Logique & Analyse **183–184** (2003), 441–446

QUANTIFICATEURS FAIBLEMENT RÉDUCTIBLES

R. ZUBER

Résumé

On démontre quelques propriétés des quantificateurs faiblement réductibles en généralisant notamment certains résultats de Keenan. Un quantificateur Q de type $< n >$ est faiblement réductible si et seulement s'il existe une itération de n quantificateurs de type $< 1 >$ qui prend les mêmes valeurs que Q pour les relations-produits.

Various properties of weakly reducible quantifiers are characterized, some of which are generalisations of some results obtained by Keenan. A quantifier Q of type $< n >$ is weakly reducible iff there exists an iteration of n type $< 1 >$ quantifiers which takes the same values as Q on product-relations.

Suite à la généralisation proposée par Mostowski ([2]), on considère que les quantificateurs (généralisés) sont des relations entre des relations (sur un univers donné M). En particulier un quantificateur de type $< n >$ est une fonction de l'ensemble des relations à n places dans $\{0, 1\}$. Par exemple les propriétés de relations binaires telles que $SYMETRIQUE$ ou $TRANSI$-$TIVE$ sont des quantificateurs de type $< 2 >$. La classe des quantificateurs de type $< n >$ contient des quantificateurs réductibles, c'est-à-dire ceux qui sont équivalents à une itération, au sens précis, de n quantificateurs de type $< 1 >$.

Soit R_n la classe des relations n-aires. Pour définir l'itération des quantificateurs on étend le domaine d'application des quantificateurs de type $< 1 >$: ce sont alors des applications de R_{n+1} dans R_n définies comme :

Definition 1: *F est une fonction de type $< 1 >$ si et seulement si :*
(i) le domaine de $F = \bigcup_{n \geq 0} R_{n+1}$, l'image de $F \subseteq \bigcup_{n \geq 0} R_n$
(ii) pour tout $n \geq 0$, et pour tout $R \in R_{n+1}$,
$F(R) = \{< a_1, \ldots, a_n >: F\{b :< a_1, \ldots, a_n, b >\in R\} = 1\}$.

La définition suivante précise la notion de réductibilité d'une fonction (d'un quantificateur) de type $< n >$:

Definition 2: *La fonction F de R_n dans* $\{0, 1\}$ *est réductible si et seulement s'il existe n fonctions $h_1, \dots h_n$ de type $< 1 >$ telles que $F = h_1 \circ \dots \circ h_n$.*

Notons l'observation suivante (cf. [1]). Appelons la fonction F de type $< n >$ *positive* si $F(\emptyset) = 0$. Par définition $F\neg$ est la fonction qui à chaque R associe $F(R')$ (où R' est le complémentaire de R) et $\neg F$ est la fonction qui à chaque R associe $F(R)'$. On a l'égalité suivante pour tout f et g de type $< 1 >$: $f \circ g(R) = f\neg \circ \neg g(R)$. Étant donné que soit g soit $\neg g$ est positif, il s'ensuit que dans la définition 2 on peut remplacer, sans perte de généralité, toute fonction h_i, pour $i \geq 2$, par une fonction positive.

Des fonctions réductibles et des itérations sont étudiées dans [1] et [3]. L'article de Keenan donne plusieurs exemples de fonctions non-réductibles. Il s'avère que leurs propriétés sont essentiellement liées aux types de relations qu'elles prennent comme arguments : leurs comportement est déterminé par les arguments qui sont des relations-produits. Une relation n-aire R est une relation-produit, $R \in PROD(n)$, si et seulement si R est de la forme $P_1 \times, \dots, \times P_n$, pour $P_i \subseteq M$. La proposition suivante est alors vraie (cf. [1]) :

Proposition 1: *Soit F et G des fonctions de type $< n >$ réductibles. Si $F(R) = G(R)$ pour tout $R \in PROD(n)$ alors $F(R) = G(R)$ pour tout $R \in R_n$.*

La proposition 1 permet de tester la non-réductibilité de certaines fonctions. Considérons la fonction correspondant à la propriété $TRANSITIVE$. Puisque toute relation-produit binaire est transitive, nous avons $1 \circ h(R) = TRANSITIVE(R)$, pour toute relation $R \in PROD(2)$ (où 1 est la fonction de type $< 1 >$ qui donne la valeur 1 pour tout argument et h est une fonction positive arbitraire de type $< 1 >$). Étant donné que cette égalité n'est pas valable pour tout R, $TRANSITIVE$ n'est pas réductible. Cependant cette fonction est différente de $ASYMETRIQUE$ par exemple, car pour cette dernière, il est impossible, comme nous verrons, de trouver une fonction réductible qui prendrait les mêmes valeurs que $ASYMETRIQUE$ sur les relations-produits. Une caractérisation de cette différence est l'objet de cette note.

Soit la définition suivante :

Definition 3: *La fonction F de type $< n >$ est faiblement réductible si et seulement s'il existe une fonction G réductible telle que $F(R) = G(R)$ pour tout $R \in PROD(n)$.*
Une fonction qui n'est pas faiblement réductible est fortement irréductible.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit faiblement réductible s'obtient en utilisant la condition analogue pour la réductibilité en général proposée dans [1]. Soit la définition suivante :

Definition 4: *Soit $h_2, \ldots, h_n$ une séquence de $n-1$ fonctions positives du type $< 1 >$ et F une fonction du type $< n >$. Nous dirons que cette séquence affine F si et seulement si pour toute relation R, toute relation S si $h_2\circ, \ldots, \circ h_n(R) = h_2\circ, \ldots, \circ h_n(S)$ alors $F(R) = F(S)$.*

En généralisant un résultat de Keenan ([1]) concernant les fonctions du type $< 2 >$ uniquement, on obtient aisément :

Proposition 2: *La fonction F du type $< n >$ est réductible si et seulement s'il existe une séquence $h_2, \ldots, h_n$ de fonctions positives du type $< 1 >$ qui affine F.*

Pour étendre ce résultat aux fonctions faiblement réductibles, il faut restreindre la notion d'affinement aux relations-produits :

Definition 5: *Soit $h_2, \ldots, h_n$ une séquence de $n-1$ fonctions positives de type $< 1 >$ et F une fonction du type $< n >$. Nous dirons que cette séquence affine F relativement aux relations-produits si et seulement si pour tous $R, S \in PROD(n)$ si $h_2\circ, \ldots, \circ h_n(R) = h_2\circ, \ldots, \circ h_n(S)$ alors $F(R) = F(S)$.*
La suite $h_2\circ, \ldots, \circ h_n$ sera notée par h^{n-1} et la suite $Q_2 \times \ldots \times Q_n$ par Q^{n-1}.

A partir de la définition 1 on obtient le lemme suivant :

Lemme: *Soit h_i $(2 \leq i \leq n)$ des fonctions positives de type $< 1 >$ et $P, Q_i \subseteq M$. Si, pour tout i $(2 \leq i \leq n)$, $h_i(Q_i) = 1$ alors $h^{n-1}(P \times Q^{n-1}) = P$ et s'il existe un i tel que $h_i(Q_i) = 0$, alors $h^{n-1}(P \times Q^{n-1}) = \emptyset$.*

Ce lemme et la définition 5 permettent de prouver :

Proposition 3: *La fonction F de type $< n >$ est faiblement réductible si et seulement s'il existe une séquence $h_2, \ldots, h_n$ de fonctions positives de type $< 1 >$ qui affine F relativement aux relations-produits.*

Démonstration :
(i) Condition suffisante : Supposons que F de type $< n >$ soit faiblement réductible. Cela veut dire que $F(R) = h_1 \circ h^{n-1}(R)$ pour tout $R \in PROD(n)$. Soit $S \in PROD(n)$ et $h^{n-1}(R) = h^{n-1}(S)$. Alors $F(R) = h_1 \circ h^{n-1}(R) = h_1((h^{n-1})(R)) = h_1((h^{n-1})(S)) = F(S)$.
(ii) Condition nécessaire : Supposons que h^{n-1} affine F. Associons à h^{n-1} une fonction $g_{h^{n-1}}$ de type $< 1 >$ définie comme suit : $g_{h^{n-1}}(P) = 1$ si et seulement s'il existe $S \in PROD(n)$ tel que $F(S) = 1$ et $h^{n-1}(S) = P$. Alors pour $R \in PROD(n)$, $g_{h^{n-1}}(h^{n-1}(R)) = 1$ si et seulement s'il existe $S \in PROD(n)$ tel que $F(S) = 1$ et $h^{n-1}(S) = h^{n-1}(R)$. Par conséquent, étant donné que h^{n-1} affine F cela veut dire que $g_{h^{n-1}} \circ h^{n-1}(R) = 1$ si et seulement si $F(R) = 1$ et donc F est faiblement réductible.

En considérant en détail les relations-produits qui donnent lieu à l'affinement d'une fonction faiblement réductible et les fonctions qui ne peuvent pas être affinées on peut formuler une condition équivalente à la condition d'affinement. Soit la définition :

Definition 6: *La fonction F de type $< n >$ est constante relativement à la suite Q^{n-1} si et seulement si pour tout P_1 et P_2 on a $F(P_1 \times Q^{n-1}) = F(P_2 \times Q^{n-1})$.*

Avec cette définition on prouve la proposition suivante :

Proposition 4: *La fonction F de type $< n >$ est faiblement réductible si et seulement si on a $F(P \times P^{n-1}) = F(P \times Q^{n-1})$ pour tout P et pour toutes suites P^{n-1} et Q^{n-1} relativement auxquelles F n'est pas constante.*

Démonstration :
(i) Condition suffisante : Supposons *a contrario* que pour un P et deux suites P^{n-1} et Q^{n-1} pour lesquelles F n'est pas constante, on ait $F(P \times P^{n-1}) \neq F(P \times Q^{n-1})$. Cela veut dire d'après la proposition 3, étant donné que F est faiblement réductible, qu'il existe une suite h^{n-1} qui affine F et telle que $h^{n-1}(P \times P^{n-1}) \neq h^{n-1}(P \times Q^{n-1})$. Cette inégalité implique, d'après le lemme, qu'il existe un i, $2 \leq i \leq n$, tel que soit $h_i(P_i) = 0$ soit $h_i(Q_i) = 0$. Mais dans ce cas F serait constante relativement à P^{n-1} ou à Q^{n-1}. Contradiction
(ii) Condition nécessaire : Si F est constante relativement à toutes les suites

alors F prend la même valeur pour toutes les relations-produits et donc F, en vertu de la proposition 1, est faiblement réductible. Pour considérer d'autres cas définissons pour $2 \leq i \leq n$ et tout $Q \subseteq M$ les fonctions h_i du type $< 1 >$ de la façon suivante : $h_i(Q) = 1$ si et seulement s'il existe une suite Q^{n-1} telle que F n'est pas constante relativement à Q^{n-1} et $Q = Q_i$. Nous allons montrer que la suite $h^{n-1} = h_1 \circ \ldots \circ h_n$ formée de h_i ainsi définis, affine F relativement aux relations-produits. Supposons donc que pour P_1, P_2, P^{n-1} et Q^{n-1} arbitraires nous ayons l'égalité (e_1) : $h^{n-1}(P_1 \times P^{n-1}) = h^{n-1}(P_2 \times Q^{n-1})$. Il faut démontrer l'égalité (e_2) : $F(P_1 \times P^{n-1}) = F(P_2 \times Q^{n-1})$. Considérons trois cas.
1er cas : F est constante relativement à P^{n-1} et à Q^{n-1}. Dans ce cas (e_2) est trivialement vraie.
2ème cas : F n'est constante ni relativement à P^{n-1} ni relativement à Q^{n-1}. Dans ce cas l'égalité (e_1) et le lemme impliquent que $P_1 = P_2$ ce qui entraîne, avec l'hypothèse de la proposition, l'égalité (e_2).
3ème cas : F n'est pas constante relativement à P^{n-1} et est constante relativement à Q^{n-1}. Dans ce cas l'égalité (e_1) et le lemme impliquent que $P_1 = \emptyset$ ce qui assure la validité de (e_2).

La proposition 4 donne le corollaire suivant :

Corollaire : *La fonction F de type $< n >$ est fortement irréductible si et seulement s'il existe P, P_1, P_2, P_3, P_4 et P^{n-1}, Q^{n-1} tels que $F(P_1 \times P^{n-1}) \neq F(P_2 \times P^{n-1})$, $F(P_3 \times Q^{n-1}) \neq F(P_4 \times Q^{n-1})$ et $F(P \times P^{n-1}) \neq F(P \times Q^{n-1})$.*

Exemples : Nous avons vu que l'ensemble des relations transitives constitue une fonction de type $< 2 >$ qui est faiblement réductible. En revanche, on montre aisément avec l'aide du corollaire que l'ensemble des relations asymétriques ou l'ensemble des relations symétriques constituent des fonctions de type $< 2 >$ qui sont fortement irréductibles.
Comme autre exemple considérons les fonctions F^n telles que pour $R \in R_n$, $F^n(R) = 1$ si et seulement si R contient exactement k ($k \leq card(M)$) n-uplets réflexifs (le n-uplet $< x_1, \ldots, x_n >$ est réflexif si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $x_i = x_j$). Toute fonction F^n ainsi définie est fortement irréductible.

CNRS, Paris
E-mail: `Richard.Zuber@linguist.jussieu.fr`

RÉFÉRENCES

[1] Keenan, E.L. (1996) "Further Beyond the Frege Boundary", in van der Does, J. and van Eijck, J. (eds.) *Quantifiers, Logic and Language*, CSLI, Stanford University, 179–201.

[2] Mostowski, A. (1957) *On a generalization of quantifiers*, Fund. Math., 12–36.

[3] Westerstahl, D. (1994) "Iterated Quantifiers", in Kanazawa, M. and Pinon, Ch. (eds.) *Dynamics, Polarity and Quantification*, CSLI, Stanford University, 173–209.