



## QUANTIFICATEURS FAIBLEMENT RÉDUCTIBLES

R. ZUBER

### Résumé

On démontre quelques propriétés des quantificateurs faiblement réductibles en généralisant notamment certains résultats de Keenan. Un quantificateur  $Q$  de type  $\langle n \rangle$  est faiblement réductible si et seulement s’il existe une itération de  $n$  quantificateurs de type  $\langle 1 \rangle$  qui prend les mêmes valeurs que  $Q$  pour les relations-produits.

Various properties of weakly reducible quantifiers are characterized, some of which are generalisations of some results obtained by Keenan. A quantifier  $Q$  of type  $\langle n \rangle$  is weakly reducible iff there exists an iteration of  $n$  type  $\langle 1 \rangle$  quantifiers which takes the same values as  $Q$  on product-relations.

Suite à la généralisation proposée par Mostowski ([2]), on considère que les quantificateurs (généralisés) sont des relations entre des relations (sur un univers donné  $M$ ). En particulier un quantificateur de type  $\langle n \rangle$  est une fonction de l’ensemble des relations à  $n$  places dans  $\{0, 1\}$ . Par exemple les propriétés de relations binaires telles que *SYMETRIQUE* ou *TRANSITIVE* sont des quantificateurs de type  $\langle 2 \rangle$ . La classe des quantificateurs de type  $\langle n \rangle$  contient des quantificateurs réductibles, c’est-à-dire ceux qui sont équivalents à une itération, au sens précis, de  $n$  quantificateurs de type  $\langle 1 \rangle$ .

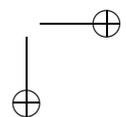
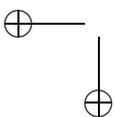
Soit  $R_n$  la classe des relations  $n$ -aires. Pour définir l’itération des quantificateurs on étend le domaine d’application des quantificateurs de type  $\langle 1 \rangle$  : ce sont alors des applications de  $R_{n+1}$  dans  $R_n$  définies comme :

*Definition 1:*  $F$  est une fonction de type  $\langle 1 \rangle$  si et seulement si :

(i) le domaine de  $F = \bigcup_{n \geq 0} R_{n+1}$ , l’image de  $F \subseteq \bigcup_{n \geq 0} R_n$

(ii) pour tout  $n \geq 0$ , et pour tout  $R \in R_{n+1}$ ,

$F(R) = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle : F\{b : \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \in R\} = 1 \}$ .



La définition suivante précise la notion de réductibilité d'une fonction (d'un quantificateur) de type  $\langle n \rangle$  :

*Definition 2: La fonction  $F$  de  $R_n$  dans  $\{0, 1\}$  est réductible si et seulement s'il existe  $n$  fonctions  $h_1, \dots, h_n$  de type  $\langle 1 \rangle$  telles que  $F = h_1 \circ \dots \circ h_n$ .*

Notons l'observation suivante (cf. [1]). Appelons la fonction  $F$  de type  $\langle n \rangle$  *positive* si  $F(\emptyset) = 0$ . Par définition  $F^\neg$  est la fonction qui à chaque  $R$  associe  $F(R')$  (où  $R'$  est le complémentaire de  $R$ ) et  $\neg F$  est la fonction qui à chaque  $R$  associe  $F(R)'$ . On a l'égalité suivante pour tout  $f$  et  $g$  de type  $\langle 1 \rangle$  :  $f \circ g(R) = f^\neg \circ \neg g(R)$ . Étant donné que soit  $g$  soit  $\neg g$  est positif, il s'ensuit que dans la définition 2 on peut remplacer, sans perte de généralité, toute fonction  $h_i$ , pour  $i \geq 2$ , par une fonction positive.

Des fonctions réductibles et des itérations sont étudiées dans [1] et [3]. L'article de Keenan donne plusieurs exemples de fonctions non-réductibles. Il s'avère que leurs propriétés sont essentiellement liées aux types de relations qu'elles prennent comme arguments : leur comportement est déterminé par les arguments qui sont des relations-produits. Une relation  $n$ -aire  $R$  est une relation-produit,  $R \in PROD(n)$ , si et seulement si  $R$  est de la forme  $P_1 \times, \dots, \times P_n$ , pour  $P_i \subseteq M$ . La proposition suivante est alors vraie (cf. [1]) :

*Proposition 1: Soit  $F$  et  $G$  des fonctions de type  $\langle n \rangle$  réductibles. Si  $F(R) = G(R)$  pour tout  $R \in PROD(n)$  alors  $F(R) = G(R)$  pour tout  $R \in R_n$ .*

La proposition 1 permet de tester la non-réductibilité de certaines fonctions. Considérons la fonction correspondant à la propriété *TRANSITIVE*. Puisque toute relation-produit binaire est transitive, nous avons  $1 \circ h(R) = TRANSITIVE(R)$ , pour toute relation  $R \in PROD(2)$  (où  $1$  est la fonction de type  $\langle 1 \rangle$  qui donne la valeur 1 pour tout argument et  $h$  est une fonction positive arbitraire de type  $\langle 1 \rangle$ ). Étant donné que cette égalité n'est pas valable pour tout  $R$ , *TRANSITIVE* n'est pas réductible. Cependant cette fonction est différente de *ASYMETRIQUE* par exemple, car pour cette dernière, il est impossible, comme nous verrons, de trouver une fonction réductible qui prendrait les mêmes valeurs que *ASYMETRIQUE* sur les relations-produits. Une caractérisation de cette différence est l'objet de cette note.

Soit la définition suivante :

*Definition 3: La fonction  $F$  de type  $\langle n \rangle$  est faiblement réductible si et seulement s'il existe une fonction  $G$  réductible telle que  $F(R) = G(R)$  pour tout  $R \in PROD(n)$ .*

*Une fonction qui n'est pas faiblement réductible est fortement irréductible.*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit faiblement réductible s'obtient en utilisant la condition analogue pour la réductibilité en général proposée dans [1]. Soit la définition suivante :

*Definition 4: Soit  $h_2, \dots, h_n$  une séquence de  $n - 1$  fonctions positives du type  $\langle 1 \rangle$  et  $F$  une fonction du type  $\langle n \rangle$ . Nous dirons que cette séquence affine  $F$  si et seulement si pour toute relation  $R$ , toute relation  $S$  si  $h_2 \circ \dots \circ h_n(R) = h_2 \circ \dots \circ h_n(S)$  alors  $F(R) = F(S)$ .*

En généralisant un résultat de Keenan ([1]) concernant les fonctions du type  $\langle 2 \rangle$  uniquement, on obtient aisément :

*Proposition 2: La fonction  $F$  du type  $\langle n \rangle$  est réductible si et seulement s'il existe une séquence  $h_2, \dots, h_n$  de fonctions positives du type  $\langle 1 \rangle$  qui affine  $F$ .*

Pour étendre ce résultat aux fonctions faiblement réductibles, il faut restreindre la notion d'affinement aux relations-produits :

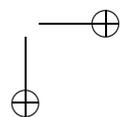
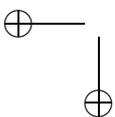
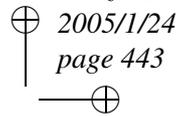
*Definition 5: Soit  $h_2, \dots, h_n$  une séquence de  $n - 1$  fonctions positives de type  $\langle 1 \rangle$  et  $F$  une fonction du type  $\langle n \rangle$ . Nous dirons que cette séquence affine  $F$  relativement aux relations-produits si et seulement si pour tous  $R, S \in PROD(n)$  si  $h_2 \circ \dots \circ h_n(R) = h_2 \circ \dots \circ h_n(S)$  alors  $F(R) = F(S)$ .*

*La suite  $h_2 \circ \dots \circ h_n$  sera notée par  $h^{n-1}$  et la suite  $Q_2 \times \dots \times Q_n$  par  $Q^{n-1}$ .*

A partir de la définition 1 on obtient le lemme suivant :

*Lemme: Soit  $h_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) des fonctions positives de type  $\langle 1 \rangle$  et  $P, Q_i \subseteq M$ . Si, pour tout  $i$  ( $2 \leq i \leq n$ ),  $h_i(Q_i) = 1$  alors  $h^{n-1}(P \times Q^{n-1}) = P$  et s'il existe un  $i$  tel que  $h_i(Q_i) = 0$ , alors  $h^{n-1}(P \times Q^{n-1}) = \emptyset$ .*

Ce lemme et la définition 5 permettent de prouver :



*Proposition 3: La fonction  $F$  de type  $\langle n \rangle$  est faiblement réductible si et seulement s'il existe une séquence  $h_2, \dots, h_n$  de fonctions positives de type  $\langle 1 \rangle$  qui affine  $F$  relativement aux relations-produits.*

*Démonstration :*

(i) Condition suffisante : Supposons que  $F$  de type  $\langle n \rangle$  soit faiblement réductible. Cela veut dire que  $F(R) = h_1 \circ h^{n-1}(R)$  pour tout  $R \in PROD(n)$ . Soit  $S \in PROD(n)$  et  $h^{n-1}(R) = h^{n-1}(S)$ . Alors  $F(R) = h_1 \circ h^{n-1}(R) = h_1((h^{n-1})(R)) = h_1((h^{n-1})(S)) = F(S)$ .

(ii) Condition nécessaire : Supposons que  $h^{n-1}$  affine  $F$ . Associons à  $h^{n-1}$  une fonction  $g_{h^{n-1}}$  de type  $\langle 1 \rangle$  définie comme suit :  $g_{h^{n-1}}(P) = 1$  si et seulement s'il existe  $S \in PROD(n)$  tel que  $F(S) = 1$  et  $h^{n-1}(S) = P$ . Alors pour  $R \in PROD(n)$ ,  $g_{h^{n-1}}(h^{n-1}(R)) = 1$  si et seulement s'il existe  $S \in PROD(n)$  tel que  $F(S) = 1$  et  $h^{n-1}(S) = h^{n-1}(R)$ . Par conséquent, étant donné que  $h^{n-1}$  affine  $F$  cela veut dire que  $g_{h^{n-1}} \circ h^{n-1}(R) = 1$  si et seulement si  $F(R) = 1$  et donc  $F$  est faiblement réductible.

En considérant en détail les relations-produits qui donnent lieu à l'affinement d'une fonction faiblement réductible et les fonctions qui ne peuvent pas être affinées on peut formuler une condition équivalente à la condition d'affinement. Soit la définition :

*Definition 6: La fonction  $F$  de type  $\langle n \rangle$  est constante relativement à la suite  $Q^{n-1}$  si et seulement si pour tout  $P_1$  et  $P_2$  on a  $F(P_1 \times Q^{n-1}) = F(P_2 \times Q^{n-1})$ .*

Avec cette définition on prouve la proposition suivante :

*Proposition 4: La fonction  $F$  de type  $\langle n \rangle$  est faiblement réductible si et seulement si on a  $F(P \times P^{n-1}) = F(P \times Q^{n-1})$  pour tout  $P$  et pour toutes suites  $P^{n-1}$  et  $Q^{n-1}$  relativement auxquelles  $F$  n'est pas constante.*

*Démonstration :*

(i) Condition suffisante : Supposons *a contrario* que pour un  $P$  et deux suites  $P^{n-1}$  et  $Q^{n-1}$  pour lesquelles  $F$  n'est pas constante, on ait  $F(P \times P^{n-1}) \neq F(P \times Q^{n-1})$ . Cela veut dire d'après la proposition 3, étant donné que  $F$  est faiblement réductible, qu'il existe une suite  $h^{n-1}$  qui affine  $F$  et telle que  $h^{n-1}(P \times P^{n-1}) \neq h^{n-1}(P \times Q^{n-1})$ . Cette inégalité implique, d'après le lemme, qu'il existe un  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , tel que soit  $h_i(P_i) = 0$  soit  $h_i(Q_i) = 0$ . Mais dans ce cas  $F$  serait constante relativement à  $P^{n-1}$  ou à  $Q^{n-1}$ . Contradiction

(ii) Condition nécessaire : Si  $F$  est constante relativement à toutes les suites

alors  $F$  prend la même valeur pour toutes les relations-produits et donc  $F$ , en vertu de la proposition 1, est faiblement réductible. Pour considérer d'autres cas définissons pour  $2 \leq i \leq n$  et tout  $Q \subseteq M$  les fonctions  $h_i$  du type  $\langle 1 \rangle$  de la façon suivante :  $h_i(Q) = 1$  si et seulement s'il existe une suite  $Q^{n-1}$  telle que  $F$  n'est pas constante relativement à  $Q^{n-1}$  et  $Q = Q_i$ . Nous allons montrer que la suite  $h^{n-1} = h_1 \circ \dots \circ h_n$  formée de  $h_i$  ainsi définis, affine  $F$  relativement aux relations-produits. Supposons donc que pour  $P_1, P_2, P^{n-1}$  et  $Q^{n-1}$  arbitraires nous ayons l'égalité  $(e_1)$  :  $h^{n-1}(P_1 \times P^{n-1}) = h^{n-1}(P_2 \times Q^{n-1})$ . Il faut démontrer l'égalité  $(e_2)$  :  $F(P_1 \times P^{n-1}) = F(P_2 \times Q^{n-1})$ . Considérons trois cas.

1er cas :  $F$  est constante relativement à  $P^{n-1}$  et à  $Q^{n-1}$ . Dans ce cas  $(e_2)$  est trivialement vraie.

2ème cas :  $F$  n'est constante ni relativement à  $P^{n-1}$  ni relativement à  $Q^{n-1}$ . Dans ce cas l'égalité  $(e_1)$  et le lemme impliquent que  $P_1 = P_2$  ce qui entraîne, avec l'hypothèse de la proposition, l'égalité  $(e_2)$ .

3ème cas :  $F$  n'est pas constante relativement à  $P^{n-1}$  et est constante relativement à  $Q^{n-1}$ . Dans ce cas l'égalité  $(e_1)$  et le lemme impliquent que  $P_1 = \emptyset$  ce qui assure la validité de  $(e_2)$ .

La proposition 4 donne le corollaire suivant :

*Corollaire : La fonction  $F$  de type  $\langle n \rangle$  est fortement irréductible si et seulement s'il existe  $P, P_1, P_2, P_3, P_4$  et  $P^{n-1}, Q^{n-1}$  tels que  $F(P_1 \times P^{n-1}) \neq F(P_2 \times P^{n-1}), F(P_3 \times Q^{n-1}) \neq F(P_4 \times Q^{n-1})$  et  $F(P \times P^{n-1}) \neq F(P \times Q^{n-1})$ .*

Exemples : Nous avons vu que l'ensemble des relations transitives constitue une fonction de type  $\langle 2 \rangle$  qui est faiblement réductible. En revanche, on montre aisément avec l'aide du corollaire que l'ensemble des relations asymétriques ou l'ensemble des relations symétriques constituent des fonctions de type  $\langle 2 \rangle$  qui sont fortement irréductibles.

Comme autre exemple considérons les fonctions  $F^n$  telles que pour  $R \in R_n$ ,  $F^n(R) = 1$  si et seulement si  $R$  contient exactement  $k$  ( $k \leq \text{card}(M)$ ) n-uplets réflexifs (le n-uplet  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  est réflexif si et seulement si pour tout  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ ,  $x_i = x_j$ ). Toute fonction  $F^n$  ainsi définie est fortement irréductible.

CNRS, Paris

E-mail: Richard.Zuber@linguist.jussieu.fr



### RÉFÉRENCES

- [1] Keenan, E.L. (1996) “Further Beyond the Frege Boundary”, in van der Does, J. and van Eijck, J. (eds.) *Quantifiers, Logic and Language*, CSLI, Stanford University, 179–201.
- [2] Mostowski, A. (1957) *On a generalization of quantifiers*, *Fund. Math.*, 12–36.
- [3] Westerstahl, D. (1994) “Iterated Quantifiers”, in Kanazawa, M. and Pignon, Ch. (eds.) *Dynamics, Polarity and Quantification*, CSLI, Stanford University, 173–209.

