \quad b : B(a)}{p((a,b)) = a : A}\Sigma eq \qquad\qquad \frac{a : A \quad b : B(a)}{q((a,b)) = b : B(a)}\Sigma eq$$

Les deux règles d'élimination peuvent être remplacées par une seule, plus générale, où l'on retrouve le phénomène de liage déjà rencontré dans *NE*[16].

$$\frac{c : (\Sigma x : A)B(x) \quad \begin{array}{c}(x : A, y : B(x))\\ d(x,y) : C((x,y))\end{array}}{E(c,(x,y)e(x,y)) : C(c)}\Sigma E$$

On commence par calculer c, qui donnera un élément canonique de $(\Sigma x : A)B(x)$, soit une paire (a, b). En instantiant de cette façon les variables dans l'hypothèse de la prémisse de droite, on y obtient comme conclusion : $d(a, b) : C((a, b))$. Calculant $d(a, b)$, on obtient un élément canonique e du même ensemble, dont la conclusion nous demande de montrer qu'il est aussi élément canonique de $C(c)$. Nous avons obtenu (a, b) comme l'élément canonique correspondant à l'élément quelconque c ; on a donc $(a, b) = c : (Sx : A)B(x)$, d'où l'on peut conclure que $C(c) = C((a, b))$, ce qui produit le résultat demandé. Les règles d'égalité sont modifiées en conséquence et sont réduites à une seule :

$$\frac{a : A \quad b : B(a) \quad \begin{array}{c}(x : A, y : B(b))\\ d(x,y) : C((x,y))\end{array}}{E((a,b),(x,y)d(x,y)) = d(a,b) : C((a,b))}\Sigma eq$$

Pour retrouver les règles usuelles, il suffit de poser :

$$p(c) = def E(c,(x,y)x) : A, \quad \text{et} \quad q(c) = def E(c,(x,y)y) : B(p(c)).$$

Dans le premier cas, par exemple, on commence par calculer c, qui donnera un élément canonique de $(\Sigma x : A)B(x)$, soit une paire (a, b). Substituant alors a et b à x et y dans x (en l'absence de y, il n'y a aucune substitution à opérer dans le second cas), on obtient a, qui produit un élément canonique de A. Le raisonnement est analogue pour la seconde projection.

On voit bien que les règles du produit cartésien s'obtiennent en biffant la dépendance fonctionnelle : dans $A \times B$, B ne dépend plus de $x : A$. Dans l'interprétation logique autorisée par le principe de la proposition comme ensemble, Σx devient le quantificateur existentiel $\exists x$; tout comme le produit cartésien devient la conjonction $A \wedge B$. — Il est plus intéressant de noter que les types Σ possèdent quelques propriétés remarquables. Tout d'abord

[16] Cf. Per Martin-Löf 1984, p. 40–46.

la règle d'élimination de Σ est plus puissante que celle du quantificateur existentiel, puisqu'elle tient compte des preuves, ce qui dépasse les limites expressives des langages du premier ordre. En second lieu, la projection gauche rend superflu l'opérateur de description définie $ixB(x)$ puisque, donnée une preuve de $(\exists x : A)B(x)$, on peut en extraire un élément de A possédant la propriété $B(x)$. De même, la projection gauche éclaire les difficultés posées par l'opérateur de choix, $\in xB(x)$, — un x quelconque satisfaisant la propriété $B(x)$ —, introduit par Hilbert. On sait que pour rendre compte de la quantification, le mathématicien allemand avait proposé de dériver en quelque sorte des individus à partir des propositions existentielles vraies ou, si l'on préfère, d'introduire des termes $\in$: si $(\exists x)B(x)$, alors, on peut trouver un x quelconque qui satisfait $B(x)$; on peut, si l'on préfère, construire le terme $\in xB(x)$, ce qui correspond effectivement à la projection gauche. Mais Hilbert concevait son opérateur de choix comme une fonction de la propriété $B(x)$, et non de sa preuve, ce qui explique les difficultés auxquelles il s'est heurté[17]. Enfin, Les types Σ offrent l'équivalent constructif de l'axiome de séparation : donné un ensemble A, on peut former le sous-ensemble de A qui satisfait une propriété $B(x)$, ce qui permet de rendre compte des expressions (relatives, attributives, ...) paraphrasables à l'aide de la construction *tel que*[18].

Ceux qui sont familiers avec la théorie constructive des types ont pu trouver fastidieux ces rappels, mais ils étaient indispensables si l'on veut montrer comment cette théorie, et en particulier les types Σ, permettent de construire une sémantique constructive qui apporte des solutions élégantes à divers problèmes que les logiciens avaient rencontrés.

Deux applications des types Σ : les phrases à âne et les descriptions définies

A s'en tenir à l'exposé précédent, les règles risquent de sembler bien sêches et peu parlantes. Afin d'en mesurer la force et l'élégance de ce calcul, il suffit de les mettre en application. Conçues pour rendre compte de la pratique des mathématiques intuitionnistes, ces règles trouvent en effet à s'appliquer dans d'autres domaines. La façon dont la théorie constructive des types résoud alors des difficultés anciennes confirme la justesse, le bien fondé des vues qui ont présidé à sa création.

[17] *Ibid.* Cf. Ranta, p. 98, qui cite aussi des travaux de Hintikka. Pour la position de Hilbert, voir D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, traduit par Fr. Gaillard *et alii*, Paris, L'Harmattan, 2001, t. 2, p. 62 : le symbole $\in$ a "la forme d'une fonction de prédicats universelle".

[18] P. Martin-Löf 1984, p. 53 ; Ranta, p. 34 et 61.

Une première application maintenant ancienne, puisqu'elle a été proposée il y aura bientôt vingt ans, en 1986, par Göran Sundholm, concerne les phrases à ânes, les "donkey sentences"[19]. La supposant connue, je me contenterai de rappeler qu'elle fait intervenir les types Σ et repose sur la possibilité qu'ils offrent, une fois donnée une fonction de $x : A$, de la restreindre à la projection $p(z) : A$ pour $z : (\Sigma x : A)B(x)$.

La seconde application concerne plus directement la sémantique et relève d'un point de vue quelque peu différent, moins linguistique, — encore que les retombées linguistiques soient là —, et plus philosophique. Il ne s'agit plus d'anaphore, comme dans le cas précédent, mais des fondements de la sémantique logique tels qu'ils ont été posés il y a un siècle par Frege et Russell. Le lance-pierres, du moins dans la version qu'en a proposée Gödel et qui seule nous retiendra, tend en effet à établir que toutes les phrases ont même référence. Russell avait cru trouver une solution grâce à sa théorie des descriptions définies. L'introduction des types Σ permet de bloquer l'argument sans pour autant donner raison à l'auteur de *On Denoting*. Les deux fondateurs du logicisme admettaient tacitement qu'une description définie, si elle réfère, ne peut référer qu'à un individu. La nouvelle solution consiste à rejeter cette hypothèse commune et à enrichir la théorie de la référence en introduisant des paires ordonnées, composées d'un individu et de la propriété qui sert à le décrire, pour rendre compte de la sémantique des descriptions définies.

Le lance-pierres

Il existe différentes formulations du lance-pierres ; certaines, par exemple, sont dirigées contre la logique intentionnelle mais ce n'est pas le cas ici. Voici comment St. Neale résume l'argument : "Selon Gödel, il existe un lien important entre théorie des faits et théorie des descriptions : si une phrase vraie désigne un fait, alors, pour éviter que tous les faits ne se résument (*collapse*) à un seul, il faut abandonner soit un principe frégéen de compositionalité intuitif et simple, soit l'idée que les descriptions définies sont des termes singuliers"[20]. Le passage de Gödel montre très clairement que l'argument est totalement indépendant du concept de fait et que ceux-ci n'interviennent

[19] G. Sundholm : "Proof Theory and Meaning" dans D. Gabbay et F. Guenther : *Handbook of Philosophical Logic*, Dordrecht, Kluwer, 1986, vol. 3, p. 502–503.

[20] St. Neale : "The philosophical Significance of Gödel's Slingshot", *Mind*, 104 (1995), p. 776.

qu'à titre de référents (ou, si l'on préfère, de substituts de référents, de quasi-référents) des phrases[21].

Rappelons l'idée directrice. Si l'on admet :

(H1) : que les descriptions définies réfèrent à l'individu désigné par le nom propre qui leur est associé

et (H2) : la validité d'un principe de compositionalité,

(plus quelques autres hypothèses accessoires qui seront indiquées chemin faisant mais qui semblent assez inoffensives), — sous ces hypothèses, donc, on est contraint d'admettre que toutes les phrases ont même référence. Pour ce faire, on part de trois propositions distinctes :

1) $F(a)$ (dont on admettra qu'elle a pour référent (le fait) $f1$) ;
2) $a \neq b$ (" " " " " " " $f2$) ;
3) $G(b)$ (" " " " " " " $f3$).

On veut montrer que $f1 = f2 = f3$; à cette fin, on introduit deux autres propositions qui serviront d'intermédiaires :

4) $a = ix(F(x) \wedge x = a)$;
5) $a = ix(x \neq b \wedge x = a)$.

La démonstration procède alors comme suit. On commence par admettre :

(H3) : 4 a aussi pour référence $f1$.

En toute rigueur, on a seulement : 4 est vrai ssi 1 l'est aussi. C'est parce que la coréférentialité est une relation plus forte que la simple équivalence matérielle qu'il est nécessaire de poser H3. H1 de son côté, entraîne que le nom propre et la description définie qui figurent de part et d'autre de l'égalité dans 4 sont coréférentiels. On peut donc dans 4 substituer le nom à la description définie, puisque, par H2, on ne change pas la référence d'une expression complexe quand on y remplace une sous-expression par une autre qui lui est coréférentielle. La proposition qu'on obtient ainsi, soit :

6) $a = a$,

a même référence que 4, soit $f1$. Un raisonnement parallèle, utilisant cette fois 2 et 5, établit que 6 a pour référent $f2$. D'où l'on conclut que $f1 = f2$. De la même façon, en remplaçant a par b et $F(x)$ par $G(x)$ dans 4 et 5, on obtient $4'$ et $5'$, qui permettent de montrer que $f2 = f3$. Il s'ensuit que toutes les propositions vraies ont même référence. Pour les propositions fausses, Gödel faisait remarquer que dans la conception russellienne, qui parlait de fait, ce résultat était déjà acquis : puisqu'il n'y a aucun fait qui les vérifie, elles ne réfèrent à rien, et en cela ont bien toutes la même référence.

Pour bloquer l'argument, et sauver la notion de fait, Russell renoncera à H1 et déniera aux descriptions définies le statut d'expression référentielle.

[21] K. Gödel : *Russell's Mathematical Logic*, in *Collected Works*, t. 2, Oxford, Oxford UP, 1990, p. 122.

Quant à Frege, il ne reculera pas devant ce que la conclusion de l'argument a de choquant et admettra que les phrases sont comme des noms, qui désignent ces objets logiques que sont le Vrai et le Faux, et cette croyance en la bivalence le confirmera dans son réalisme.

Pour voir où gît l'erreur, il suffit d'introduire les types. Il a été signalé plus haut que les types Σ permettaient d'obtenir l'opérateur de description définie. L'erreur se trouve dans H1, et dans 4 qui en est une expression. Sans doute, la description définie réfère à un individu, mais en tant qu'il possède telle ou telle propriété à l'aide de laquelle il est décrit, et non à un individu "tout nu". Les termes qui figurent de part et d'autre de l'égalité dans 4 ne sont donc pas coréférentiels ; on ne peut donc opérer la substitution qui permettrait de passer à 6. Montrons le en introduisant les types Σ. On abrégera en $B(x)$ l'expression $F(x) \wedge x = a$ qui figure dans 4 ; alors, par Σ introduction, il vient :

$$\frac{a : \textit{Individu} \; d : B(x)(x : \textit{Individu})}{(a, d) : (\Sigma x : \textit{Individu})B(x)}$$

Puisque $B(x)$ a la forme d'une conjonction, sa preuve, d, sera une paire dont le premier élément est $f1$, le fait qui rend vrai $F(a)$, et dont le second est le fait que a est identique à lui-même, que l'on peut noter $id(a)$. La conclusion nous dit alors : *L'individu possédant la propriété* $B(x)$ a pour type : $(\Sigma x : \textit{Individu})B(x)$; il est représenté comme un triplet $(a, (f1, id(a)))$, qu'il est donc impossible d'identifier purement et simplement à a. Si la substitution censée donner 6 est bloquée, c'est que, dans la théorie des types, 4 est faux. Celle-ci admettant la thèse de Geach selon laquelle toute identité est relative, 4 sera reconstruit comme une identité dans le type *Individu*, ce qu'on notera :

$$a = b : \textit{Individu}.$$

4 s'obtient alors par Σ élimination :

$$\frac{(a, d) : (\Sigma x : \textit{Individu})B(x)}{p((a, d)) = a : \textit{Individu}}$$

Bernard Jaulin propose de distinguer, dans une description définie, sa référence complète, la paire, et sa référence principale, la première projection. Alors, 4 est vrai quand il est entendu de la référence principale de la description définie.

Il existe d'autres façons de bloquer le lance-pierres[22], comme il existe d'autres façons de rendre compte des phrases à ânes, mais elles sont le plus souvent *ad hoc*. Ce n'est pas le cas ici et on peut y voir une illustration supplémentaire de la théorie constructive des types.

Mais la théorie constructive de la référence ne se contente pas de bloquer le lance-pierres, elle rend en outre compte de la situation, fort fréquente où ce qui est dit d'un objet sous une description ne vaut plus du même objet sous une autre description. Les théories usuelles, qui admettent la coréférentialité d'une description définie et du nom propre qui lui est associé (cf. l'hypothèse 1 formulée plus haut), sont en effet contraintes d'admettre qu'alors le locuteur se contredit, puisqu'il affirme et nie à la fois d'un objet qu'il possède une propriété donnée, ce qui n'est pourtant pas le cas. Boileau, par exemple, pouvait sans inconséquence être plein d'admiration pour l'auteur du *Misanthrope*, sans admirer l'auteur des *Fourberies de Scapin*. Bien que les deux pièces aient été écrites par le même écrivain, les deux descriptions n'ont pas la même référence. Les types Σ nous permettent, et nous enjoignent, de distinguer entre la référence d'un nom propre, qui est un individu, et celle d'une description définie, dont l'individu n'est qu'une composante. Pour qu'une description réfère authentiquement, il faut pouvoir établir que l'individu concerné possède effectivement la propriété qui lui est attribuée : dans le cas de Molière par exemple qu'il a écrit *Le Misanthrope*, ou les *Fourberies de Scapin*. C'est la différence entre l'axiome de séparation et la version constructive qu'en offrent les types Σ[23]. Du point de vue classique, un A tel que B est un objet $a : A$ qui se trouve, on ne sait pourquoi, être B. L'intuitionniste répugne à considérer ces objets "tout nus", dépourvus de propriétés, auxquels les propriétés surviennent comme par enchantement, et demande le moyen de pouvoir s'assurer que $B(a)$. Cette demande est parfaitement conforme à l'esprit d'une théorie pour qui il n'y a pas d'objet sans type.

Résumons-nous. Au point de départ du lance-pierres se trouve l'existence d'un rapport étroit et inattendu entre les deux concepts de description définie et de fait. Inattendu, parce qu'à première vue les deux concepts n'appartiennent pas au même horizon. Dans un cas, il s'agit d'une réflexion sur la vérité, et donc sur la proposition : en vertu de quoi une proposition est-elle vraie, qu'est ce qui distingue une proposition vraie d'une proposition fausse ? Question centrale en philosophie. Dans l'autre cas, il s'agit non plus des propositions, mais de leur constituants : de quoi parle-t-on quand on

[22] Voir Neale : *Facing Facts*, Oxford, Oxford UP, 2001, ou Gochet : *Logique*, vol. 3, Hermès, 2000, p. 242–45.

[23] Ranta p. 61–64.

emploie une description définie ? Seule cette dernière question concernerait la théorie de la référence. Bien sûr, on sait depuis longtemps que les deux questions ne sont pas sans lien : une proposition est vraie si, dans la réalité, les choses sont dans le même rapport que celui qu'elle pose entre ses divers constituants. Mais l'argument du lance-pierres invite à poser un lien beaucoup plus fort. Si l'on accepte, ce qui semble pourtant aller de soi, qu'une description définie et le nom propre qui lui est associé sont coréférentiels, alors il s'ensuit des conséquences surprenantes pour le concept de fait. On passe d'un truisme à ce qui est presque une contre vérité.

Pour échapper à cette situation inconfortable, deux solutions ont été proposées : soit rejeter la prémisse, soit accepter la conclusion sans se préoccuper des protestations du bon sens. Russell bloque le lance-pierres en refusant tout pouvoir référentiel aux descriptions définies. Frege fera l'économie du concept de fait et posera deux objets logiques, le Vrai et le Faux, référents respectivement de toutes les phrases vraies et de toutes les phrases fausses. Aucune de ces deux solutions, qui ont dominé la sémantique logique depuis plus d'un siècle, n'est totalement satisfaisante. Contre Russell, on doit maintenir que les descriptions définies sont, en règle général, des expressions authentiquement référentielles ; contre Frege, on doit maintenir que ce n'est pas le Vrai qui fait que la neige est blanche et que les sapins sont verts et qu'il est légitime de penser que, de même qu'il y a deux phrases différentes, il y a deux faits différents qui les rendent vraies.

Les types Σ permettent à la théorie constructive des types de satisfaire simultanément à ces deux demandes. L'argument du lance-pierres n'est pas concluant et il n'est donc pas nécessaire de renoncer au concept de fait pour hypostasier les valeurs de vérité ; pas plus qu'il n'est nécessaire de chercher à le bloquer en niant le caractère référentiel des descriptions définies. L'erreur tient à un principe sémantique accordé tant par Russell que par Frege : la coréférentialité des noms propres et des descriptions définies[24]. Bloqué le lance-pierres, le lien entre fait et description définie est-il détruit ? Non ; il subsiste, mais nous sommes invités à le penser en d'autres termes, et ce n'est pas un des moindres mérites du constructivisme que de nous amener, par le biais du concept d'objet preuve, à enrichir notre théorie de la référence.

Post-scriptum (novembre 2004)

L'article était terminé quand Per Martin-Löf m'a fait savoir qu'il préférait donner aux descriptions définies le type des individus.

[24] Chez Russell, il est accordé sur le mode irréel : si les descriptions définies référaient, elles seraient coréférentielles aux noms propres.

Ses motifs tiennent à la parenté depuis longtemps reconnue entre l'opérateur i et l'opérateur $\in$ de Hilbert. Pour obtenir des preuves de consistance, le mathématicien allemand, on s'en souvient, avait cherché à dériver des individus de propositions existentielles vraies. S'il est établi qu'il existe un x dans A ayant la propriété B, alors on a le droit de parler d'un individu quelconque possédant ladite propriété, et pour cela d'introduire un terme $(\in x : A)B(x)$. Mais ce terme $\in$, qui fonctionne comme un opérateur de choix, n'est pas constructivement recevable : il n'est pas donné sous une forme canonique et aucune règle ne permet de le ramener à une telle forme. Aussi, pour remédier à ce défaut, Per Martin-Löf[25] avait proposé d'en faire une fonction, non seulement du domaine A et de la fonction propositionnelle $B(x)$, mais aussi de la preuve de la proposition existentielle. Dans cette version constructive, les deux règles qu'avait introduites Hilbert ne sont plus que les règles familières de Σ élimination, ce qui revient à considérer les termes $\in$ comme des projections gauches. Les opérateurs de description définie n'étant à leur tour que des termes $\in$ auxquels on a ajouté une condition d'unicité, il s'ensuit que les descriptions définies ont le même type que les individus. Quant au lance-pierre, il n'est pas difficile de trouver d'autres moyens pour le bloquer.

L'approche de Bernard Jaulin, adoptée ici, repose sur d'autres considérations. Elle ne part pas de l'analyse constructive de l'opérateur $\in$ et cherche à la place à rendre compte de ce qui se passe dans la langue ; de ce point de vue il n'y a aucune raison de privilégier la pratique mathématique, même constructive. Les descriptions définies ont très souvent valeur d'une construction en *tel que*, même si en pratique nous n'en tenons pas compte. Plus généralement, il est connu que les langues se caractérisent par la place considérable qu'y occupent les constructions intensionnelles. La théorie de l'action, de son côté, a souligné l'importance du concept *d'individu sous une description*. C'est à cette sorte de phénomènes que l'attribution d'un type sigma essaie de rendre justice, puisque cela revient à inclure dans la référence d'une description définie non seulement l'individu mais la façon dont il nous est donné, en l'occurrence la preuve qu'il possède bien la propriété qui sert à le décrire. En imposant ainsi des contraintes plus fortes sur la substitution on peut, comme on l'a vu, bloquer les substitutions indésirables mais cet avantage se paye puisque l'intensionnalité sera aussi présente dans des cas où on n'en n'a pas besoin. Faut-il l'introduire dès le départ, au risque d'alourdir considérablement l'appareil conceptuel, ou ne le faire que progressivement ? Il semble que ce soit pour une bonne part affaire de choix et que chacune

[25] Per Martin-Löf 1984, p. 40–46. Cf. Ranta, p. 98, qui cite aussi des travaux de Hintikka. Pour la position de Hilbert, voir D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, traduit par Fr. Gaillard *et alii*, Paris, L'Harmattan, 2001, t. 2, p. 62 : le symbole ε a "la forme d'une fonction de prédicats universelle".

des deux façons de typer les descriptions définies corresponde à une façon de répondre à cette question.

Centre d’Analyse et de Mathématiques Sociales
54, bd Raspail
F-75270 Paris CEDEX 06
FRANCE
E-mail : bourdeau@ehess.fr