Logique & Analyse **167–168** (1999), 243–282

DIALOGISCHE MODALLOGIK (FÜR T, B, $S4$ UND $S5$)*

SHAHID RAHMAN UND HELGE RÜCKERT

Zusammenfassung
In diesem Aufsatz wird der dialogische Ansatz in der Logik, der von Paul Lorenzen angeregt, und von Kuno Lorenz für die klassische und die effektive (bzw. intuitionistische) Junktoren- und Quantorenlogik ausgearbeitet wurde, so erweitert, daß in ihm auch Modallogik betrieben werden kann.

Nach einer Einleitung wird im ersten Abschnitt das bisherige Regelwerk um die Partikelregeln für die Modaloperatoren sowie die modalen Rahmenregeln erweitert, so daßklassische und effektive modale Dialoge für die Systeme T, B, $S4$ und $S5$ gespielt werden können. Zu diesem Zweck muß das neue Konzept des Dialogkontextes eingeführt werden. Im zweiten Abschnitt werden die entsprechenden Strategientableaux dargeboten, zusammen mit Angaben, wie diese in ein bekanntes Entscheidungsverfahren übersetzt werden können. Der Aufsatz endet mit einigen Schlußbemerkungen.

Einleitung

Der dialogische Ansatz war lange Zeit bis auf einige Ausnahmen nur für die klassische und effektive Junktoren- und Quantorenlogik ausgearbeitet worden, was schon durch Paul Lorenzen und Kuno Lorenz bei der Entwicklung der Dialogischen Logik geleistet worden ist (Lorenzen/Lorenz [1978]). Zu den wenigen Versuchen, diesen Ansatz auch für andere Teilbereiche der Logik fruchtbar zu machen, gehören u.a. die Arbeiten von A. Fuhrmann zur Relevanzlogik (s. z.B. Fuhrmann [1985]), sowie einige Ausführungen zur Modallogik in Haas [1984], Kamlah/Lorenzen [1967], Krabbe [1986] und Lorenzen [1987].

*Herrn Prof. Dr. Kuno Lorenz zum 66. Geburtstag.

Diese Ansätze zu einer dialogischen Modallogik stellen so etwas wie Vorgänger zu unserem Aufsatz dar, sie erscheinen uns allerdings als unbefriedigend. Einige prinzipielle Schwächen werden in diesem Aufsatz korrigiert, indem u.a. die folgenden Forderungen beachtet werden:

(1) In der dialogischen Fassung der Modallogik sollen zumindest die gängigsten Systeme (T, $S4$, $S5$) rekonstruiert werden können.
(2) Die Modaloperatoren ($\Box$ und $\Diamond$) sollen wie die übrigen logischen Partikeln (Junktoren, Quantoren) durch Partikelregeln eingeführt werden.
(3) Der Unterschied zwischen klassischer und effektiver Modallogik soll sich alleine durch die alternative Verwendung der klassischen bzw. der effektiven Rahmenregel ergeben.
(4) Das schon bestehende dialogische Gerüst für die Junktoren- und Quantorenlogik soll erhalten bleiben, die Modallogik soll also eine echte Erweiterung des schon bestehenden Ansatzes darstellen, in der der nicht-modale Teil unverändert als Spezialfall wiederzufinden ist.

Zunächst sei als Ausgangspunkt die Junktoren- und Quantorenlogik im dialogischen Ansatz dargestellt:[1]

Rahmenregeln

RR 1 (Ablauf):

Ein Dialog besteht aus einer endlichen Folge von Dialogschritten oder Zügen, in denen zwei Gesprächspartner, der Proponent P *und der Opponent* O*, abwechselnd Argumente (von* O *bzw.* P *gesetzte Aussagen) gemäß den Partikelregeln und den übrigen Rahmenregeln vorbringen. Der erste Dialogschritt ist das Setzen der These des Dialogs durch* P*. Jeder weitere Dialogschritt oder Zug besteht im Vorbringen eines Arguments durch einen der beiden Dialogpartner. Jedes Argument ist entweder ein Angriff auf eine vorangehende Behauptung des Gegners oder eine Verteidigung auf einen vorhergehenden gegnerischen Angriff gemäß den Partikelregeln, jedoch nicht beides zugleich.*

[1] Eine mathematisiertere Formulierung der dialogischen Junktoren- und Quantorenlogik findet sich z.B. in Felscher [1986].

RR 2 (Dialogende):

Ein Dialog ist beendet, wenn dem Spieler am Zug kein nach den Regeln erlaubtes Argument mehr zur Verfügung steht. Einen beendeten Dialog hat derjenige gewonnen, der den letzten Zug gemacht hat, sein Gegner hat den Dialog verloren.

RR 3 (e) (effektive Rahmenregel):

X darf nach eigener Wahl ein beliebiges von Y (X und Y stehen für O *bzw.* P*, wobei* $X \neq Y$*) gesetztes Argument angreifen, soweit dies die Partikelregeln und die übrigen Rahmenregeln zulassen, oder sich auf den letzten noch unbeantworteten Angriff von Y verteidigen.*

oder

RR 3 (k) (klassische Rahmenregel):

X darf nach eigener Wahl ein beliebiges von Y gesetztes Argument angreifen oder sich auf einen beliebigen Angriff von Y verteidigen, soweit dies die Partikelregeln und die übrigen Rahmenregeln zulassen.

RR 4 (keine Verzögerungen):

X darf ein Argument von Y nur dann ein weiteres Mal angreifen bzw. sich auf einen Angriff ein weiteres Mal verteidigen (letzteres ist nur bei klassischer Rahmenregelung erlaubt), wenn sich dadurch neue Zugmöglichkeiten ergeben.[2]

RR 5 (formale Rahmenregel):

P *darf nur solche Primaussagen als Argumente setzen, die* O *bereits zuvor gesetzt hat.* O *darf Primaussagen jederzeit setzen (soweit dies die Partikelregeln und die übrigen Rahmenregeln zulassen). Primaussagen sind (im formalen Dialog) nicht angreifbar.*

[2] Diese Regel, die mit ähnlichem Wortlaut auch schon in Fuhrmann [1985] verwendet wurde, birgt einige Probleme. Im Anhang findet sich eine ausführlichere Formulierung.

Partikelregeln

$\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \bigwedge, \bigvee$	*Angriff*	*Verteidigung*
$A \vee B$	?	A B (Der Verteidiger hat die Wahl)
$A \wedge B$	?L(inks) ?R(echts) (Der Angreifer hat die Wahl)	A B
$A \rightarrow B$	A	B
$\neg A$	A	$\otimes$ (Keine Verteidigung möglich. Nur Gegenangriff spielbar)
$\bigwedge_x A$	$?_n$ (Der Angreifer hat die Wahl)	$A[x/n]$
$\bigvee_x A$	?	$A[x/n]$ (Der Verteidiger hat die Wahl)

Die angegebenen Rahmen- und Partikelregeln definieren die effektiven (bei RR 3(e)) bzw. klassischen (bei RR 3(k)) formalen Dialogspiele.[3] Logische Gültigkeit wird folgendermaßen definiert:

Def. Gültigkeit:

Eine Formel heiße in einer bestimmten Dialogischen Logik gültig, wenn P *unter den entsprechenden Regeln eine (formale) Gewinnstrategie hat. (Eine Gewinnstrategie zu haben, bedeutet, zu allen Zugwahlen des Gegners immer*

[3] Formal deshalb, weil eine formale Rahmenregel verwendet wird, im Gegensatz zu materialen Dialogspielen, die in diesem Aufsatz nicht betrachtet werden.

mindestens selbst eine Zugmöglichkeit zur Verfügung zu haben, so daß man schließlich den Gewinn erzwingen kann.)[4]

Es kann gezeigt werden, daß bei effektiver bzw. klassischer Rahmenregelung sich genau die Formeln als gültig erweisen, die auch in anderen Ansätzen als effektiv bzw. klassisch gültig gelten.[5]

(Anmerkung: Bei den Regeln RR 3 (e) und RR 3 (k) haben wir die symmetrische Variante angegeben. Symmetrisch deshalb, da O und P jeweils gleiche Rechte und Pflichten haben. Es kann gezeigt werden, daß sich die Rechte von O einschränken lassen, die Klasse der Formeln, für die P eine Gewinnstrategie hat, aber unverändert bleibt. Der Einfachheit halber verwenden wir im folgenden in den Beispielen die sogenannten asymmetrischen Rahmenregeln, bei denen sich gegenüber den symmetrischen Varianten nur folgendes ändert: O darf nur jeweils entweder den letzten Zug von P angreifen oder sich auf diesen verteidigen.)

Beispiel 1 (bei RR 3 (e) oder RR 3 (k)):

	O			P	
				$((a \to b) \wedge a) \to b$	(0)
(1)	$(a \to b) \wedge a$	0		b	(8)
(3)	$a \to b$		1	?L	(2)
(5)	a		1	?R	(4)
(7)	b		3	a	(6)

P gewinnt

[4] Der Begriff der Gewinnstrategie kann mit Hilfe einer rekursiven Definition folgendermaßen präzisiert werden: Es gibt eine Gewinnstrategie für P, wenn die Ausgangsstellung (nach Setzen der These) eine Gewinnstellung für P ist. Eine Stellung ist eine Gewinnstellung für P, wenn P zu jeder möglichen Zugwahl von O mindestens einen Zug zur Verfügung hat, der den Dialog gewinnt oder wieder zu einer Gewinnstellung für P führt.

[5] Diesbezügliche Beweise finden sich u.a. in Barth/Krabbe [1982], Krabbe [1985] und Rahman [1993].

Beispiel 2 (bei RR 3 (k)):

	O		P	
			$\bigwedge_x (P_x \vee \neg P_x)$	(0)
(1)	$?_n$	0	$P_n \vee \neg P_n$	(2)
(3)	?	2	$\neg P_n$	(4)
(5)	P_n	4	$\otimes$	
(3′)	?	2	P_n	(6)

P gewinnt

Anmerkungen zu den Beispielen:

Hier wie in der Folge sind die Beispiele so einfach gewählt, daß man anhand eines Dialoges auch direkt sehen kann, ob P eine Gewinnstrategie hat oder nicht. Während für Beispiel 1 kein Unterschied zwischen effektiver und klassischer Rahmenregelung besteht, ist die Formel aus Beispiel 2 nur bei letzterer gewinnbar.

Zur Notation: In der O-Spalte sind die Züge von O notiert, in der P-Spalte diejenigen von P. Die Zahlen am linken und rechten Rand geben an, in welcher Reihenfolge die Züge vorgebracht wurden. Der 0.Zug stellt das uneigentliche Anfangsargument dar, um das in der Folge argumentiert wird. Angriffe sind durch eine Zahl am inneren Rand gekennzeichnet, die angibt, gegen welchen Zug sich der Angriff richtet. Die Verteidigung auf einen Angriff steht immer in derselben Zeile wie dieser. Einen Angriff mit zugehöriger Verteidigung, also eine komplette Zeile, bezeichnet man als Runde.[6]

(Wie in Beispiel 2 ersichtlich kann es bei klassischer Rahmenregelung möglich sein, daß sich P auf einen Angriff, auf den er sich zuvor schon verteidigt hat, noch einmal (anders) verteidigt. Um für diese zweite Verteidigung in der Notation Platz zu schaffen, wird der entsprechende Angriff noch einmal notiert. Man beachte aber, daß es sich dabei nicht um einen Zug im Dialog handelt, was durch einen Strich wie bei (3′) in Beispiel 2 angedeutet wird.)

[6] In der Literatur zur Dialogischen Logik sind auch andere Konventionen zur Notation von Dialogen gebräuchlich. Insbesondere werden die einzelnen Züge meist in der Reihenfolge notiert, in der sie auch im Dialog ausgeführt werden. Diese Notation kann unter Umständen bei der Beweisführung von Metatheoremen von Vorteil sein. Wir haben uns dagegen dafür entschieden, jeweils Angriff und zugehörige Verteidigung in einer Zeile zu notieren, da dies zum einen für das eigenständige Spielen von Dialogen hilfreich ist (man sieht stets, welche Angriffe noch nicht verteidigt sind), und da zum anderen der Begriff der Runde für die Formulierung von Strategientableaux wichtig ist (siehe Abschnitt II).

I. Modale Dialoge

a) Dialogkontexte

Um die Regeln für den Umgang mit Formeln, die Modaloperatoren enthalten, formulieren zu können, ist es zunächst nötig, das neue Konzept 'Dialogkontext' einzuführen.[7] Die Dialogische Logik soll so erweitert werden, daß ein Dialog in mehreren Dialogkontexten ablaufen kann, d.h. daß die Züge unter unterschiedlichen Bedingungen gesetzt werden können. Die nicht-modalen Dialoge ergeben sich so als Spezialfall, bei dem der Dialog durchgehend im Ausgangsdialogkontext verbleibt.

Ein Dialogkontext ist charakterisiert

(1) dadurch, aus welchem anderen Dialogkontext er innerhalb des Dialoges eröffnet worden ist,
(2) durch die Züge, die von O und P in diesem Dialogkontext gesetzt worden sind, und
(3) dadurch, welche Primaussagen in diesem Dialogkontext gesetzt werden dürfen.

Dialogkontexte unterscheiden sich vor allem dadurch, welche Primaussagen gesetzt werden dürfen. In der Folge wollen wir uns nur noch mit formalen Dialogen beschäftigen, in denen P nicht weiß, welche Primaussagen sich in einem gegebenen Dialogkontext erfolgreich verteidigen lassen. Er darf deshalb selbst in jedem Dialogkontext nur diejenigen Primaussagen verwenden, die O in diesem Dialogkontext schon zugestanden hat. Bei modalen Dialogen muß deshalb die formale Rahmenregel (RR 5) auf Dialogkontexte relativiert werden:

RR 5 (m) (formale Rahmenregel für modale Dialoge):

P darf in einem Dialogkontext nur solche Primaussagen als Argumente setzen, die O bereits zuvor in dem selben Dialogkontext gesetzt hat. O darf Primaussagen jederzeit setzen (soweit dies die Partikelregeln und die übrigen Rahmenregeln zulassen). Primaussagen sind (im formalen modalen Dialog) nicht angreifbar.

Die übrigen Rahmenregeln bleiben in ihrer bisherigen Form bestehen.

[7] Bei den Dialogkontexten handelt es sich um die dialogischen Gegenstücke zu den möglichen Welten in der Standard-Kripke-Semantik für Modallogik (für eine Einführung in die nicht-dialogische Modallogik s. z.B. Hughes/Cresswell [1978]).

Zur Notation:

Für spätere Zwecke ist es günstig, ein Numerierungssystem, sowie einige Definitionen einzuführen:

a) Der Ausgangs-Dialogkontext, in dem die These des Dialoges gesetzt wird, erhält die Nummer 1.
b) Der erste Dialogkontext, der aus dem Dialogkontext mit der Nummer n eröffnet wird, erhält die Nummer $n.1$, der zweite die Nummer $n.2$, und entsprechend der m-te die Nummer $n.m$.[8]
c) Ein Dialogkontext n heiße einem Dialogkontext $n.m$ übergeordnet, entsprechend heiße $n.m$ n untergeordnet.
d) Ein Dialogkontext n stellt für $n.m.l$ einen übergeordneten Dialogkontext 2.Stufe dar, $n.m.l$ dagegen bzgl. n einen untergeordneten Dialogkontext 2.Stufe. Entsprechend seien über- und Unterordnung für beliebige Stufen definiert.
e) Bei der Notation eines modalen Dialoges wird bei Wechsel des Dialogkontextes jeweils ein Querstrich gezogen, und links oben in der O-Spalte die Nummer die Dialogkontextes notiert, in dem die Argumentation fortgeführt wird.

b) Partikelregeln für $\Box$ und $\Diamond$

Die Partikelregeln für den Notwendigkeits- und den Möglichkeitsoperator[9] werden folgendermaßen eingeführt:

$\Box, \Diamond$	*Angriff*	*Verteidigung*
$\Box A$ (in Dialogkontext a)	? (in einem zulässigen Dialogkontext β, den der Angreifer wählt)	A (in β)

[8] Dieses Numerierungssystem entspricht genau demjenigen für die möglichen Welten in Fitting [1993].

[9] Wir folgen in diesem Aufsatz der allgemein üblichen Notation mit '$\Box$' für den Notwendigkeits- und '$\Diamond$' für den Möglichkeitsoperator. Vielleicht ist es einer Überlegung wert, statt dieser Zeichen wie in Lorenz [1995] '$\triangle$' und '∇' zu verwenden, da die Modaloperatoren offensichtliche Parallelen zu den Quantoren aufweisen.

$\Diamond A$ (in Dialogkontext a)	? (in a)	A (in einem zulässigen Dialogkontext β, den der Verteidiger wählt)

Anmerkungen:

Durch $\Box A$ verpflichtet man sich, A in einem Dialogkontext, den der Angreifer nach den gleich anzugebenden modalen Rahmenregeln wählen kann, zu verteidigen. Durch $\Diamond A$ ist man darauf festgelegt, A in mindestens einem Dialogkontext, den man gemäß den modalen Rahmenregeln selbst wählen kann, verteidigen zu können.

Der Angriff auf ein $\Box A$ bzw. die Verteidigung eines $\Diamond A$ sind die einzigen Gelegenheiten in einem Dialog, den Dialogkontext zu wechseln. Das heißt u.a. auch, daß die in der Einleitung angegebenen Partikelregeln für Junktoren und Quantoren für die modalen Dialoge erhalten bleiben, mit der zusätzlichen Bestimmung, daß der angegriffene Zug, der Angriff und die Verteidigung immer im gleichen Dialogkontext zu stehen haben.

Um das Regelwerk für die modalen Dialoge zu komplettieren, kommen wir nun zu den modalen Rahmenregeln, die angeben, welche Dialogkontexte bei einer Dialogkontext-Wahl zulässig sind.

c) Modale Rahmenregeln

Wie schon zuvor erwähnt, ist ein Dialogkontextwechsel nur im Falle eines Angriffes auf ein $\Box A$ oder der Verteidigung eines $\Diamond A$ möglich. Diese beiden Fälle zusammen genommen bezeichnen wir als Dialogkontext-Wahlen.

Die unterschiedlichen Modallogik-Systeme T, B, $S4$ und $S5$ unterscheiden sich in ihrer dialogischen Fassung nur in den modalen Rahmenregeln, die diese Dialogkontext-Wahlen reglementieren. Diese bestehen aus drei Teilen, die Unterschiede ergeben sich nur aus dem dritten.

RR 6.1:

Bei einer Dialogkontext-Wahl kann O *jeden beliebigen schon vorhandenen Dialogkontext wählen oder einen neuen eröffnen.*[10]

Während O bei Dialogkontext-Wahlen also keinerlei Beschränkungen unterliegt, darf P nur bestimmte schon vorhandene Dialogkontexte wählen (neue Dialogkontexte eröffnen darf er prinzipiell nicht).

Für alle vier Systeme gilt, daß P bei einer Dialogkontext-Wahl den Dialogkontext nicht unbedingt wechseln muß, sondern ihn auch beibehalten kann (wie es bei Junktoren und Quantoren ja die Pflicht ist):

RR 6.2:

Bei einer Dialogkontext-Wahl ist es P *erlaubt, den Dialogkontext beizubehalten.*[11]

Bzgl. der dritten Teilregel unterscheiden sich T, B, $S4$ und $S5$:[12]

[10] Aus strategischen Überlegungen ergibt sich sehr leicht, daß es für O nie ein Fehler sein kann, einen neuen Dialogkontext zu eröffnen. Dies liegt daran, daß P bei formaler Rahmenregelung nur gewinnen kann, wenn er eine Primformel, die O in einem Dialogkontext gesetzt hat, übernimmt, um erfolgreich anzugreifen, oder sich zu verteidigen. Deshalb wird P bestrebt sein, die Argumentation möglichst immer in solchen Dialogkontexten stattfinden zu lassen, in denen O möglichst viele (bzw. die richtigen) Formeln schon selbst gesetzt hat. Analog wird O, um den Gewinn von P möglichst zu verhindern, immer versuchen, die Argumentation, in neue Dialogkontexte überzuleiten, in denen er noch nichts zugegeben hat.
In der Folge nehmen wir deshalb immer an, daß O bei Dialogkontext-Wahlen immer einen neuen Dialogkontext eröffnet (wenn die Nicht-Verzögerungsregel dies erlaubt). Für den Fall, daß er das nicht tun würde, und einen schon vorhandenen Kontext wählte, so würde dieser damit automatisch zu einem untergeordneten Dialogkontext gegenüber dem Dialogkontext, in dem die Wahl stattgefunden hat. (So kann es dann auch vorkommen, daß ein Dialogkontext gegenüber einem anderen sowohl unter- als auch übergeordnet ist.) Entsprechend sind die Definitionen der Unter- oder Überordnung beliebiger Stufe zu erweitern.

[11] Diese Regel entspricht der Reflexivität der Relation R, die in der Standard-Semantik zwischen den möglichen Welten besteht. Läßt man diese Regel weg, erhält man die dialogischen Gegenstücke zu den Systemen ohne Reflexivität, in denen Beispiel 3 (s. später) für P nicht mehr gewinnbar ist.

[12] Die modalen Rahmenregeln sind so formuliert, daß P in den Systemen B, $S4$ und $S5$ gegenüber T zusätzliche Zugmöglichkeiten erhält, aber keine einbüßt. Deshalb ist jede in DML-T-k (bzw. DML-T-e) gültige Formel auch in allen anderen klassischen (bzw. effektiven) Systemen gültig. Entsprechende Verhältnisse bestehen auch zwischen B- und $S5$-Gültigkeit, sowie zwischen $S4$- und $S5$-Gültigkeit.

RR 6.3 (T):

Bei einer Dialogkontext-Wahl kann P *einen schon vorhandenen untergeordneten Dialogkontext 1.Stufe wählen.*

RR 6.3 (B):

Bei einer Dialogkontext-Wahl kann P *einen schon vorhandenen unter- oder übergeordneten Dialogkontext 1.Stufe wählen.*[13]

RR 6.3 ($S4$):

Bei einer Dialogkontext-Wahl kann P *einen schon vorhandenen untergeordneten Dialogkontext beliebiger Stufe wählen.*[14]

RR 6.3 ($S5$):

Bei einer Dialogkontext-Wahl kann P *einen beliebigen schon vorhandenen Dialogkontext wählen.*[15]

d) Übersicht

Die angegebenen Regeln liefern eine dialogische Fassung der vier modallogischen Systeme T, B, $S4$ und $S5$, jeweils in einer effektiven und einer klassischen Variante. Der Übersichtlichkeit halber sei kurz angegebenen, durch welche Rahmenregeln diese acht dialogischen Modallogik-Systeme charakterisiert sind (die Partikelregeln stimmen bei allen überein):

(1) *DML-T-k (Dialogische Modallogik, System T, klassisch):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (k) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 (T)

(2) *DML-T-e (Dialogische Modallogik, System T, effektiv):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (e) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 (T)

[13] Daß auch ein übergeordneter Dialogkontext gewählt werden kann, entspricht der Symmetrie von R in der Standardsemantik.

[14] Die Änderung von T zu $S4$, die darin besteht, daß in $S4$ untergeordnete Dialogkontexte beliebiger Stufe ausgewählt werden können, entspricht der Hinzunahme der Transitivität von R in der Standard-Semantik.

[15] In der Standard-Semantik ist R reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(3) *DML-B-k (Dialogische Modallogik, System B, klassisch):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (k) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 (B)
(4) *DML-B-e (Dialogische Modallogik, System B, effektiv):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (e) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 (B)
(5) *DML-$S4$-k (Dialogische Modallogik, System $S4$, klassisch):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (k) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 ($S4$)
(6) *DML-$S4$-e (Dialogische Modallogik, System $S4$, effektiv):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (e) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 ($S4$)
(7) *DML-$S5$-k (Dialogische Modallogik, System $S5$, klassisch):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (k) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 ($S5$)
(8) *DML-$S5$-e (Dialogische Modallogik, System $S5$, effektiv):*
RR 1 + RR 2 + RR 3 (e) + RR 4 + RR 5 (m) + RR 6.1 + RR 6.2 + RR 6.3 ($S5$)

e) Beispiele

Es seien einige charakteristische Beispiele durchgeführt, die die Unterschiede zwischen den Systemen deutlich machen:

Beispiel 3 (DML-T-e):

1	O			P	
				$\Box a \to a$	(0)
(1)	$\Box a$	0		a	(4)
(3)	a		1	?	(2)

P gewinnt

P kann aufgrund der formalen Rahmenregel (RR 5 (m)) sich nicht schon im zweiten Zug mit a verteidigen. Deshalb ist es nötig, zuerst Zug (1) von O anzugreifen. Der Verbleib im Ausgangsdialogkontext wird dabei durch RR 6.2 ermöglicht. Diese Formel ist auch in allen sieben anderen Systemen gewinnbar.

Beispiel 4 (DML-B-e):

1	O		P	
			$a \to \Box\Diamond a$	(0)
(1)	a	0	$\Box\Diamond a$	(2)
1.1				
(3)	?	2	$\Diamond a$	(4)
(5)	?	4	(siehe 1)	
1				
	(aus 1.1)		a	(6)

P gewinnt

Zum Gewinn dieser Formel ist es nötig, in Zug (6) bei der Verteidigung von $\Diamond a$ in den übergeordneten Dialogkontext 1 zurückzukehren. Diese Formel ist deshalb in den B- und $S5$-Systemen, aber nicht in den T- und $S4$-Systemen gewinnbar.

(*Anmerkung:* Da mit Zug (6) die Verteidigung auf den Angriff in Zug (5) in einem anderen Dialogkontext steht als dieser, ist es hier nicht möglich, unserer Notationskonvention zu folgen, daß Angriff und zugehörige Verteidigung immer in der selben Zeile stehen sollen. Dies wird hier wie in der Folge durch Verweise wie ‘(siehe 1)’ und ‘(aus 1.1)’ angedeutet.)

Beispiel 5 (DML-T-e):

1	O			P	
				$\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)$	(0)
(1)	$\Box(a \to b)$	0		$\Box a \to \Box b$	(2)
(3)	$\Box a$	2		$\Box b$	(4)
1.1					
(5)	?	4		b	(12)
(7)	$a \to b$		1	?	(6)
(9)	a		3	?	(8)
(11)	b		7	a	(10)

P gewinnt

In allen Systemen gewinnbar.

Beispiel 6 (DML-$S4$-e):

1	O			P	
				$\Box a \to \Box\Box a$	(0)
(1)	$\Box a$	0		$\Box\Box a$	(2)
1.1					
(3)	?	2		$\Box a$	(4)
1.1.1					
(5)	?	4		a	(8)
(7)	a		1	?	(6)

P gewinnt

Zum Gewinn dieser Formel ist es erforderlich, daß P die Möglichkeit hat, zum Angriff auf Zug (1) den untergeordneten Dialogkontext 2.Stufe 1.1.1 aufzusuchen, was nur in den $S4$- und $S5$-Systemen erlaubt ist.

Beispiel 7 (MDL-$S5$-e):

1	O			P	
				$\Diamond a \to \Box\Diamond a$	(0)
(1)	$\Diamond a$	0		$\Box\Diamond a$	(2)
1.1					
(3)	?	2		$\Diamond a$	(4)
(5)	?	4		(siehe 1.2)	
1					
	(siehe 1.2)		1	?	(6)
1.2					
(7)	a			(aus 1)	
	(aus 1.1)			a	(8)

P gewinnt

In Zug (8) wird bei der Verteidigung von $\Diamond a$ aus Zug (4) weder der Dialogkontext beibehalten, noch ein neuer Dialogkontext eröffnet, oder ein schon vorhandener unter- oder übergeordneter Dialogkontext ausgewählt, sondern ein sozusagen ‘nebengeordneter’ (1.2 gegenüber 1.1), was nur in den $S5$-Systemen erlaubt ist.

Beispiel 8 (DML-T-k):

1	O			P	
				$\neg\Box\neg a \to \Diamond a$	(0)
(1)	$\neg\Box\neg a$	0		$\Diamond a$	(2)
(3)	?	2		(siehe 1.1)	
	$\otimes$		1	$\Box\neg a$	(4)
1.1					
(5)	?	4		$\neg a$	(6)
(7)	a	6		$\otimes$	
	(aus 1)			a	(8)

P gewinnt

Zug (8) ist nur bei klassischer Rahmenregelung erlaubt. Dieses Beispiel zeigt daher, daß im effektiven Fall beide Modaloperatoren nötig sind, und nicht aufgrund der Gültigkeit von $\neg\Box\neg A \leftrightarrow \Diamond A$ beziehungsweise $\neg\Diamond\neg A \leftrightarrow \Box A$ wie im klassischen Fall auf einen reduziert werden können.

f) Die Barcan-Formeln

Bei den bisher angegebenen Regeln sind die sogenannten Barcan-Formeln[16] $\bigwedge_x \Box P_x \to \Box \bigwedge_x P_x$ und $\Diamond \bigvee_x P_x \to \bigvee_x \Diamond P_x$ in allen Systemen gültig:

Beispiel 9 (DML-T-e):

1	O			P	
				$\bigwedge_x \Box P_x \to \Box \bigwedge_x P_x$	(0)
(1)	$\bigwedge_x \Box P_x$	0		$\Box \bigwedge_x P_x$	(2)
1.1					
(3)	?	2		$\bigwedge_x P_x$	(4)
(5)	$?_n$	4		P_n	(10)
1					
(7)	$\Box P_n$		1	$?_n$	(6)
1.1					
(9)	P_n		7	?	(8)

P gewinnt

[16] Vgl. Barcan [1962].

In allen Systemen gültig. Der Dialog um die andere Barcan-Formel verläuft entsprechend.

Nun ist die Gültigkeit der Barcan-Formeln aber nicht unumstritten. So hat zum Beispiel Kripke [1963b] gegen ihre Gültigkeit argumentiert, wenn (in modelltheoretischer Terminologie ausgedrückt) die *universes of discourse* der einzelnen möglichen Welten sich unterscheiden könnten. D.h. daß es in manchen möglichen Welten Individuen geben könnte, die in anderen nicht existieren.

Im dialogischen Ansatz können solche ontologischen Überlegungen durch eine Reglementierung des Gebrauchs von Konstanten im Zusammenhang mit Quantoren umgesetzt werden.[17] Im Fall der Barcan-Formeln kann Kripkes Idee durch die folgende Einschränkung eingefangen werden:

> *Zum Angriff auf eine Allaussage $\bigwedge_x A$ mit $?_n$ oder zur Verteidigung einer Einsaussage $\bigvee_x A$ mit $A[x/n]$ darf* P *die Konstante n in einem bestimmten Dialogkontext α nur dann benutzen, wenn diese entweder in α schon vorkommt, oder wenn sie im gesamten Dialog noch nicht vorkommt, also gänzlich neu ist.*

Jetzt ist im obigen Dialog Zug (6) von P nicht mehr erlaubt, so daß O gewinnt. Auch die andere Barcan-Formel ist nun nicht mehr gültig. In der Folge beschäftigen wir uns wieder ausschließlich mit der dialogischen Modallogik ohne diese Einschränkung.

II. Modale Strategientableaux

In der Dialogischen Logik wird Gültigkeit mit Hilfe der Strategien definiert. Eine Aussage ist demnach in der dialogischen Deutung der Logik gültig gdw. der Proponent über eine Gewinnstrategie für diese Aussage verfügt. Oder anders: Die Aussage A ist dialogisch gültig gdw. wenn A gegen alle Zugwahlen des Opponenten formal verteidigt werden kann.

Um eine systematische Darstellung der Strategien zu formulieren, die P haben muß, um die Gültigkeit einer Aussage nachweisen zu können, führen wir zunächst eine einfache Notation ein. Um die Gewinnstellungen aufzählen zu können, unterscheiden wir zunächst die Spielstellungen, in denen P am Zuge ist (P-Fälle), von den Fällen, in denen O am Zuge ist (O-Fälle) —dabei wird jeweils ein Angriffs- und der entsprechende Verteidigungszug zu einer

[17] Für eine ausführliche Diskussion dieses Punktes vergleiche Rahman / Rückert / Fischmann [1999].

Runde zusammengestellt. Wenn sowohl in den O-Fällen als auch in den P-Fällen P die Wahl über den weiteren Dialogverlauf hat, genügt es, wenn er bei nur einem Dialogverlauf gewinnen kann. Wenn dagegen O die Wahl hat, muß P alle möglichen Dialogverläufe gewinnen können. Man kann hiernach Regeln für den Dialogverlauf aufstellen, die immer nur von Gewinnstellungen zu Gewinnstellungen führen. So verzweigt sich z.B. die strategische Gewinnregel für die Adjunktion beim P-Fall, nicht aber beim O-Fall:

O-*Regel*		P-*Regel*	
Opponent	*Proponent*	*Opponent*	*Proponent*
... $A \vee B$ $A \mid B$	... <?>	... <?>	... $A \vee B$ A
		... <?>	... $A \vee B$ B
Da hier O die Wahl hat, gilt: Hat P Gewinnstrategien für beide Verteidigungen, so kann er immer gewinnen.		Hier hat P die Wahl: Hat er eine Gewinnstrategie für mindestens einen Dialogverlauf, so kann er immer gewinnen.	

Erläuterung: Angriffe, die selbst keine angreifbaren Formeln darstellen (Anfragen), klammern wir mit Hilfe der Zeichnen ‘<’ und ‘>’ ein. Nun zur Subjunktion:

O-*Regel*		P-*Regel*	
Opponent	*Proponent*	*Opponent*	*Proponent*
... $A \rightarrow B$ $... \mid B$	... $A \mid ...$	... A	... $A \rightarrow B$ $[B]$
Wenn O die Subjunktion $A \rightarrow B$ als Argument vorgebracht hat, greift P mit A an. O kann A angreifen oder sich mit B verteidigen. P muß also eine Gewinnstrategie für beide Wahlen von O haben.		Hier ist B in eckige Klammern gesetzt, da P nicht unmittelbar mit B antworten muß. Er kann zunächst die bisherigen Argumente (einschließlich A) von O angreifen —er bleibt dabei aber zu der Verteidigung von B verpflichtet, es sei denn, der Dialog kommt vorher zu einem Ende.	

Die Strategieregeln können im Falle der anderen Junktoren auf ähnliche Weise angegeben werden:

O-*Regel*		P-*Regel*	
Opponent	*Proponent*	*Opponent*	*Proponent*
... $\neg A$	... A	... A	... $\neg A$
Opponent	*Proponent*	*Opponent*	*Proponent*
... $A \wedge B$ A	... <?L>	... <?L> $\mid$ <?R>	... $A \wedge B$ $A \mid B$
... $A \wedge B$ B	... <?R>		

Für die Quantoren müssen noch die folgenden strategischen Überlegungen betrachtet werden: Wenn O eine Konstante auswählen kann, dann wird er, um die Spielweise von P zu erschweren, der, um eine gewonnene Endstellung mit Primaussagen erreichen zu können, eventuell auf die Züge von O angewiesen ist, immer eine neue Konstante auswählen, also eine, die noch nicht im Dialog vorkam. P dagegen, wird aus analogen Gründen versuchen, keine neuen Konstanten einzuführen (vgl. Fußnote 10).

O wählt die Konstante, wenn P eine Allaussage als Argument vorgebracht hat, und wenn er selbst eine Einsaussage behauptet hat, die er gegen einen Angriff von P verteidigt:

O-*Regel*		P-*Regel*	
Opponent	*Proponent*	*Opponent*	*Proponent*
... $\bigvee_x A$ $A[x/n]$ (n ist neu)	... <?>	... <$?_n$> (n ist neu)	... $\bigwedge_x A$ $A[x/n]$

P dagegen wählt die Konstante, wenn O eine Allaussage als Argument vorgebracht hat, und wenn er selbst eine Einsaussage behauptet hat, die er gegen einen Angriff von O verteidigt:

O-*Regel*		P-*Regel*	
Opponent	*Proponent*	*Opponent*	*Proponent*
...	...	...	...
	$\bigvee_x A$	$\bigwedge_x A$	
<?>	$A[x/n]$	$A[x/n]$	<?$_n$>
	(n muß nicht neu sein)		(n muß nicht neu sein)

Nun bleibt schließlich der Fall der Primaussagen zu betrachten, der die für P gewonnenen Endstellungen definiert. P hat eine formale Gewinnstrategie um eine von O gesetzte Primaussage (O-Regel), wenn er selbst diese Primaussage als Argument verwenden kann. P hat eine formale Gewinnstrategie um eine von ihm gesetzte Primaussage (P-Regel), wenn O sie zuvor selbst als Argument vorgebracht hat. Mit anderen Worten, die Gewinnstrategie um eine Primaussage fällt bei der O-Regel mit der Strategie bei der P-Regel zusammen:

Opponent	*Proponent*
...	...
a	
	a

a) Tableaux für Junktoren und Quantoren

Von diesen Überlegungen ausgehend lassen sich zwei Tableaux-Systeme — eines für die klassische und eines für die effektive Junktoren- und Quantorenlogik— aufbauen, die den Zusammenhang zwischen Dialogischer Logik und semantischen Tableaux herstellen. (Hier ist aber zu beachten, daß beim dialogischen Ansatz die Tableaux durch die Partienebene begründet werden. Genauer: Die Partikel- und Rahmenregeln der Partienebene legen die pragmatische Semantik fest, die auf der Strategieebene der Tableaux, auf der der Begriff der Gültigkeit angesiedelt ist, vorausgesetzt wird.)

1. Klassische Tableaux

(O)-*Fall*	(P)-*Fall*
(O)$A \vee B$	(P)$A \vee B$
<(P)?>(O)A |<(P)?>(O)B	<(O)?>(P)A {<(O)?>(P)B}

$\dfrac{(\mathrm{O})A \wedge B}{\begin{array}{c}<(\mathrm{P})?\mathrm{L}>(\mathrm{O})A \\ \{<(\mathrm{P})?\mathrm{R}>(\mathrm{O})B\}\end{array}}$	$\dfrac{(\mathrm{P})A \wedge B}{<(\mathrm{O})?\mathrm{L}>(\mathrm{P})A \mid <(\mathrm{O})?\mathrm{R}>(\mathrm{P})B}$
$\dfrac{(\mathrm{O})A \rightarrow B}{(\mathrm{P})A, \ldots \mid <(\mathrm{P})A>(\mathrm{O})B}$	$\dfrac{(\mathrm{P})A \rightarrow B}{\begin{array}{c}(\mathrm{O})A, \\ (\mathrm{P})B\end{array}}$
$\dfrac{(\mathrm{O})\neg A}{(\mathrm{P})A, \otimes}$	$\dfrac{(\mathrm{P})\neg A}{(\mathrm{O})A, \otimes}$
$\dfrac{(\mathrm{O})\bigwedge_x A}{\begin{array}{c}<(\mathrm{P})?_n>(\mathrm{O})A[x/n] \\ (n \text{ muß nicht neu sein})\end{array}}$	$\dfrac{(\mathrm{P})\bigwedge_x A}{\begin{array}{c}<(\mathrm{O})?_n>(\mathrm{P})A[x/n] \\ (n \text{ ist neu})\end{array}}$
$\dfrac{(\mathrm{O})\bigvee_x A}{\begin{array}{c}<(\mathrm{P})?>(\mathrm{O})A[x/n] \\ (n \text{ ist neu})\end{array}}$	$\dfrac{(\mathrm{P})\bigvee_x A}{\begin{array}{c}<(\mathrm{O})?>(\mathrm{P})A[x/n] \\ (n \text{ muß nicht neu sein})\end{array}}$

Erläuterungen:

Die geschweiften Klammern sollen darauf hinweisen, daß wenn P eine Gewinnstrategie für A hat, die Verteidigung mit B nicht nötig ist, und umgekehrt. Die Schließungsregeln sind die üblichen: Ein Baum ist geschlossen, wenn alle Zweige geschlossen sind. Ein Zweig ist genau dann geschlossen, wenn er ein Paar der Form (O)a, (P)a enthält. In der Sprache der Dialoge: P hat eine Gewinnstrategie für einen möglichen Dialogverlauf (= Zweig) gdw. dieser Dialog mit einer Primaussage von P endet, die vorher von O gesetzt wurde.

2. Effektive Tableaux

Die Regeln für die effektiven Tableaux enthalten an bestimmten Stellen Formeln mit dem tiefgestellten Suffix ‘(O)’ (z.B. (P)$_{(\mathrm{O})}A$). Die Anwendung solcher Regeln bewirkt, daß sämtliche vorher gesetzten P-bezeichneten Formeln, die auf dem selben Zweig vorkommen, gelöscht werden (durch Ausstreichen dargestellt).[18] Dadurch wird die effektive Rahmenregel von der Partienebene auf die Strategieebene übertragen. Um diese Übertragung zu leisten, genügt es, wenn man $_{\text{(O)}}$ bei der P-Verteidigung allquantifizierter Aussagen sowie bei den Junktoren einsetzt, bei denen P das Recht hat, die dazugehörige Angriffsbehauptung von O selbst anzugreifen —das heißt bei der Subjunktion und der Negation.

(O)-*Fall*	(P)-*Fall*
(O)$A \vee B$	(P)$A \vee B$
<(P)?>(O)A $\mid$<(P)?>(O)B	<(O)?>(P)A {<(O)?>(P)B}
(O)$A \wedge B$	(P)$A \wedge B$
<(P)?L>(O)A {<(P)?R>(O)B}	<(O)?L>(P)A $\mid$<(O)?R>(P)B
(O)$A \rightarrow B$	(P)$A \rightarrow B$
(P)A $\mid$<(P)A>(O)B	(O)$_{\text{(O)}}A$ (P)B
(O)$\neg A$	(P)$\neg A$
(P)$A, \otimes$	(O)$_{\text{(O)}}A, \otimes$
(O)$\bigwedge_x A$	(P)$\bigwedge_x A$
<(P)?$_n$>(O)$A[x/n]$ (n muß nicht neu sein)	<(O)?$_n$>(P)$_{\text{(O)}}A[x/n]$ (n ist neu)

[18] Die Verwendung des Buchstabens ‘O’ im Suffix soll also andeuten, daß nur noch die O-bezeichneten Formeln dieses Zweiges erhalten bleiben. Bei P-bezeichneten Formeln, die oberhalb einer Verzweigung stehen, und damit also zu beiden folgenden Zweigen gehören, muß beachtet werden, daß sie eventuell nur für einen Zweig ausgestrichen werden.

$$\frac{(\mathrm{O})\bigvee_x A}{\begin{array}{c}<(\mathrm{P})?>(\mathrm{O})A[x/n]\\ (n \text{ ist neu})\end{array}} \quad\Bigg|\quad \frac{(\mathrm{P})\bigvee_x A}{\begin{array}{c}<(\mathrm{O})?>(\mathrm{P})A[x/n]\\ (n \text{ muß nicht neu sein})\end{array}}$$

Wir haben damit Strategien für symmetrische Rahmenregeln aufgestellt, haben aber bei den Beispielen die asymmetrischen Rahmenregeln angewendet. Nun kann aber gezeigt werden, daß eine Aussage, die bei symmetrischer Rahmenregelung gewinnbar ist, auch bei asymmetrischer Rahmenregelung gewinnbar ist, und umgekehrt —der symmetrische Fall erlaubt nur zusätzliche Züge, die strategisch betrachtet redundant sind.[19] Um asymmetrische effektive Strategientableaux zu bilden, genügt es, wenn man $_{(\mathrm{O})}$ bei jeder P-Regel einsetzt. Dies ergibt folgendes System:

(O)-*Fall*	(P)-*Fall*
$\dfrac{(\mathrm{O})A \vee B}{<(\mathrm{P})?>(\mathrm{O})A \mid <(\mathrm{P})?>(\mathrm{O})B}$	$\dfrac{(\mathrm{P})A \vee B}{\begin{array}{c}<(\mathrm{O})?>(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}A\\ \{<(\mathrm{O})?>(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}B\}\end{array}}$
$\dfrac{(\mathrm{O})A \wedge B}{\begin{array}{c}<(\mathrm{P})?L>(\mathrm{O})A\\ \{<(\mathrm{P})?R>(\mathrm{O})B\}\end{array}}$	$\dfrac{(\mathrm{P})A \wedge B}{<(\mathrm{O})?L>(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}A \mid <(\mathrm{O})?R>(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}B}$
$\dfrac{(\mathrm{O})A \rightarrow B}{(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}A \mid <(\mathrm{P})A>(\mathrm{O})B}$	$\dfrac{(\mathrm{P})A \rightarrow B}{\begin{array}{c}(\mathrm{O})_{(\mathrm{O})}A\\ (\mathrm{P})B\end{array}}$
$\dfrac{(\mathrm{O})\neg A}{(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}A, \otimes}$	$\dfrac{(\mathrm{P})\neg A}{(\mathrm{O})_{(\mathrm{O})}A, \otimes}$

[19] S. Rahman [1993].

$(\mathrm{O})\bigwedge_x A$	$(\mathrm{P})\bigwedge_x A$
$<(\mathrm{P})?_n>(\mathrm{O})A[x/n]$ (n muß nicht neu sein)	$<(\mathrm{O})?_n>(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}A[x/n]$ (n ist neu)
$(\mathrm{O})\bigvee_x A$	$(\mathrm{P})\bigvee_x A$
$<(\mathrm{P})?>(\mathrm{O})A[x/n]$ (n ist neu)	$<(\mathrm{O})?>(\mathrm{P})_{(\mathrm{O})}A[x/n]$ (n muß nicht neu sein)

b) Modale Tableaux

Für die Modallogik muß noch die folgende strategische Überlegung ergänzt werden:[20] Wenn O einen Dialogkontext wählen kann, dann wird er, um die Spielweise von P zu erschweren, immer einen neuen eröffnen. P dagegen ist es nicht erlaubt, neue Dialogkontexte zu eröffnen, und er wird daher immer schon vorhandene auswählen müssen.[21] O kann in den folgenden zwei Fällen einen Dialogkontext wählen, in denen er daher einen neuen Dialogkontext eröffnet:

1. O greift eine $\Box$-Aussage von P an, und
2. O verteidigt sich auf einen Angriff gegen eine $\Diamond$-Aussage.

Um eine Systematik für die Strategientableaux aufzubauen, ist es nötig, diese Fälle durch eine geeignete Regel einbauzubauen, die besagt, daß immer wenn O die Wahl hat, er sich für einen Dialogkontextwechsel entscheidet.

Um die modalen Rahmenregeln, die sich auf die Dialogkontext-Wahlen beziehen, für die unterschiedlichen Modallogiken einzufangen, müssen die folgenden Maßnahmen für die Bildung neuer Dialogkontexte in den Strategiesystemen beachtet werden:

[20] Die in der Folge vervollständigten Tableaux-Systeme haben starke Ähnlichkeit mit denen in Fitting [1993].

[21] Diese strategischen Überlegungen zu den Modaloperatoren entsprechen genau denjenigen zu den Quantoren (vergleiche z.B. Fußnote 10), mit dem Unterschied, daß P im Falle der Quantoren neue Konstanten einführen darf, im Falle der Modaloperatoren aber keine neuen Dialogkontexte eröffnen kann.

a) Die Behauptungen, um die auch im neuen Kontext argumentiert werden darf, werden diesem hinzugefügt.
b) Die Behauptungen, um die im neuen Kontext nicht mehr argumentiert werden darf, werden im neuen Kontext nicht niedergeschrieben.

Dies ergibt folgende Fälle, die die oben beschriebenen Tableaux um die Regeln für die Modaloperatoren ergänzen:

1. Modale Ergänzungen für die Tableaux-Systeme

(O)-*Fall*	(P)-*Fall*
$\dfrac{\text{(O)}\Box A}{\text{<(P)?>(O)}A}$	$\dfrac{\text{(P)}\Box A}{\text{<(O)?>(P)}^{\#}A}$
$\dfrac{\text{(O)}\Diamond A}{\text{<(P)?>(O)}^{\#}A}$	$\dfrac{\text{(P)}\Diamond A}{\text{<(O)?>(P)}A}$

Das hochgestellte Zeichen '#' soll auf die Bildung eines neuen Kontextes hinweisen. Wir nennen Formeln der Form (P)$\Box A$ und (O)$\Diamond A$ *#-Formeln*, ihre Teilformeln A entsprechend auch *#-Teilformeln*. Die anderen Modalformeln, die keine Neubildung eines Kontextes erfordern, nennen wir *normale Modalformeln*.

Die Neubildung von Dialogkontexten muß durch ein geeignetes Verfahren für die Hinzufügung (beziehungsweise Nicht-Hinzufügung) der vorherigen Formeln ergänzt werden. Wir nennen die Regeln, die die genauen Schritte dieses Verfahrens vorschreiben, *#-Regeln*. Nun müssen wir die #-Regel für jedes Modallogik-System gesondert studieren:

2. Die #-Regeln

2.1. Die Regelung der Kontextbildung für T

$T^{\#}$-Regel:

Wenn in einem Kontext eine normale Modalformel (O)$\Box A$ (bzw. (P)$\Diamond A$) vorkommt, so kann (O)A (bzw. (P)A) in jeden untergeordneten Kontext erster Stufe übernommen werden. Keine anderen Formeln außer diesen und der Teilformel der #-Formel, die die Neubildung des Kontextes erfordert hat, *können im neuen Kontext verwendet werden.*

Sehen wir uns Beispiel 5 wieder an, und fügen eine Numerierung hinzu, die die Runden zählt:

Beispiel 10:

1	O				P	
			0		$\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)$	(0)
(1)	$\Box(a \to b)$	0	I		$\Box a \to \Box b$	(2)
(3)	$\Box a$	2	II		$\Box b$	(4)
1.1						
(5)	?	4	III		b	(12)
(7)	$a \to b$		IV	1	?	(6)
(9)	a		V	3	?	(8)
(11)	b		VI	7	a	(10)

P gewinnt

Das entsprechende (effektive symmetrische) Strategientableau lautet:

1	
(0)	(P)$\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)$
(I.1)	(O)$_{(O)}\Box(a \to b)$
(I.2)	(P)$\Box a \to \Box b$

Die effektive Löschregel in (I.1) bewirkt, daß die Zeile (0) durchgestrichen wird:

1	
(0)	~~(P)~~$\Box\cancel{(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)}$
(I.1)	(O)$_{(O)}\Box(a \to b)$
(I.2)	(P)$\Box a \to \Box b$
(II.1)	(O)$_{(O)}\Box a$
(II.2)	(P)$\Box b$

Hier wird wiederum die Löschregel wirksam:

1	
(0)	$\cancel{\text{(P)}\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)}$
(I.1)	(O)$_{\text{(O)}}\Box(a \to b)$
(I.2)	$\cancel{\text{(P)}\Box a \to \Box b}$
(II.1)	(O)$_{\text{(O)}}\Box a$
(II.2)	(P)$\Box b$
(III)	<(O)?>(P)$^{\#}b$

Jetzt wird die $T^{\#}$-Regel angewendet:

1	
(0)	$\cancel{\text{(P)}\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)}$
(I.1)	(O)$_{\text{(O)}}\Box(a \to b)$
(I.2)	$\cancel{\text{(P)}\Box a \to \Box b}$
(II.1)	(O)$_{\text{(O)}}\Box a$
(II.2)	(P)$\Box b$
1.1	
(III)	<(O)?>(P)$^{\#}\underline{b}$
(IV)	<(P)?>(O)$(a \to b)$
(V)	<(P)?>(O)$\underline{a}$

(VI) (P)$_{\text{(O)}}\underline{a}$, ... I (VII) <(P)$a$>(O)$\underline{b}$

Der Baum ist geschlossen.

P hat eine Gewinnstrategie für $\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b)$, weil in 1.1 die Teilformeln der normalen Modalformlen (O)$_{\text{(O)}}\Box(a \to b)$ und (O)$_{\text{(O)}}\Box a$ aus 1 übernommen werden durften.

2.2. Die Regelung der Kontextbildung für $S4$

$S4^{\#}$-Regel:

Wenn in einem Kontext eine normale Modalformel (O)$\Box A$ (bzw. (P)$\Diamond A$) vorkommt, so kann (O)A (bzw. (P)A) in jeden untergeordneten Kontext beliebiger Stufe übernommenen werden. Keine anderen Formeln außer diesen und der Teilformel der #-Formel, die die Neubildung des Kontextes erfordert hat, können im neuen Kontext verwendet werden.

Sehen wir das effektive symmetrische Strategientableau für Beispiel 6, diesmal ohne Kommentare:

Beispiel 11:

1	
(0)	~~(P)$\Box a \to \Box\Box a$~~
(I.1)	(O)$_{\text{(O)}}\Box a$
(I.2)	(P)$\Box\Box a$
1.1	
(II)	<(O)?>(P)$^{\#}\Box a$
1.1.1	
(III)	<(O)?>(P)$^{\#}\underline{a}$
(IV)	<(P)?>(O)$\underline{a}$

Der Baum ist geschlossen.

2.3. Die Regelung der Kontextbildung für B

$B^{\#}$-Regel:

Wenn in einem Kontext eine normale Modalformel (O)$\Box A$ (bzw. (P)$\Diamond A$) vorkommt, so kann (O)A (bzw. (P)A) in jeden unter- oder übergeordneten Kontext erster Stufe übernommen werden. Keine anderen Formeln außer diesen und der Teilformel der #-Formel, die die Neubildung des Kontextes erfordert hat, können im neuen Kontext verwendet werden.

Sehen wir Beispiel 4 als (effektives symmetrisches) Strategientableau:

Beispiel 12:

1	
(0)	~~(P)$a \to \Box\Diamond a$~~
(I.1)	(O)$_{\text{(O)}}\underline{a}$
(I.2)	(P)$\Box\Diamond a$
1.1	
(II)	<(O)?>(P)$^{\#}\Diamond a$
1	
(III)	<(O)?>(P)$\underline{a}$

Der Baum ist geschlossen.

2.4. Die Regelung der Kontextbildung für $S5$

$S5^{\#}$-Regel:

Wenn in einem Kontext eine normale Modalformel (O)$\Box A$ (bzw. (P)$\Diamond A$) vorkommt, so kann (O)A (bzw. (P)A) in jeden beliebigen Kontext übernommen werden. Keine anderen Formeln außer diesen und der Teilformel der #-Formel, die die Neubildung des Kontextes erfordert hat, können im neuen Kontext verwendet werden.

Sehen wir das klassische symmetrische Strategientableau für $\Diamond\Diamond a \to \Box\Diamond a$:

Beispiel 13:

1	
(0)	(P)$\Diamond\Diamond a \to \Box\Diamond a$
(I.1)	(O)$\Diamond\Diamond a$
(I.2)	(P)$\Box\Diamond a$
1.1	
(II)	<(O)?>(P)$^{\#}\Diamond a$
1.2	
(IV)	<(P)?>(O)$^{\#}\Diamond a$
1.2.1	
(V)	<(P)?>(O)$^{\#}\underline{a}$
(III)	<(O)?>(P)$\underline{a}$

Der Baum ist geschlossen.

c) Hughes/Cresswells semantisches Entscheidungsverfahren und die Dialogische Modallogik

Die Beziehung zwischen Kripkes Modellen[22] und der klassischen Dialogischen Modallogik sollte spätestens bei den Strategien-Tableaux klar geworden sein. Hier werden wir ein Übersetzungsverfahren von unserem Strategiensystem in Hughes/Cresswells Entscheidungsverfahren angeben. Dieses Übersetzungsverfahren soll den Zusammenhang zwischen den Strategien für

[22] Vgl. z.B. Kripke [1963a] und [1963b].

klassische Junktorenmodallogik mit den entsprechenden Kripke-Modellen für T, $S4$ und $S5$ explizit herstellen.[23]

1. Das Entscheidungsverfahren von Hughes/Cresswell

Dieses semantische Verfahren beruht auf der Methode des indirekten Beweises.[24] Man nimmt an, daß die Hauptformel falsch ist, und versucht danach durch Berechnung der Wahrheitswerte (in der Folge '$\top$' für 'wahr' und '$\perp$' für 'falsch') der Teilformeln einen Widerspruch zu erzeugen. Wenn dies nicht gelingt, ist die Formel gültig. Um diese wohlbekannte Methode auf die Modallogik anwenden zu können, arbeiten Hughes/Cresswell mit Diagrammen, die Kästchen beinhalten, die die möglichen Welten des modelltheoretischen Ansatzes repräsentieren. Die unterschiedlichen Modallogiken werden jeweils durch eine Regel charakterisiert, die angibt, wann ein neues Kästchen gebildet wird, und welche Formeln mit welchen Wahrheitswerten in dem (alten und dem) neuen Kästchen niedergeschrieben werden.[25]

Ein neues Kästchen soll gebildet werden:
1. wenn eine $\Box$-Formel mit dem Wahrheitswert $\perp$ signiert ist, und
2. wenn eine $\Diamond$-Formel mit dem Wahrheitswert $\top$ signiert ist.

Wir nennen wiederum diese Formeln #-Formeln. Die anderen Modalformeln, die keine Neubildung von Kästchen erfordern, nennen wir wieder normale Modalformeln. Wenn ein neues Kästchen aufgrund einer #-Formel im Ausgangskasten w.1 gebildet wird, ist dieses neue Kästchen aus w.1 zugänglich. Wir übernehmen hier zunächst die Notationsvereinbarung für Dialogkontexte, die jetzt auf die Bildung von Kästchen angewendet wird:

[23] Die Übersetzung der Strategien-Verfahren für B und für die modale Quantorenlogik in bekannte Tableaux-Systeme sollte aufgrund der gegebenen Hinweise klar sein. Vgl. zu diesem Punkt auch die klassische Literatur über semantische Tableaux für Modallogik: Hintikka [1957], [1961], [1962], [1963], Guillaume [1958], Kripke [1963a] und [1963b] (für einen Überblick siehe Bull/Segerberg [1984]).

[24] Vgl. Hughes/Cresswell [1978], Kapitel 5 und 6.

[25] Diese Regeln sollen die Zugänglichkeitsrelation der Kripke-Systeme widerspiegeln.

Über- und Unterordnung der Kästchen:

a) Das Ausgangs-Kästchen erhält die Nummer $w.1$.

b) Das erste Kästchen, das aus dem Kästchen mit der Nummer $w.n$ eröffnet wird, erhält die Nummer $w.n.1$, das zweite die Nummer $w.n.2$, und entsprechend das m-te die Nummer $w.n.m$.

c) Ein Kästchen $w.n$ heiße einem Kästchen $w.n.m$ übergeordnet, entsprechend heiße $w.n.m$ $w.n$ untergeordnet.

d) Ein Kästchen $w.n$ stellt für $w.n.m.l$ ein übergeordnetes Kästchen 2.Stufe dar, $w.n.m.l$ dagegen bzgl. $w.n$ ein untergeordnetes Kästchen 2.Stufe. Entsprechend seien Über- und Unterordnung für beliebige Stufen definiert.

1.1 Diagramme für T

T-Regel:

Wenn in einem Kästchen eine Modalformel $\Box A$ (bzw. $\Diamond A$) mit dem Wahrheitswert $\top$ (bzw. $\bot$) vorkommt, so muß A mit dem selben Wahrheitswert in diesem Kästchen und in jedem untergeordneten Kästchen erster Stufe niedergeschrieben werden.

Beispiel 14:

w.1

$${}_{\top}\Box_{\top}({}_{\top}a \wedge_{\top} b) \rightarrow^{\bot} \Box\Box_{\top}({}_{\top}\Diamond_{\top}a \rightarrow_{\top} \Diamond_{\top}b)$$

#

w.1.1

$${}_{\top}({}_{\top}a \wedge_{\top} b)$$

$${}^{\bot}\Box_{\top}({}_{\top}\Diamond_{\top}a \rightarrow_{\top} \Diamond_{\top}b)$$

#

w.1.1.1

$${}^{\bot}({}_{\top}\Diamond_{\top}a \rightarrow^{\bot} \Diamond^{\bot}b)$$

Erläuterungen: In diesem Diagramm soll das Zeichen ‘#’ die Formeln signalisieren, die die Bildung eines neuen Kästchens erfordern. In w.1.1 wurde die Teilformel der normalen Modalformel ${}_{\top}\Box(a \wedge b)$ mit dem von der T-Regel geforderten Wahrheitswert niedergeschrieben. Die zweite Formel in w.1.1 ist die Teilformel der #-Formel ${}^{\perp}\Box\Box(\Diamond a \to \Diamond b)$. In w.1.1.1 wurde die Teilformel der #-Formel ${}^{\perp}\Box(\Diamond a \to \Diamond b)$ niedergeschrieben.

Nun ist es offensichtlich, daß in diesem Beispiel kein Widerspruch erzeugt werden konnte. Die Formel $\Box(a \wedge b) \to \Box\Box(\Diamond a \to \Diamond b)$ ist also nicht T-gültig. Sie wäre gültig wenn, man ${}_{\top}({}_{\top}a \wedge_{\top} b)$ auch in w.1.1.1 übertragen dürfte. Also dann, wenn man die Teilformel der modalen Normalformel ${}_{\top}(a \wedge b)$ auch in ein untergeordnetes Kästchen zweiter Stufe übernehmen dürfte. Dies ist der Fall bei dem Entscheidungsverfahren für $S4$:

1.2. Diagramme für $S4$

$S4$-Regel:

Wenn in einem Kästchen eine Modalformel $\Box A$ (bzw. $\Diamond A$) mit dem Wahrheitswert $\top$ (bzw. $\perp$) vorkommt, so muß A mit dem selben Wahrheitswert in diesem Kästchen und in jedem untergeordneten Kästchen beliebiger Stufe niedergeschrieben werden.

Diese Regel ergibt für das oben angegebene Beispiel das folgende Diagramm:

Beispiel 15:

w.1

$$\boxed{\begin{array}{c} {}_{\top}\Box_{\top}({}_{\top}a \wedge_{\top} b) \to^{\perp} \Box\Box_{\top}({}_{\top}\Diamond_{\top}a \to_{\top} \Diamond_{\top}b) \\ \# \end{array}}$$

w.1.1

$$\boxed{\begin{array}{c} {}_{\top}({}_{\top}a \wedge_{\top} b) \\ {}^{\perp}\Box_{\top}({}_{\top}\Diamond_{\top}a \to_{\top} \Diamond_{\top}b) \\ \# \end{array}}$$

w.1.1.1

$$\boxed{\begin{array}{c} {}_{\top}({}_{\top}a \wedge_{\top} \underline{b}) \\ {}^{\perp}({}_{\top}\Diamond_{\top}a \to^{\perp} \Diamond^{\perp}\underline{b}) \end{array}}$$

Erläuterungen: In w.1.1.1 kommt ein Widerspruch vor, nämlich ${}_{\top}b$, ${}_{\perp}b$ (im Diagramm wurde der Widerspruch durch Unterstreichen hervorgehoben). Die Formel $\Box(a \wedge b) \to \Box\Box(\Diamond a \to \Diamond b)$ ist also $S4$-gültig.

1.3. Diagramme für $S5$

$S5$-Regel:

Wenn in einem Kästchen eine Modalformel $\Box A$ (bzw. $\Diamond A$) mit dem Wahrheitswert $\top$ (bzw. $\bot$) vorkommt, so muß A mit dem selben Wahrheitswert in diesem Kästchen und in jedem anderen Kästchen niedergeschrieben werden.

Die Anwendung des Entscheidungsverfahrens auch für $S5$ stellt keine zusätzlichen Probleme, so daß wir uns hier erlauben, auf ein Beispiel zu verzichten.

2. Die Übersetzung von Strategien in das Entscheidungsverfahren von Hughes / Cresswell

Mit den schon getroffenen Notationsvereinbarungen dürfte der Zusammenhang zwischen dem Entscheidungsverfahren von Hughes/Cresswell und den Strategientableaux offensichtlich sein:

1. P-Formeln entsprechen $\bot$-Formeln.
2. O-Formeln entsprechen $\top$-Formeln.
3. Kontexte entsprechen Kästchen (einschließlich der dazugehörigen Numerierung).

Wenn diese Übersetzungen durchführt sind, ergibt sich außerdem, daß

4. die strategischen #-Formeln den #-Formeln des Entscheidungsverfahren entsprechen, und
5. die strategischen #-Regeln den #-Regeln des Entscheidungsverfahren entsprechen.

Sehen wir dies noch an einem Beispiel. Dazu wollen wir das Beispiel 13 in Kästchenform darstellen:

Beispiel 16:

w.1

(P)$\Diamond\Diamond a \to \Box\Diamond a$
(O)$\Diamond\Diamond a$
(P)$\Box\Diamond a$

w.1.1

<(O)?>(P)$^{\#}\Diamond a$

w.1.2

<(P)?>(O)$^{\#}\Diamond a$

w.1.2.1

<(O)?>(P)$\underline{a}$ <(P)?>(O)$\underline{a}$

Schlußbemerkungen

In diesem Aufsatz haben wir Vorschläge gemacht, den dialogischen Ansatz in der Logik so zu erweitern, daß in ihm auch Modallogik betrieben werden kann. Dabei haben wir uns auf die gängigsten modallogischen Systeme T, B, $S4$ und $S5$ beschränkt. Eine dialogische Rekonstruktion auch weiterer der vielen bekannten Modallogiken sollte auf Grundlage dieser Vorschläge möglich sein.

Was ist aber durch eine dialogische Fassung der Modallogik (neben den effektiven Versionen der rekonstruierten Systeme) gewonnen? Wir möchten hier kurze Hinweise geben, wie die im dialogischen Ansatz vorhandenen Differenzierungen, die nun auch für die Modallogik zur Verfügung stehen, ausgenutzt werden können.[26]

1. Die Unterscheidung Partienebene/Strategieebene:

Die Unterscheidung zwischen der Ebene der Partien, auf der Sinn- bzw. Bedeutungsfragen angesiedelt werden können, und der Ebene der Strategien, auf der Geltungsfragen angesiedelt werden können, ist in dieser Form in

[26] Eine ausführlichere Diskussion der Besonderheiten und daraus resultierenden Vorteile des dialogischen Ansatzes findet sich in Rückert [1999].

anderen Ansätzen in der Logik nicht verfügbar.[27] In einer früheren Arbeit haben wir gezeigt, wie sie für theoretische Zwecke fruchtbar gemacht werden kann.[28]

2. Die Unterscheidung Partikelregeln/Rahmenregeln:

Das differenzierte Regelwerk der Dialogischen Logik erlaubt es, unterschiedliche Logiken dadurch zu erhalten, daß man unter Beibehaltung der immer gleichen Partikelregeln bestimmte Rahmenregeln abändert oder hinzufügt.[29] So unterscheiden sich z.B. die klassische und die effektive Version einer Logik immer nur in einer bestimmten Rahmenregel, und Arbeiten zur dialogischen parakonsistenten und freien Logik wurden wiederum andere Rahmenregeln hinzugefügt oder geändert, um die Hauptideen dieser Logiken im dialogischen Ansatz umzusetzen.[30] Da die Änderungen an unterschiedlichen Stellen im Regelwerk stattfinden, ist es im dialogischen Ansatz sehr einfach, Logiken zu kombinieren.[31] So können die in den anderen Aufsätzen vorgeschlagenen Rahmenregeländerungen zur hier vorgestellten dialogischen Modallogik hinzugefügt werden, um dadurch sehr einfach zum Beispiel eine parakonsistente oder eine freie Modallogik zu erhalten.

Anhang: Die Nicht-Verzögerungsregel

In diesem Anhang soll die sogenannte Nicht-Verzögerungsregel etwas ausführlicher diskutiert und formuliert werden. Im Haupttext lautet sie folgendermaßen:

[27] Aus dialogischer Sicht werden diese beiden Ebenen in anderen Ansätzen vermischt, bzw. es spielt sich alles immer schon auf der Strategieebene ab.

[28] Vergleiche Rahman/Rückert [1998-99].

[29] Diese Vorgehensweise entspricht dem im Zusammenhang mit der *Display Logic* sogenannten *Dosen's Principle* (vgl. Wansing [1994]).

[30] Vergleiche Rahman/Carnielli [1998] und Fischmann/Rahman/Rückert [1999].

[31] Für eine Kombination von freier mit parakonsistenter Logik, u.a. zur Behandlung von Fiktionen, s. Rahman [1999a] und [1999b].

RR 4 (keine Verzögerungen):

X darf ein Argument von Y nur dann ein weiteres Mal angreifen bzw. sich auf einen Angriff ein weiteres Mal verteidigen (letzteres ist nur bei klassischer Rahmenregelung erlaubt), wenn sich dadurch neue Zugmöglichkeiten ergeben.[32]

Die Hauptidee hinter dieser Regel ist, daß in einem Dialog nur Züge gemacht werden dürfen, die die Spielsituation verändern. Dies wäre nur dann nicht der Fall, wenn auch Wiederholungen von Angriffen oder Verteidigungen zugelassen würden, die zu bloßen Wiederholungen von schon gespielten Zugfolgen führen. Zunächst muß definiert werden, was Verteidigungs- und Angriffswiederholungen (im strikten Sinne) sind:

1. Verteidigungswiederholungen

In den folgenden Fällen handelt es sich um Verteidigungswiederholungen (im strikten Sinne):

a. Ein Angriff, der schon verteidigt wurde, wird noch einmal mit der selben Verteidigung beantwortet.
b. Ein Angriff auf einen Existenzquantor, der schon unter Verwendung einer damals neuen Konstante verteidigt wurde, wird noch einmal unter Verwendung einer neuen Konstante verteidigt.
c. Ein Angriff auf einen Möglichkeitsoperator, der schon unter Eröffnung eines neuen Dialogkontextes verteidigt wurde, wird noch einmal unter Eröffnung eines neuen Dialogkontextes verteidigt.

2. Angriffswiederholungen

In den folgenden Fällen handelt es sich um Angriffswiederholungen (im strikten Sinne):

a. Eine Formel wird angegriffen, obwohl die gleiche Formel (aus dem selben Dialogkontext) schon mit dem gleichen Angriff angegriffen wurde.
b. Ein Allquantor wird unter Verwendung einer neuen Konstante angegriffen, obwohl der gleiche Allquantor (aus dem selben Dialogkontext) schon unter Verwendung einer damals neuen Konstante angegriffen wurde.

[32] Diese Regel, die mit ähnlichem Wortlaut auch schon in Fuhrmann [1985] verwendet wurde, birgt einige Probleme. Im Anhang findet sich eine ausführlichere Formulierung.

c. Ein Notwendigkeitsoperator wird unter Eröffnung eines neuen Dialogkontextes angegriffen, obwohl der gleiche Notwendigkeitsoperator (aus dem selben Dialogkontext) schon unter Eröffnung eines damals neuen Dialogkontextes angegriffen wurde.

Da durch Angriffs- und Verteidigungswiederholungen prinzipiell keine neuen Formeln ins Spiel kommen können, stellt sich zunächst die Frage, ob denn dann überhaupt durch sie die Spielsituation geändert werden kann. Dies ist nicht bei klassischer Rahmenregelung, sondern nur bei intuitionistischer Rahmenregelung der Fall, nämlich dann, wenn durch eine Angriffswiederholung ein Angriff zum letzten noch nicht verteidigten Angriff wird, der zuvor nicht der letzte noch nicht verteidigte Angriff war.[33] Dies kann dem Proponenten aber nur dann Vorteile einbringen, wenn seit dem wiederholten Angriff der Opponent neue Zugeständnisse gemacht hat, auf die P wegen der formalen Rahmenregel angewiesen ist.[34] Aufgrund dieser Überlegungen gelangen wir zur folgenden Einschränkung bzgl. Angriffs- und Verteidigungswiederholungen:

Restriktionen für Angriffs- und Verteidigungswiederholungen:

Verteidigungswiederholungen (im strikten Sinne) sind grundsätzlich nicht erlaubt.

Angriffswiederholungen (im strikten Sinne) sind nur dem Proponenten bei intuitionistischer Rahmenregelung erlaubt, und zwar nur dann, wenn der Opponent seit dem zu wiederholenden Angriff eine neue Primformel eingeführt hat, oder wenn er seit dem zu wiederholenden Angriff einen Dialogkontext als zugelassen ausgewiesen hat, der zuvor noch nicht als zugelassen bekannt war.

[33] Rahman/Roetti [1999] schlagen eine gegenüber der intuitionistischen duale Rahmenregelung zur Formulierung parakonsistenter Logiken vor. Für diesen Fall müßte auch die Nicht-Verzögerungsregel entsprechend abgeändert werden.

[34] Für die Formulierung der Nicht-Verzögerungsregel für die in Rahman / Rückert / Fischmann [1999] vorgeschlagenen dialogischen freien Logiken, müßte beachtet werden, daß neben der Einführung neuer Primformeln und Dialogkontexte (mit ihren Zulässigkeitsrelationen) auch die Einführung neuer Konstanten relevant ist.

3. Eine Schwierigkeit

In den Modallogiksystemen mit Transitivität der Zugelassenheitsrelation zwischen den Dialogkontexten, muß dem Opponenten noch folgender Fall untersagt werden:

Der Opponent eröffnet einen neuen Dialogkontext, um einen Notwendigkeitsoperator anzugreifen, obwohl der gleiche Notwendigkeitsoperator aus einem übergeordneten Dialogkontext schon unter Eröffnung eines damals neuen Dialogkontextes angegriffen wurde.[35]

DANKSAGUNG

Die in diesem Aufsatz entwickelte Dialogische Modallogik haben wir im Ansatz zum ersten Mal in einem im Sommersemester 1998 unter dem Titel *Erweiterungen der Dialogischen Logik* an der Universität des Saarlandes von uns gehaltenen Seminar vorgestellt. Wir möchten uns bei allen Teilnehmern dieses Seminars recht herzlich bedanken, insbesondere bei Jung-Bae Son, der bei der Vorbereitung einer früheren Fassung mitgearbeitet hat.

Ebenso möchten wir uns bei allen bedanken, die diese frühere Fassung gelesen, und uns mit ihren Anmerkungen weitergeholfen haben. So danken wir Prof. Marcel Guillaume (Clermont-Ferrand) und Prof. Erik Krabbe (Groningen) für Ihre nützlichen Hinweise und Anregungen, Prof. Jacques Dubucs (Paris-Sorbonne), der uns auf einige mögliche Mißverständnisse in bezug auf die Formulierung der modalen Rahmenregeln aufmerksam gemacht hat, Prof. Ulrich Nortmann (Bonn/Saarbrücken) für seine Anmerkungen zur Nicht-Verzögerungsregel, sowie einem anonymen Referee für sein ausführliches Gutachten.

Shahid Rahman: UFR Philosophie - Chair de logique
Université de Lille 3 (Sciences Humaines)
B.P. 149
F-59653 Villeneuve D'Ascq
Helge Rückert: Institut für Philosophie
Universität des Saarlandes
D-66041 Saarbrücken

E-mail: rahman@univ-lille3.fr
heru0001@stud.uni-sb.de

[35] Für eine ausführlichere Behandlung dieses Problems im Zusammenhang mit einer dialogischen Fassung des modallogischen Systems G vgl. Nortmann [2000].

LITERATUR

[1962] Barcan, R.C. Interpreting quantification. *Inquiry*, 5 (1962), S. 252–259.

[1982] Barth, E. / Krabbe, E. *From Axiom to Dialogue: A Philosophical Study of Logics and Argumentation.* Berlin / New York: De Gruyter.

[1984] Bull, A. / Segerberg, K. Basic Modal Logic. In: Gabbay / Guenthner [1983–89], Bd. II, S. 1–88.

[2002] Carnielli, W.A. / Congilio, E. / Loffredo D'attaviano, *I. Paraconsistency, the logical way to the inconsistent*, New York, Basel: Marcel Dekker.

[1986] Felscher, W. Dialogues as a foundation for intuitionistic logic. In: Gabbay / Guenthner [1983–89], Bd. III, S. 341–372.

[1993] Fitting, M. Basic Modal Logic. In: Gabbay / Hogger / Robinson [1993], S. 365–448.

[1983–89] Gabbay, D. / Guenthner, F. (Hrsg.) *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. I–IV, Dordrecht / Boston / Lancaster: D. Reidel.

[1993] Gabbay, D. / Hogger, C. / Robinson, J. (Hrsg.) *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 1: Logical Foundations.* Oxford: Clarendon Press.

[1985] Fuhrmann, A.T. Ein relevanzlogischer Dialogkalkül erster Stufe. *Conceptus*, Nr. 48, S. 51–65.

[1958] Guillaume, M. Rapports entre calculs propositionnels modaux et topologie impliqués par certaines extensions de la méthode de tableaux sémantiques. *Comptes rendus hebdomaires des seances de l'Academie des Sciences*, Bd. 246, S. 1140–1142, S. 2207–2210 und Bd. 247, S. 1281–1283.

[1984] Haas, G. *Konstruktive Einführung in die formale Logik.* Mannheim / Wien / Zürich: Bibliographisches Institut.

[1957] Hintikka, J. *Quantifiers in Deontic Logic.* Societas Scientiarum Fennica: Helsingfors.

[1961] Hintikka, J. Modality and Quantification. *Theoria*, Bd. 27, S. 119–128.

[1962] Hintikka, J. *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions.* Dordrecht: Reidel.

[1963] Hintikka, J. The modes of modality. *Acta Philosophica Fennica*, Bd. 16, S. 65–82.

[1978] Hughes, G.E. / Cresswell, M.J. *Einführung in die Modallogik.* Berlin, New York: Walter de Gruyter.

[1967] Kamlah, W. / Lorenzen, P. *Logische Propädeutik.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

[1985] Krabbe, E. Formal Systems of Dialogue Rules. *Synthese*, Nr. 63 (3), S. 295–328.

[1986] Krabbe, E. A Theory of Modal Dialectics. *Journal of Philosophical Logic*, 15, S. 191–217.

[1963a] Kripke, S.A. Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, Vol. 9, S. 67–96.

[1963b] Kripke, S.A. Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, 19, S. 83–94.

[1995] Lorenz, K. Modallogik (Artikel). In: Mittelstraß [1995], S. 907–911.

[1987] Lorenzen, P. *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie.* Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

[1978] Lorenzen, P. / Lorenz, K. *Dialogische Logik.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

[1995] Mittelstraß, J. (Hrsg.) *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie 2*, Stuttgart, Weimar: Metzler.

[2000] Nortmann, U. How to Extend the Dialogical Approach to Provability Logic. In: Rahman / Rückert [2001], S. 95–103.

[1993] Rahman, S. *über Dialoge, protologische Kategorien und andere Seltenheiten.* Frankfurt a. M., Berlin, New York, Paris, Wien: Peter Lang.

[1999a] Rahman, S. Hugh MacColl on Symbolic Existence: A Possible Reconstruction. *The Nordic Journal of Philosophical Logic*, Vol. 4 (2).

[1999b] Rahman, S. On Frege's Nightmare. A Combination of Intuitionistic, Free and Paraconsistent Logics. In: Wansing [2001], S. 61–85.

[1998] Rahman, S. / Carnielli, W.A. The Dialogical Approach to Paraconsistency. *Synthese*, Bd. 125, 1/2, 2000, S. 201–232.

[1999] Rahman, S. / Roetti, J.A. Dual Intuitionistic Paraconsistency without Ontological Commitments. *Contribution to the Congress: Analytic Philosophy at the turn of the Millenium*, pages 120–126, 1999.

[1998–99] Rahman, S. / Rückert, H. Die pragmatischen Sinn- und Geltungskriterien der Dialogischen Logik beim Beweis des Adjunktionssatzes. *Philosophia Scientiae* (3) 3, S. 145–170.

[2000] Rahman, S. / Rückert, H. (Hrsg.) *New Perspectives in Dialogical Logic*. Synthese (Sonderband), 127, 1–2, May 2001.

[1999] Rahman, S. / Rückert, H. / Fischmann, M. On Dialogues and Ontology. The Dialogical Approach to Free Logic. *Logique et Analyse.*, Bd. 160, 1997, S. 357–374.

[2002] Rahman, S. / Van Bendegem, J-P. The Dialogical Dynamics of Adaptive Consistency. In: Carnielli / Congilio / Loffredo D'attaviano [2002], S. 295–321.

[1999] Rückert, H. Why Dialogical Logic? In: Wansing [2001], 165–182.

[1994] Wansing, H. Sequent Calculi for Normal Modal Propositional Logics. *J. Logic Computat.*, Vol. 4, No. 2, S. 125–142.

[2001] Wansing, H. (Hrsg.) *Essays on Non-Classical Logic*, New Jersey, London, Singapore: World Scientific, 2001.