Logique & Analyse **185–188** (2004), 365–374

L'ÉGALITÉ ET L'EXTENSIONNALITÉ

MARCEL CRABBÉ

Résumé

Nous présentons une justification des axiomes de l'égalité et de l'extensionnalité ensembliste. En nous limitant, pour la commodité, au cas particulier de la théorie *SF*, nous montrons que l'extensionnalité peut être scindée en deux parties indépendamment consistantes. Cette division de l'extensionnalité s'exprime naturellement dans le langage ensembliste avec termes que nous relions à la version sans termes.

Abstract

We justify the axioms for equality and set-theoretic extensionality. Restricting ourselves, for convenience, to the particular case of the system SF, we show that extensionality can be split into two independently consistent parts. This division is made naturally in a set-theoretic language with terms, that we correlate to the version without terms.

Identité et indiscernabilité

L'ÉGALITÉ EST LA PLUS PETITE RELATION RÉFLEXIVE. En logique, l'égalité est considérée comme étant la relation « être le même que » ou d'identité[1]. En vue de traduire cette définition dans les systèmes formels, il est utile de remarquer que l'identité ou l'égalité est la plus petite relation réflexive,

[1] Selon Frege, lorsque l'égalité est envisagée comme une relation non pas entre des mots mais entre des choses, elle est une relation que chaque chose entretient avec elle-même et avec aucune autre. Il écrit au début de *Über Sinn und Bedeutung* « Es wäre hiermit eine Beziehung eines Dinges zu sich selbst ausgedrückt, und zwar eine solche, in der jedes Ding mit sich selbst, aber kein Ding mit einem anderen steht ». Si a est le même que b, alors $a = b$. Si a est autre que b, alors $a \neq b$. En cela l'usage logique du mot « égalité » diffère sensiblement de son usage courant : « tous les hommes sont égaux » ne signifie pas il y a au plus un homme !

c'est-à-dire la plus petite des relations que chaque chose entretient avec elle-même. Il est en effet clair que si a est le même que b, alors aRb, pour toute relation réflexive R. Réciproquement, si aRb, pour toute relation réflexive R, alors, comme la relation « être le même que » est réflexive, a est le même que b.

L'égalité $=$ doit donc vérifier les axiomes $\forall x\, x = x$ et $\forall x\, \chi(x,x) \to \forall x \forall y\, (x = y \to \chi(x,y))$, pour tout $\chi(a,b)$.

De plus, seule l'égalité vérifie ces axiomes. Autrement dit si $='$ est une telle relation, alors $\forall x \forall y\, (x = y \leftrightarrow x =' y)$. C'est évident, car les relations $=$ et $='$ sont réflexives et $\forall x\, x =' x \to \forall x \forall y\, (x = y \to x =' y)$, $\forall x\, x = x \to \forall x \forall y\, (x =' y \to x = y)$.

L'ÉGALITÉ EST L'INDISCERNABILITÉ. Selon Leibniz, qui a donné la définition logique la plus célèbre de l'égalité, $a = b$ ssi a peut partout être remplacé par b et b par a sans que cela modifie la vérité[2]. $a = b$ ssi $\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$, pour tout $\varphi(c)$.

En particulier l'égalité est une relation d'équivalence. Du reste, une relation réflexive $R(a,b)$ est une équivalence ssi elle est une relation d'indiscernabilité par rapport aux $\varphi(c)$ de la forme $R(c,d)$ ou $R(d,c)$.

Ces deux définitions de l'égalité, identité et indiscernabilité, sont équivalentes. On a en effet « indiscernabilité des identiques » car, comme chacune des relations $aR_{\varphi(c)}b : \varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$ est réflexive, $\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$ si $a = b$. On a aussi « identité des indiscernables » car a est évidemment indiscernable de a et, en raison de l'indiscernabilité, $\forall x \forall y\, (x = y \to (\chi(x,x) \leftrightarrow \chi(x,y)))$, ce qui donne successivement $\forall x \forall y\, (\chi(x,x) \to (x = y \to \chi(x,y)))$ et $\forall x\, \chi(x,x) \to \forall x \forall y\, (x = y \to \chi(x,y))$.

Ces notions ne sont pas immédiatement exprimables sans quantification sur les formules si le langage ne contient pas un nombre fini de symboles relationnels et fonctionnels. On pourrait d'ailleurs soutenir qu'elles ne correspondent pas non plus à la « véritable » égalité dans la mesure où les relations réflexives et les propriétés par rapport auxquelles il y a indiscernabilité sont celles qui sont exprimables dans un langage donné. Il est bien connu qu'il y a des modèles vérifiant les axiomes d'égalité dans lesquels des entités distinctes sont « égales ». L'existence facilement établie de tels modèles non standard pour l'égalité, nous paraît pouvoir remplacer la référence au théorème de Löwenheim-Skolem dans les fameux arguments de Putnam visant à justifier le réalisme interne.

[2] Eadem sunt qui substitui possunt salva veritate.

Terminologie et notations. Nous utiliserons les lettres x, y, z,..., pour les variables liées et les lettres a, b, c,..., pour les variables libres. Nous adoptons la notation $\varphi(t)$ pour souligner certaines occurrences de t dans φ. Pour préciser cela, nous pouvons supposer implicitement que le résultat de la substitution de t à c dans φ se note idéalement $\varphi_c(t)$. Comme la mention de l'indice c sera inutile — car claire à partir du contexte — dans les situations que nous rencontrerons, nous adoptons la notation $\varphi(t)$. Donc φ qui est $\varphi_c(c)$ se note aussi parfois $\varphi(c)$.

Un terme qui n'est pas une variable est qualifié de *propre*. Nos langages pourront contenir des termes propres qui ne sont pas engendrés par des symboles fonctionnels et dans lesquels il y a des variables liées. En ce cas nous supposerons toujours que l'ensemble des termes est fermé par substitution, c'est-à-dire forme un logos au sens de [3].

Soit une théorie T dont le langage ne contient pas de termes propres. Soit une formule à deux variables, $a \approx b$, qui est une relation d'équivalence dans T. Définissons $R_{\approx}(a_1, \ldots, a_n)$ comme $\exists x_1 \ldots \exists x_n (x_1 \approx a_1 \wedge \ldots \wedge x_n \approx a_n \wedge R(x_1, \ldots, x_n))$. Alors $\approx$ est une égalité relativement au « nouveau langage », c'est-à-dire que, si $\varphi_{\approx}$ désigne l'expression résultant de φ après y avoir remplacé chaque symbole relationnel R par $R_{\approx}$, on a :

Lemme 1: $T \vdash \forall x \forall y\, (x \approx y \rightarrow (\varphi(x)_{\approx} \leftrightarrow \varphi(y)_{\approx}))$*, pour tout* $\varphi(c)$*.*

Démonstration. Il suffit de noter en premier lieu que

$$T \vdash a \approx b \rightarrow (R_{\approx}(a_1, \ldots, a, \ldots, a_n) \leftrightarrow R_{\approx}(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n))$$

et de procéder ensuite par induction. □

Ceci reste valable en présence de termes propres avec une interprétation des termes propres t — disons $t_{\approx}$ — telle que $T \vdash \forall x \forall y\, (x \approx y \rightarrow t(x)_{\approx} \approx t(y)_{\approx})$.

Langages ensemblistes

Définitions. Une formule $E(a, b)$ *représente* l'égalité dans T ssi les formules $\forall x\, E(x, x)$ et $\forall x \forall y\, (E(x, y) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)))$ sont démontrables dans T, pour tout $\varphi(c)$.

Un *langage ensembliste* est un langage n'ayant qu'un seul symbole relationnel, le symbole binaire $\in$. Un langage ensembliste n'a donc pas de symbole pour l'égalité.

$a \sim b$ est une abréviation de $\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b)$, $a \doteq b$ abrège $\forall x\,(a \in x \leftrightarrow b \in x)$ et $a \dot{\subseteq} b$ abrège $\forall x\,(a \in x \rightarrow b \in x)$.

La proposition suivante se montre aisément par induction :

Proposition 2: *Si le langage de T est ensembliste, alors pour que $E(a,b)$ représente l'égalité dans T, il faut et il suffit que $T \vdash \forall x\forall y\,(E(x,y) \rightarrow t(x) \sim t(y) \wedge t(x) \doteq t(y))$, pour tout $t(c)$.*

En particulier, si le langage de T n'a pas de termes propres, alors la formule $a \sim b \wedge a \doteq b$ représente l'égalité dans T.

L'extensionnalité

Ext est l'énoncé :

$$\forall x\forall y\,(x \sim y \rightarrow x \doteq y).$$

Ext équivaut intuitivement à l'axiome d'extensionnalité, lorsque $a \doteq b$ représente l'égalité. Notons également que, comme $\sim$ est symétrique[3], *Ext* équivaut logiquement à $\forall x\forall y\,(x \sim y \rightarrow x \dot{\subseteq} y)$.

La proposition suivante n'est qu'un exemple illustrant les diverses manières de représenter l'égalité et de la relier à l'extensionnalité.

Proposition 3:
1. Si $E(a,b)$ représente l'égalité et si T démontre l'axiome de compréhension $\exists y\forall x\,(x \in y \leftrightarrow E(a,x))$, alors $a \dot{\subseteq} b$ — et donc aussi $a \doteq b$ — représente l'égalité.
2. Si T démontre $\forall x\forall y\,(x \doteq y \leftrightarrow x \sim y)$ et, pour tout $t(c)$, $\forall x\forall y\,(x \sim y \rightarrow t(x) \sim t(y))$, alors $a \doteq b$ représente l'égalité.
3. Si T démontre les axiomes de compréhension $\exists y\forall x\,(x \in y \leftrightarrow t(x) \in c)$, $\exists y\forall x\,(x \in y \leftrightarrow c \in t(x))$, alors $a \doteq b$ représente l'égalité.

Démonstration. 1. Si $a \dot{\subseteq} b$, alors $a \in c \rightarrow b \in c$, pour tout c. En prenant c tel que $\forall x\,(x \in c \leftrightarrow E(a,x))$, on a $E(a,a) \rightarrow E(a,b)$. Par conséquent $E(a,b)$, car $E(a,a)$.

2. Immédiat par la proposition 2.

3. Si $a \doteq b$, alors $a \in d \leftrightarrow b \in d$, pour tout d. En prenant d_c tel que $\forall z\,(z \in d_c \leftrightarrow t(z) \in c)$, on a $t(a) \in c \leftrightarrow t(b) \in c$ et en prenant d_c tel que $\forall z\,(z \in d_c \leftrightarrow c \in t(z))$, on a $c \in t(a) \leftrightarrow c \in t(b)$. On termine en appliquant la proposition 2. □

[3] $\forall x\forall y\,(x \sim y \leftrightarrow y \sim x)$ est une loi logique.

Définitions. *SF* est la théorie dans le langage ensembliste sans termes propres et avec les axiomes de compréhension

$$\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi),$$

pour les formules φ stratifiées[4].

SF^{Ens} est la théorie dans le langage de *SF* plus le symbole prédicatif unaire *Ens* et avec les axiomes de compréhension pour les formules stratifiées — pouvant contenir *Ens* — ainsi que les axiomes suivants[5] :

extension : $\forall x \exists y\, (\mathit{Ens}(y) \wedge y \sim x)$ et

extensionnalité faible : $\forall x \forall y\, ((\mathit{Ens}(x) \wedge \mathit{Ens}(y) \wedge x \sim y) \rightarrow x \doteq y)$.

La proposition suivante est proche de l'interprétation de *NFU* dans *SF* que nous avons donnée dans [1].

Proposition 4: *SF interprète SF*^{Ens}.
Si φ est dans le langage de SF et démontrable dans SF^{Ens}*, alors $\varphi_\sim$ est démontrable dans SF.*

Démonstration. $\mathit{Set}(a)$ abrègera $\forall x\, (x \in_\sim a \rightarrow x \in a)$. Si φ est dans le langage de *SF*^{Ens}, φ^{Set} est la formule dans laquelle toutes les sous-formules $\mathit{Ens}(a)$ ont été remplacées par $\mathit{Set}(a)$ et φ^* est $(\varphi_\sim)^{\mathrm{Set}}$.

Nous pouvons nous limiter à vérifier que les interprétations * des axiomes non logiques de *SF*^{Ens} sont démontrables dans *SF*. On utilisera pour cela le fait que *SF* démontre $a \in_\sim b \leftrightarrow \exists x\, (x \sim a \wedge x \in b)$ ainsi que $\forall x\, (\mathit{Set}_\sim(x) \leftrightarrow \mathit{Set}(x))$.

Comme φ^* est stratifiée si φ l'est, la traduction d'un axiome de compréhension, à savoir $\exists y \forall x\, (x \in_\sim y \leftrightarrow \varphi^*)$, est démontrable en utilisant l'axiome de *SF*, $\exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \varphi^*)$ et le lemme 1.

La traduction de l'axiome d'extension $\forall x \exists y\, ((y \sim x)_\sim \wedge \mathit{Set}(y))$ découle de l'axiome de compréhension $\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in_\sim x)$.

[4] *SF* (« Stratified Foundations », « Stratified set Formation ») est donc *NF* (« New Foundations » de Quine) sans extensionnalité. Nous renvoyons à [4] ou au site internet `http://math.boisestate.edu/~holmes/holmes/nf.html` pour la présentation de *NF*.

[5] $\mathit{Ens}(a)$ se lit « a est un ensemble ». L'axiome d'extension dit que tout objet a les mêmes éléments qu'un ensemble ; ou tout concept a une extension, qui est un ensemble. Le dernier axiome dit que des ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux.

La traduction de l'extensionnalité faible :

$$\forall x \forall y\, ((\mathit{Set}(x) \wedge \mathit{Set}(y) \wedge (x \sim y)_{\sim}) \rightarrow (x \doteq y)_{\sim}),$$

résulte de ce que *SF* démontre $\forall x \forall y\, ((\mathit{Set}(x) \wedge \mathit{Set}(y) \wedge (x \sim y)_{\sim}) \rightarrow x \sim y)$. □

Définitions. SF^T — « *SF* avec termes » — est la théorie dans le langage ensembliste avec les termes propres $\{\, x \mid \varphi \,\}$ faiblement stratifiés et les axiomes de compréhension de la forme suivante :

$$\forall x\, (x \in \{\, x \mid \varphi \,\} \leftrightarrow \varphi).$$

Nous renvoyons à [2] pour une description détaillée du langage[6] de SF^T. Ext^T est l'ensemble des formules de la forme

$$t \sim s \rightarrow t \doteq s,$$

pour tout *terme propre* t et s.

Remarquons que, par la proposition 3. 3, $\doteq$ représente l'égalité dans SF^T.

Proposition 5:
SF^{Ens} interprète $SF^T + Ext^T$.
Si $SF^T + Ext^T \vdash \varphi$, alors $SF^{Ens} \vdash \varphi$, pour toute formule φ du langage de SF.

[6] En bref. On définit d'abord les *proto-formules* et les *proto-termes* inductivement comme suit : $t \in s$, $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des proto-formules et x, $\{\, x \mid \varphi \,\}$ sont des proto-termes, si φ, ψ sont des proto-formules, x une variable et t, s des proto-termes.

Une stratification faible d'une proto-formule ou proto-terme est une fonction qui associe aux occurrences de proto-termes dans cette expression un entier — son type — telle que : dans une occurrence de $t \in s$, le type de t est i ssi le type de s est $i+1$; dans une occurrence de $\{\, x \mid \varphi \,\}$, le type de chaque occurrence de x est un même entier i et le type de $\{\, x \mid \varphi \,\}$ est $i+1$; dans une occurrence de $\forall x\varphi$ or $\exists x\varphi$, le type de chaque occurrence de x est le même.

Une proto-formule ou proto-terme est faiblement stratifié ssi il a une stratification faible. Un terme est un proto-terme faiblement stratifié (les variables sont donc des termes) ; enfin les formules sont définies comme d'habitude à partir des formules atomiques de la forme $t \in s$, où t et s sont des termes.

La stratification faible remplace ici la stratification afin que la collection des termes soit close par substitution.

Démonstration. Si φ est faiblement stratifiée et ne contient aucune occurrence de a, nous définissons $a\sigma_x\varphi$ comme étant *Ens*$(a) \wedge \forall x\,(x \in a \leftrightarrow \varphi)$. Comme conséquence de l'extensionnalité faible, on a dans *SF*^{Ens} :

$$a\sigma_x\varphi \wedge b\sigma_x\varphi \rightarrow a \doteq b \tag{*}$$

$a\sigma_x\varphi$ peut donc se lire « a est *l*'ensemble des x tels que φ ».

Associons à chaque formule φ du langage de *SF*^{T}, une formule $\overline{\varphi}$ de *SF*^{Ens}, définie par induction :

- $\overline{b \in a}$ est $b \in a$;
- $\overline{t \in \{\, x \mid \varphi \,\}}$ est $\exists y\,(y\sigma_x\overline{\varphi} \wedge \overline{t \in y})$;
- $\overline{\{\, x \mid \varphi \,\} \in a}$ est $\exists y\,(y\sigma_x\overline{\varphi} \wedge y \in a)$;
- $\overline{\ldots}$ commute avec les connecteurs logiques : $\overline{\varphi \rightarrow \psi}$ est $\overline{\varphi} \rightarrow \overline{\psi}$; $\overline{\forall x\,\varphi}$ est $\forall x\,\overline{\varphi}$, etc.

Clairement, $\overline{\varphi}$ est faiblement stratifiée si φ l'est et $\overline{\varphi}$ est identique à φ si φ est dans le langage de *SF*.

On va montrer que si *SF*^{T} + *Ext*$^T \vdash \varphi$, alors *SF*$^{Ens} \vdash \overline{\varphi}$.

Nous prouvons d'abord que, dans *SF*^{Ens} :

$$a\sigma_x\overline{\psi} \rightarrow (\overline{\varphi(a)} \leftrightarrow \overline{\varphi(\{\, x \mid \psi \,\})}). \tag{**}$$

La preuve par induction sur $\varphi(c)$ est automatique une fois établi le résultat pour les formules de base de forme $t \in c$ et $c \in s$. Nous en discutons les différents cas.

- $t \in c$. $a\sigma_x\overline{\psi} \rightarrow (\overline{t \in a} \leftrightarrow \exists y\,(y\sigma_x\overline{\psi} \wedge \overline{t \in y}))$ est démontrable dans *SF*^{Ens} en utilisant (*) et le fait que $\doteq$ y représente l'égalité.
- $c \in s$ et s est une variable b. $a\sigma_x\overline{\psi} \rightarrow (a \in b \leftrightarrow \exists y\,(y\sigma_x\overline{\psi} \wedge y \in b))$ est démontrable dans *SF*^{Ens}, par (*).
- $c \in s$ et s est $\{\, x \mid \chi \,\}$. Par le cas précédent, on a dans *SF*^{Ens},

$$\begin{aligned} a\sigma_x\overline{\psi} \rightarrow (\overline{a \in \{\, x \mid \chi \,\}} &\leftrightarrow \exists y\,(y\sigma_x\overline{\chi} \wedge \overline{a \in y})) \\ &\leftrightarrow \exists y\,(y\sigma_x\overline{\chi} \wedge \overline{\{\, x \mid \psi \,\} \in y}). \end{aligned}$$

Il suit immédiatement de (**) et de *SF*$^{Ens} \vdash \exists y\, y\sigma_x\overline{\psi}$ que :

$$\begin{aligned} SF^{Ens} \vdash \overline{\varphi(\{\, x \mid \psi \,\})} &\leftrightarrow \exists y\,(y\sigma_x\overline{\psi} \wedge \overline{\varphi(y)}) \\ &\leftrightarrow \forall y\,(y\sigma_x\overline{\psi} \rightarrow \overline{\varphi(y)}) \end{aligned} \tag{***}$$

Nous terminons la preuve en indiquant comment démontrer dans SF^{Ens} l'interprétation $\overline{\ldots}$ des axiomes de SF^T.

Les axiomes de la logique. Le seul cas non immédiatement évident est celui d'un axiome du genre $\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(\{\, x \mid \psi \,\})$. La traduction de cet axiome se déduit de (***) et de la loi logique $\forall x\, \overline{\varphi(x)} \to \forall y\, (y \sigma_x \overline{\psi} \to \overline{\varphi(y)})$.

Les axiomes de compréhension. En vertu de (***), la loi logique $\forall y\, (y\sigma_x\overline{\varphi} \to \forall x\, (x \in y \leftrightarrow \overline{\varphi}))$ entraîne $\overline{\forall x\, (x \in \{\, x \mid \varphi \,\} \leftrightarrow \varphi)}$ dans SF^{Ens}.

L'axiome Ext^T. On a, dans SF^{Ens}, $\forall y\, (y\sigma_x\overline{\varphi} \to \forall z\, (z\sigma_x\overline{\psi} \wedge (y \sim z \to y \doteq z)))$, ce qui, par (***), entraîne $\overline{\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \sim \{\, x \mid \psi(x) \,\} \to \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \doteq \{\, x \mid \psi(x) \,\}}$. □

Comme corollaire des propositions 4 et 5, nous obtenons la

Proposition 6:
SF interprète $SF^T + Ext^T$.
Si $SF^T + Ext^T \vdash \varphi$, alors $SF \vdash \varphi_\sim$, pour toute formule φ du langage de SF.

REMARQUES.
1. Au lieu de la théorie SF^{Ens}, on aurait pu prendre une théorie dans le langage de *SF*. Par exemple, *SF* plus l'axiome

$$\exists v\, (\forall x \exists y\, (y \in v \wedge y \sim x) \wedge \forall x \forall y\, (x \in v \wedge y \in v \wedge x \sim y \to x \doteq y)).$$

2. On montre, comme dans la proposition 4, que $SF^T + Ext^T \vdash \varphi$ entraîne $SF^T \vdash \varphi_\sim$, en observant que $\varphi(t)_\sim$ est $\varphi_\sim(t_\sim)$ — où bien entendu $a_\sim$ est a et $\{\, x \mid \psi \,\}_\sim$ est $\{\, x \mid \psi_\sim \,\}$.

Définitions. $\hat{t}$ est le terme $\{\, x \mid x \in t \,\}$, étant entendu que x n'est pas libre dans t. Ext^η est l'énoncé $\forall x\, x \doteq \hat{x}$.

Proposition 7: *SF^T interprète $SF^T + Ext^\eta$.*

Démonstration. On traduit inductivement chaque terme t et formule φ de SF^T en un terme et une formule $\overline{t}$ et $\overline{\varphi}$:
- $\overline{a}$ est a ;
- $\overline{\hat{t}}$ est $\overline{t}$;
- $\overline{\{\, x \mid \varphi \,\}}$ est $\{\, x \mid \overline{\varphi} \,\}$, si $\{\, x \mid \varphi \,\}$ n'est pas de la forme $\hat{t}$;
- $\overline{s \in t}$ est $\overline{s} \in \overline{t}$; $\overline{\varphi \to \psi}$ est $\overline{\varphi} \to \overline{\psi}$; $\overline{\forall x\, \varphi}$ est $\forall x\, \overline{\varphi}, \ldots$

On montre que si *SF*^{T} + *Ext*$^\eta \vdash \varphi$, alors *SF*$^T \vdash \overline{\varphi}$.

Les axiomes de la logique ne font pas problème, car on voit facilement que $\overline{\varphi(t)}$ est $\overline{\varphi}(\overline{t})$.

L'axiome de compréhension de *SF*^{T}, $\forall x\,(x \in \{\, x \mid \varphi \,\} \leftrightarrow \varphi)$ devient $\forall x\,(x \in \{\, x \mid \overline{\varphi} \,\} \leftrightarrow \overline{\varphi})$, si $\{\, x \mid \varphi \,\}$ n'est pas de forme $\hat{t}$, ce qui est également un axiome de compréhension, car $\overline{\varphi}$ est faiblement stratifiée. L'axiome $\forall x\,(x \in \hat{t} \leftrightarrow x \in t)$ devient $\forall x\,(x \in \overline{t} \leftrightarrow x \in \overline{t})$.

Enfin, $\overline{\forall x\, x \doteq \hat{x}}$ est $\forall x \forall z\,(x \in z \leftrightarrow x \in z)$.[7] □

La proposition suivante, combinée avec les propositions 5 et 7, montre que *Ext* se divise en deux parties, *Ext*^{T} et *Ext*$^\eta$, séparément cohérentes avec *SF*^{T}.

Proposition 8: *SF*^{T} + *Ext*$^\eta$ + *Ext*^{T} = *SF*^{T} + *Ext*.

Démonstration. *Ext*^{T} découle immédiatement de l'axiome d'extensionnalité et *Ext*$^\eta$ également car on a $\forall x\, x \sim \hat{x}$. D'autre part, si $a \sim b$ alors $\hat{a} \sim \hat{b}$ et donc $\hat{a} \doteq \hat{b}$, par *Ext*^{T}. D'où $a \doteq b$, par *Ext*$^\eta$. □

Si on considère les termes propres comme représentant des ensembles, alors *Ext*^{T} représente l'extensionnalité pour les ensembles et *Ext*$^\eta$ est une manière de dire que tout objet est un ensemble. Ainsi interprétée, la proposition précédente est d'une évidence enfantine : des entités ayant les mêmes éléments sont identiques ssi des ensembles ayant les mêmes éléments sont identiques ET tout objet est un ensemble.

Université catholique de Louvain
Département de Philosophie
Place Mercier, 14
B–1348 Louvain-la-Neuve
E-mail: crabbe@risp.ucl.ac.be

RÉFÉRENCES

[1] Crabbé, M. "On *NFU*." Notre-Dame Journal of Formal Logic, 33: 112–119, 1992.

[7] Notons que l'interprétation par $\overline{\ldots}$ de l'axiome de *Ext*^{T} $\forall x \forall y\,(\hat{x} \sim \hat{y} \to \hat{x} \doteq \hat{y})$ n'est autre que *Ext*.

[2] Crabbé, M. “The Hauptsatz for stratified comprehension : a semantic proof.” Mathematical Logic Quarterly, 40: 481–489, 1994.

[3] Crabbé, M. « Une axiomatisation de la substitution. » Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Série I, 338, 6 : 433-436, 2004.

[4] Forster, T. *Set Theory with a Universal Set, Exploring an Untyped Universe.* Second edition, Oxford Logic Guides 31, Clarendon Press, Oxford, 1995.