

DE L'INFLUENCE DU «PRINCIPE DE DUALITÉ»
SUR LE TRAITEMENT ALGÈBRIQUE DES PHRASES¹.

B. GODART-WENDLING

Depuis la parution des *Lois de la pensée* en 1854, l'algèbre logique de G. Boole s'est vue constamment critiquée par les logiciens qui lui reprochent une subordination excessive aux mathématiques². C'est une des raisons avancées par les historiens de la logique pour ne pas reconnaître en Boole un précurseur de la logique moderne³ : la logique booléenne ne marquerait qu'une période de transition — certes importante — entre la syllogistique aristotélicienne et les débuts de la logique moderne⁴.

Après les travaux que A. N. Whitehead (1898/1960 : Book II, 35-116) a consacrés aux conséquences mathématiques résultant des hypothèses restrictives imposées par la logique à l'algèbre, James W. Van Evra a proposé une relecture de Boole montrant l'intérêt de reconsidérer le rapport exact qu'entretient la logique booléenne avec la mathématique. Comme l'article de Van Evra a déjà contribué à jeter un doute sur la critique selon laquelle certaines expressions du système de Boole, empruntées aux mathématiques, seraient logiquement ininterprétables⁵, mon analyse ne reprendra pas di-

¹ Cet article a bénéficié des remarques constructives de Sylvain Auroux, Jean-Luc Chevillard et Frédéric Nef. Qu'ils en soient ici remerciés.

² On peut donner pour exemple Van Heijenoort qui, dans la préface de *From Frege to Gödel*, exprime cette opinion largement partagée : "It [l'algèbre logique de Boole] tries to copy mathematics too closely, and often artificially. (...) Considered by itself, the period would, no doubt, leave its marks upon the history of logic, but it would not count as a great epoch" (1966 : vi).

³ Cette position est, entre autres, clairement défendue par Kneale (1948 : 173), Passmore (1957 : 158), Dummett (1959 : 205) ou Blanché (1970 : 270). On trouvera cependant une réestimation positive des travaux de Boole dans A. N. Whitehead (1898/1960).

⁴ Feys (1954) est un des rares auteurs qui détonne dans cette appréciation de l'œuvre de Boole. Cf. aussi la critique du jugement de Feys par Dummett (1959 : 208).

⁵ L'utilisation dans la logique booléenne de la soustraction, de la variable de quantité indéterminée v , ainsi que l'apparente contradiction entre le rejet de la division et l'acceptation de coefficients fractionnaires, ont en effet été fortement critiqués par Jevons (1874 / 1958 : 113), Kotarbinski (1964 : 171), Bochensky (1956 : 348), Jorgensen (1962 : 115) et Heath (1967 : 347).

rectement cet aspect mais portera sur le traitement “mathématique” des équations logiques, c’est-à-dire sur leur réécriture sous forme d’un développement limité ainsi que sur la méthode employée pour éliminer les variables et réduire les systèmes de propositions.

Mon but n’est certes pas de nier l’inspiration mathématique de l’algèbre logique, ou de revenir sur ses limitations⁶, mais de préciser la nature de ses liens à la mathématique en montrant qu’elle ne procède pas — comme il a été dit — “artificiellement” par simple retranscription des lois mathématiques, car elle les remodèle en leur imposant une condition logique : le principe de dualité, qui par nature est étranger à la mathématique, même s’il se révèle compatible avec elle. Aussi, cette étude ne rappellera-t-elle pas seulement les emprunts que Boole a faits aux travaux de Taylor, Maclaurin, Lagrange, Cauchy et Weierstrass, mais soulignera surtout les transformations que Boole a fait subir aux acquis que ces auteurs ont apportés à la mathématique des XVIII^{ème} et XIX^{ème} siècles.

1. *Le principe de dualité*

Dans l’algèbre de Boole, le principe de dualité s’applique aux symboles littéraux⁷, c’est-à-dire aux variables $x, y, z, \dots$, qui désignent de façon extensionnelle soit la classe des objets correspondant au concept qu’ils expriment (cas des propositions primaires⁸), soit la portion de temps durant

⁶ C’est-à-dire, entre autres, son incapacité à exprimer la quantification, à distinguer entre concept et individu, à proposer une interprétation unifiée pour les propositions primaires et secondaires ... Ces limitations ont d’ailleurs été, dès la parution de la *Begriffsschrift*, mises en évidence par Frege (cf. dans les *Posthumous Writings*, les articles “Boole’s logical Calculus and the Concept-script” (1880/81) et “Boole’s logical Formula-language and my Concept-script” (1882), ainsi que l’article “Sur le but de l’idéographie” (1882/83) in Frege (1879/1925)).

⁷ Plus précisément, le principe de dualité est la seconde et dernière loi générale spécifique des symboles ; la première loi étant la commutativité, c’est-à-dire l’indifférence quant à l’ordre des symboles ($xy = yx$).

⁸ Une proposition primaire ou “concrète” exprime une relation entre des choses. Ainsi la proposition primaire “le soleil brille” est, dans l’algèbre booléenne, logiquement équivalente à la proposition “le soleil est ce qui brille”, et cette réécriture met nettement en évidence que la proposition primaire exprime une relation entre deux classes de choses : “le soleil” et “les choses qui brillent”. Une proposition secondaire ou “abstraite” exprime, par contre, une relation de dépendance (du type disjonctif, conditionnel, ...) entre deux ou plusieurs propositions primaires. Est secondaire, par conséquent, la proposition “si le soleil brille, la terre se réchauffe”, puisqu’elle exprime une relation de dépendance conditionnelle entre les deux propositions primaires “le soleil brille” et “la terre se réchauffe”.

laquelle est vraie la proposition X , Y , ou Z qu'ils représentent (cas des propositions secondaires)⁹. Cette interprétation purement extensionnelle des variables¹⁰ est la condition nécessaire permettant de justifier, d'un point de vue logique, le bien-fondé du principe de dualité qui s'exprime sous la forme algébrique $x^2=x$. En effet, élever au carré une variable revient à sélectionner deux fois la même classe d'objets (ou d'intervalle temporel), c'est-à-dire à effectuer, du point de vue de l'extension, une opération redondante, puisque le même résultat (la même classe) aurait été obtenu à partir de la variable seule¹¹. Boole écrit ainsi :

"Puisque la composition de deux symboles littéraux sous la forme xy exprime la totalité de la classe des objets auxquels les noms ou qualités représentés par x et y peuvent s'appliquer ensemble, il en découle que si les deux symboles ont exactement la même signification, leur composition n'exprime rien de plus que ce que l'un ou l'autre exprimait séparément." (1854 / 1992 : 49)¹².

⁹ Cette absence d'interprétation extensionnelle unitaire entre les propositions primaires et secondaires a été critiquée par Frege (1880/81 : 14) qui estime qu'elle a pour conséquence qu'on ne peut plus établir de "relation organique" entre les deux types de propositions. A l'opposé, Passmore loue l'approche de Boole en ces termes : "He [Boole] was the first to see, that is, that exactly the same logical analysis could be applied both to classes and to propositions." (1957:130).

¹⁰ Cette interprétation sera abandonnée par W. S. Jevons, ainsi que le rappelle Th. Hailperin : "[Jevons] believed that for simplicity and generality logic needed to be founded intensionally, i.e. on qualities or attributes rather than extensionally as classes. A proposition had to express sameness or equivalence of meaning, otherwise it was «imperfect»." (1986 : 119).

¹¹ La notion de *variable* dans le système booléen est donc ambiguë puisqu'elle recouvre l'opération de sélection d'un sous-ensemble d'objets ainsi que le résultat de cette opération, c'est-à-dire la classe d'objets sélectionnés grâce à l'opération (cf. C.I. Lewis 1918/1960 : 52). De plus, on constate que le principe booléen de dualité $x^2=x$ exprime, comme l'axiome d'idempotence de Leibniz $x+x=x$, que la répétition ne change rien (cf. l'essai de Leibniz (1690) *Non Inelegans Specimen Demonstrandi in Abstractis*). Il est à noter cependant que Boole ne pouvait pas, comme Leibniz, exprimer l'idempotence grâce au signe "+", car cette opération combine nécessairement dans son algèbre deux classes *distinctes*, si bien que l'expression « $x+x$ » est dépourvue de signification dans le système booléen (cf. les arguments de W. Kneale (1948 : 173) en faveur de la notation leibnizienne).

¹² La numérotation des pages réfère à la traduction française de 1992.

Ce principe logique de dualité¹³ doit également être légitimé en terme mental de “lois de la pensée”, puisque la logique ne fait — pour Boole — que refléter sous forme algébrique les “lois du raisonnement” humain (1992 : 42), c’est-à-dire la façon dont nous concevons les choses. Or, comme l’illustre l’exemple ci-dessous, ce que le principe de dualité exprime est qu’opérer deux saisies mentales identiques ou une seule conduit dans les deux cas à sélectionner la même classe d’objets :

“Supposons que par un acte défini de conception, l’attention se soit fixée sur la classe des hommes, et que, par une autre opération de la même faculté, nous la limitions à ceux de race blanche. Alors toute nouvelle répétition de ce dernier acte mental limitant l’attention aux seules choses blanches, ne modifie en aucune manière le résultat auquel l’on est parvenu, c’est-à-dire les hommes blancs. C’est là, également, un exemple d’une loi générale de l’esprit qui trouve son expression formelle dans la loi [de dualité] des symboles littéraux.” (1992 : 61).

Le bien-fondé du principe de dualité est de plus — selon Boole — confirmé par le fait qu’il a pour conséquence le principe aristotélien de non-contradiction¹⁴ selon lequel “Il est impossible que le même attribut appartienne et n’appartienne pas en même temps au même sujet et sous le même rapport” (Métaphysique, III, 3). En effet, selon la règle algébrique de transposition¹⁵, il est possible de dériver du principe de dualité $x-x^2=0$. Cette équation peut alors se réécrire en mettant x en facteur : $x(1-x) = 0$ et elle

¹³ Témoignant de l’intérêt porté au principe de dualité, le logicien A. Macfarlane (1879, *Principles of the algebra of logic, with examples*, Edinburgh) proposera — ainsi que l’explique Th. Hailperin (1986 : 125) — une variante de ce principe : “He [Macfarlane] finds that, for x single or positive, $x^2 = x$ and, if x is single or negative, $x^2 = -x$. (In the proof of this latter he uses $-1^2 = 1$ without comment). Thus Boole’s fundamental law $x^2 = x$ is replaced by $x^2 = \pm x$.”

¹⁴ Cf. C.I. Lewis (1918 : 55) pour une critique de cette «déduction logique».

¹⁵ Cette règle qui autorise le passage d’une variable d’un membre de l’équation à l’autre en changeant son signe est essentielle dans l’algèbre de Boole, car elle permet d’isoler dans un des membres de l’équation la variable que l’on souhaite définir et d’établir son interprétation grâce aux variables de l’autre membre de l’équation. La règle de transposition offre donc la possibilité de définir la variable que l’on veut, en l’extrayant de la forme algébrique de la proposition où elle se trouvait.

signifie¹⁶ : il est impossible [0] pour un être d'avoir une qualité [x] et de ne pas l'avoir en même temps [(1-x)].

Des conséquences sans équivalent dans le domaine des mathématiques vont alors découler du fait que les symboles littéraux sont soumis à la loi de dualité. Tout d'abord, cette loi permettra de vérifier la bonne-formation d'une expression contenant plusieurs variables ou d'une proposition retranscrite sous forme d'équation logique¹⁷ en contrôlant que l'ensemble de l'expression ou de l'équation est lui-même régi par le principe de dualité. De plus, la loi de dualité, en autorisant le passage du carré d'une variable à cette variable seule sera utilisée pour réaliser des simplifications qui n'auraient pas lieu d'être dans une algèbre classique. Nous verrons ainsi que les simplifications qu'elle autorise pourront avoir elles-mêmes pour conséquence de modifier profondément le traitement de certaines relations mathématiques — notamment celle de "fonction polynomiale" — lorsque Boole développera en vue d'une interprétation ses équations algébriques sous forme de fonction.

Enfin, cet assujettissement des symboles à la loi de dualité restreint considérablement leur domaine d'application dans le cadre des mathématiques, puisque les seules racines admises par l'équation $x^2=x$ sont les symboles

¹⁶ Dans l'algèbre de Boole, si x représente une classe quelconque de choses, alors $(1-x)$ représente la classe complémentaire, c'est-à-dire la classe qui contient toutes les choses qui ne sont pas contenues dans la classe x .

¹⁷ Dans l'algèbre de Boole, une proposition est retranscrite sous forme d'équation logique grâce aux trois signes d'opérations mentales +, -, ×, et à l'unique signe relationnel =. Plus précisément, on utilise :

- «+» pour réunir en une seule classe, deux ou plusieurs classes distinctes d'objets. Ce signe d'opération correspond aux conjonctions du langage naturel «et» ou «ou». (L'expression "les hommes et les femmes" s'écrira par conséquent " $x + y$ ").

- «-» permet de séparer une partie d'un tout, et se traduit en langage ordinaire par la préposition "sauf". ("Tous les hommes sauf les Asiatiques" s'écrira donc " $x - z$ ").

- le signe de multiplication "×" est utilisé pour former, à partir de deux ou plusieurs classes, la classe de leurs membres communs. Notons que le signe × représentant cette opération est généralement omis dans l'écriture des équations si bien que l'expression "les hommes bons" sera simplement symbolisé par " xb ".

- le signe «=» permet, quant à lui, de mettre en relation deux classes ayant même extension, c'est-à-dire contenant les mêmes objets.

Il est intéressant pour notre propos de rappeler que la critique concernant l'usage dans le système booléen d'expressions logiquement ininterprétables n'est pas pertinente vis-à-vis des signes d'opérations mentales. En effet, ainsi que l'explique J. W. Van Evra : "In modern terms (which are not to be found in Boole's own work), the symbols may be understood as follows : « $x \times y$ » stands for the intersection of the classes x et y , « $x + y$ » for a truncated version of class union in which the expression in question is significant except in those cases in which x and y intersect, and « $x - y$ » for what might be called logical exception (i. e., « x 's except for the y 's»), which is significant only if y is contained in x " (1977 : 366).

quantitatifs 0 et 1. L'algèbre de Boole n'est donc pas une simple retranscription des lois mathématiques dans leur ensemble, mais la création d'une algèbre particulière dont le champ d'application est — de par le principe de dualité — limité à deux valeurs. L'important est que cette restriction du domaine, due à une condition logique étrangère par nature et par conséquent non nécessaire à la mathématique, reste néanmoins compatible avec cette dernière, puisqu'elle a été obtenue conformément à ses lois. En effet, c'est de cette compatibilité que naît la possibilité de conserver le formalisme propre aux mathématiques pour exprimer les lois de la pensée.

Mais si l'adoption du principe de dualité limite le domaine des valeurs arithmétiques, elle modifie également leur statut et leur signification en en faisant des constantes logiques pourvues d'une interprétation logique. En effet, les symboles quantitatifs 0 et 1 n'ont plus dans l'algèbre de Boole leur sens arithmétique, mais sont dotés d'une signification apte à rendre compte de l'objet même de la logique : "les conceptions mêmes des choses". Ainsi qu'en témoigne le passage ci-dessous, Boole différencie très nettement le champ d'application des mathématiques de celui de la logique et pose la nécessité de recourir, pour ces deux systèmes de pensée, à des interprétations différentes de 0 et 1 :

"Dans des systèmes de pensée aussi réellement différents que ceux de la logique et de la mathématique (j'emploie ce dernier terme dans son sens le plus large de Science du Nombre), il n'y a, à rigoureusement parler, aucune communauté d'objet. L'un s'occupe des conceptions mêmes des choses, l'autre ne tient compte que de leurs relations numériques. Mais, dans la mesure où les formes et les méthodes de tout système de raisonnement dépendent immédiatement des lois auxquelles sont soumis les symboles, et seulement médiatement, par le biais de la relation exposée ci-dessus [la dualité], de leur interprétation, il pourrait être tout à la fois légitime et avantageux d'utiliser les mêmes symboles dans des systèmes de pensée différents, pourvu que puissent leur être assignées les interprétations qui rendent identiques leurs lois formelles et cohérent leur usage. Cet usage ne sera pas fondé sur leur communauté d'interprétation, mais sur la communauté des lois formelles auxquelles, à l'intérieur de leurs systèmes respectifs, ces symboles sont soumis." (1992 : 62-63).

Dans cette optique, les symboles arithmétiques 0 et 1 vont donc être redéfinis en termes logiques ; redéfinition qui tiendra compte de leur différence d'usage dans le cadre d'une proposition primaire ou secondaire, et qui, par conséquent, attribuera à chacun de ces symboles deux interpréta-

tions logiques. Ainsi, au sein d'une proposition primaire, 1 signifiera l'Univers¹⁸ et 0 le Rien¹⁹, alors que dans le cas d'une proposition secondaire, 1 représentera l'Éternité²⁰ et 0 le rien par rapport à la notion de temps. A cela Frege reprochera l'équivocité qui en résulte, c'est-à-dire l'utilisation de signes mathématiques employés dans des sens qui diffèrent de leur signification arithmétique²¹.

Il est à noter que l'algèbre logique de Boole qui s'est élaborée, d'après les termes mêmes de son auteur, par "analogie" avec les lois mathématiques, est cependant inappropriée pour exprimer la partie la plus élémentaire des mathématiques qu'est l'arithmétique. En effet, l'algèbre de Boole, comme la syllogistique aristotélicienne, est une logique des *termes*, qui par conséquent est incapable d'exprimer — comme en aura la possibilité la logique frégréenne des fonctions — la moindre relation mathématique. En restreignant "les signes exprimant la relation"²² à l'expression de la copule "est" ou "sont" (notée =), l'algèbre de Boole impose une réécriture des propositions qui a pour conséquence de faire prendre en charge aux variables la relation exprimée par le prédicat ; relation qui contribuera alors à déterminer extensionnellement la classe des objets dénotée par le terme qui

¹⁸ ou la totalité de la classe d'objets à laquelle réfère la variable. En effet, ainsi que l'écrivent W. Kneale et M. Kneale : "In practice Boole takes his sign 1 to signify what De Morgan called the *universe of discourse*, that is to say, not the totality of all conceivable objects of any kind whatsoever, but rather the whole of some definite category of things which are under discussion." (1962/1984 : 408). Ainsi que le rapporte Th. Hailperin, cet emprunt à De Morgan ne s'effectua qu'en 1854 et resta tacite : "In *Mathematical Analysis of Logic*, although there is mention of De Morgan's paper, Boole attributes nothing to De Morgan except for a minor syllogistic matter (BOOLE 1847, p. 82). His use of 1 for a fixed universe of all conceivable objects contrasts with De Morgan's changeable, not necessarily unlimited, but unsymbolized, universe of a proposition. However by 1854, in *Laws of Thought*, Boole has switched over to a changeable, possibly limited, universe of discourse, again designated by the symbol 1, but with no mention of De Morgan." (1986 : 115).

¹⁹ A ce propos, Th. Hailperin fait à juste titre remarquer : "Neither in *Mathematical Analysis of Logic* nor in *Laws of Thought* do we find Boole aware of problems associated with empty terms in the traditional categorical forms, even though an essential part of his method involves substituting 1 and 0 in for logical symbols." (1986 : 115).

²⁰ ou la portion de temps durant laquelle la proposition envisagée est vraie.

²¹ Se reporter à l'article de 1880/81 (pages 13 et 15) des *Posthumous Writings* où Frege, entre autres, écrit : "It would lead to great inconvenience if the same signs were to occur in one formula with different meanings".

²² Cf. 1992 : 52.

comprend cette relation²³. Ainsi la proposition :

“2 est inférieur à 3”
se réécrit dans l’algèbre booléenne :
“2 est celui qui est inférieur à 3”
c’est-à-dire :
 $x = y$

x désignant la classe constituée par l’objet “2” et y référant à la classe des nombres inférieurs à 3.

La relation mathématique “être inférieur à” est donc en quelque sorte neutralisée en tant que relation par ce type de réécriture, puisqu’elle n’agit plus que dans le cadre du terme y pour déterminer extensionnellement sa dénotation.

L’algèbre logique de Boole, connue pour son lien soi-disant trop étroit avec la mathématique, s’avère donc bien incapable d’exprimer celle-ci ...

II. *La notion mathématique de fonction polynomiale.*

La remodelisation des mathématiques grâce à l’action du principe de dualité est manifeste, lorsque Boole, s’inspirant du théorème de B. Taylor²⁴ relatif au développement limité²⁵ des fonctions sous forme polynomiale, définit — pour toute fonction $f(x)$ dans laquelle x est un symbole logique — sa propre notion de développement, en vue d’obtenir l’interprétation des équations logiques²⁶. Les modifications résultant de l’application du principe de dualité à la notion mathématique de fonction polynomiale sont de deux ordres : -un changement radical du domaine d’application du développement d’une fonction ; -une redéfinition de la notion de développement.

²³ L’appellation de “logique des termes” n’entre donc nullement en contradiction avec le fait que la logique de Boole soit une “logique des classes”. En effet, l’expression “logique des termes” permet simplement de mettre en évidence que c’est par le biais du *terme* que la classe d’objets correspondante est atteinte.

²⁴ Cf. la note 24 *supra* ainsi que Boole (1992 : 86, note 1).

²⁵ Dans sa généralité, ce développement est illimité. Toutefois, il s’emploie en pratique en ne prenant en compte qu’un nombre de termes limité, ce qui justifie son appellation usuelle de “développement limité”.

²⁶ Boole reproche d’ailleurs à W. S. Jevons d’avoir choisi d’interpréter des expressions et d’avoir abandonné le traitement des équations (cf. sur ce sujet Th. Hailperin 1986 : 121).

Dans son ouvrage *Boole's Logic and Probability*, Th. Hailperin estime que Boole "admit" la forme du développement qu'il utilisa pour traiter les équations logiques :

"To show that any function $f(x)$ can be developed he [Boole] *assumes*

(1) $f(x) = ax + b(1-x)$

and determines, by substituting $x = 1$ and $x = 0$, that $a = f(1)$ and $b = f(0)$, where $f(1)$ and $f(0)$ are the expressions resulting from $f(x)$ when x is replaced by 1 and 0. But as the equation

(2) $f(x) = f(1)x + f(0)(1-x)$

is true for the only two values with x admits, Boole conclude that the right-hand member "adequately represents the function $f(x)$ " and that the assumption of (1) is thereby justified."²⁷ (1986 : 91)

Nous aimerions, dans un premier temps, mettre en évidence que cette relation est démontrable si l'interaction du principe de dualité avec la notion de développement limité de la fonction $f(x)$ est prise en compte. Puis, dans un deuxième temps, nous expliquerons pourquoi Boole a pu faire l'économie de cette démonstration.

Au début du XVIII^{ème} siècle, le mathématicien B. Taylor démontre que, sous certaines conditions (voir ci-après), toute fonction dérivable connue au point a , et qui est de plus continue dans un intervalle donné $[a, a+h]$, peut être développée sous forme d'une série de monômes ordonnés suivant les puissances entières et ascendantes de h :²⁸

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + \dots + f^n(a)\frac{h^n}{n!} + \dots$$

Les coefficients de ce polynôme correspondent respectivement aux dérivées d'ordres successifs de la fonction au point a .

Ce développement implique évidemment, d'une part, l'existence et la continuité des n premières dérivées de la fonction dans l'intervalle $[a, a+h]$, et d'autre part, la convergence de la série de telle façon que la somme des termes du développement corresponde à la valeur numérique de $f(a+h)$. Cette convergence met donc en jeu la recherche de la limite de la série. Ainsi que le rappelle I. Grattan-Guinness (1988 : 74-77), cette représenta-

²⁷ Les italiques sont de nous.

²⁸ La notation $n!$ correspond à la fonction factorielle, i.e. : $n(n-1)(n-2)\dots 1$.

La notation f^n correspond à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f .

tion d'une fonction définie et continue par un développement unique en série prend sa justification au XVIII^{ème}, et surtout au XIX^{ème} siècle, grâce aux travaux de J. Lagrange, A. Cauchy et K. Weierstrass qui posèrent les bases du calcul différentiel, analysèrent la convergence des séries simples et multiples, étudièrent les notions de continuité et précisèrent toutes les questions relatives au calcul des limites.

En algèbre logique, les valeurs des symboles étant 0 et 1, le développement de C. Maclaurin est plus approprié, puisqu'il est une application du développement de Taylor à l'intervalle $[0, x]$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

L'application du principe de dualité à la relation (1) est *a priori* un non sens, car x ne pouvant prendre pour valeurs que 0 et 1, la fonction $f(x)$ est discontinue de type "impulsion" et par conséquent non dérivable²⁹. Cette impossibilité est détournée grâce au principe de dualité qui modifie profondément la nature du développement illimité donné par la relation (1). En effet, la dualité permet d'effectuer dans (1) des simplifications successives ($x = x^2 = x^3 = \dots = x^n$), de telle sorte que $f(x)$ ne se développe plus en fonction des puissances successives de x mais sous la forme particulière :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x}{2} + \dots + f^n(0)\frac{x}{n!} + \dots \quad (2)$$

soit en mettant x en facteur :

$$f(x) = f(0) + [f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} + \dots] x \quad (3)$$

Si l'on tient compte maintenant des deux seules valeurs³⁰ possibles pour x (0 et 1), la relation (3) conduit à la condition suivante pour $x = 1$:³¹

²⁹ On comprend par conséquent pourquoi Boole estimait que sa conception du développement d'une fonction était «un cas dégénéré du théorème de Maclaurin» (Cf. *Mathematical Analysis of Logic* 1847 : 60).

³⁰ Valeurs qui, rappelons-le, ont été déterminées en fonction du principe de dualité.

³¹ La condition pour $x = 0$ ne présente pas d'intérêt particulier, puisqu'elle conduit à obtenir $f(0) = f(0)$.

$$f(1) = f(0) + [f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} + \dots] \quad (4)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$[f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} + \dots] = f(1) - f(0) \quad (5)$$

c'est-à-dire l'expression sous la forme *finie* $[f(1) - f(0)]$ du développement

$$\text{illimité } [f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} + \dots]..$$

La relation (3) devient alors par substitution de (5) :

$$f(x) = f(0) + [f(1) - f(0)] x \quad (6)$$

soit :

$$f(x) = f(1) x + f(0) (1 - x) \quad (7)$$

Il s'ensuit que le développement logique³² de $f(x)$, tel qu'il est exprimé par la relation (7), ne fait pas intervenir les dérivées d'ordre successif de $f(x)$, puisque celles-ci ont été éliminées par la relation logique (5). La notion de dérivabilité d'une fonction n'est donc pas nécessaire pour obtenir le développement d'une fonction logique. L'algèbre logique de Boole remodèle par conséquent, grâce au principe de dualité, les fondements mathématiques des conditions d'obtention d'un développement en série polynomiale.

De fait, le développement d'une fonction logique $f(x)$, obtenu par la relation (7), réalise une partition logique entre les propriétés possédées ou non par x (ou l'intervalle de temps durant laquelle la proposition secondaire est vraie ou fausse) ; partition qui est comparable aux futures tables de vérité, puisque les coefficients $f(1)$ et $f(0)$ indiquent respectivement que la propriété représentée par x est ou n'est pas³³.

³² Nous qualifions ce développement de "logique", car il a été obtenu conformément au principe logique de dualité.

³³ W. Kneale qui, par ailleurs, est fort critique vis-à-vis de l'oeuvre de Boole reconnaît néanmoins à cette dernière le mérite d'avoir introduit la notion de «fonction de vérité» (1948 : 173).

La démonstration que nous venons de présenter et qui ne fut jamais explicitement donnée par Boole a été exposée dans le but de montrer la cohérence mathématico-logique du développement booléen. L'action du principe de dualité permet cependant d'expliquer pourquoi Boole n'eut pas à mentionner cette démonstration. En effet, la conséquence de l'application du principe de dualité est que toute équation algébrique est toujours du premier ordre par rapport à la variable, ce qui signifie qu'elle ne peut conduire qu'à un développement du premier ordre de la fonction $f(x) = f(0) + f'(0)x$. La substitution de $x = 1$ et $x = 0$ dans cette relation permet alors la détermination de la valeur $f'(0) = f(1) - f(0)$, et ce faisant conduit à obtenir directement la relation (7) : $f(x) = f(1)x + f(0)(1-x)$.

La forme du développement d'une fonction logique $f(x)$ à une variable — donnée par la relation (7) — permet par extension d'obtenir le développement logique d'une fonction à plusieurs variables indépendantes $f(x, y, \dots)$. Boole (1992 : 87) établit ainsi le développement d'une fonction à deux variables indépendantes $f(x, y)$ en considérant, dans un premier temps, la fonction $f(x, y)$ comme une fonction de x seul ; fonction qu'il développe alors conformément à la relation (7) sous la forme : $f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)(1-x)$. Ceci obtenu, il développe, dans un second temps, les coefficients $f(1, y)$ et $f(0, y)$ — qui ne contiennent que y comme variable — en utilisant de nouveau la relation (7). Il obtient alors $f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)(1-y)$ et $f(0, y) = f(0, 1)y + f(0, 0)(1-y)$. Par substitution de ces développements dans l'équation $f(x, y)$, il obtient finalement le développement recherché :

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1-y) + f(0, 1)y(1-x) + f(0, 0)(1-x)(1-y)$$

Nous nous proposons de montrer que cette relation peut être obtenue de façon beaucoup plus rigoureuse en utilisant le développement de Taylor appliqué à une fonction à deux variables indépendantes. Ainsi que le retrace I. Grattan-Guinness (1988 : 74 et 76), ce développement fut rendu possible grâce aux travaux de J. Lagrange et de A. Cauchy. Lagrange donna, en effet, dès 1759 les premières conditions permettant d'étendre la formule de Taylor à une fonction à plusieurs variables indépendantes. Pour ce faire, il réalisa l'extension du calcul différentiel (introduction de la notion de "dérivées partielles") aux fonctions à plusieurs variables indépendantes. Cauchy, quant à lui, analysa les notions de continuité, ce qui lui permit de montrer que les opérations sur les séries entières peuvent s'étendre aux

séries à plusieurs variables indépendantes³⁴. L'extension de la formule de Taylor appliquée à une fonction à deux variables indépendantes x et y prend alors la forme au voisinage des points $x = a$ et $y = b$:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h f'_x(a, b) + k f'_y(a, b) + \frac{1}{2} [h^2 f''_{x^2} + k^2 f''_{y^2} + 2hk f''_{xy}] + \dots + \frac{1}{n!} (h f'_x + k f'_y)^{[n]} \quad (8)$$

expression dans laquelle $f'_x = \frac{\delta}{\delta x}$ et $f'_y = \frac{\delta}{\delta y}$ représentent les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ par rapport à x et y et $f''_{x^2} = \frac{\delta^2}{\delta x^2}$ et $f''_{y^2} = \frac{\delta^2}{\delta y^2}$ et $f''_{xy} = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y}$ les dérivées partielles d'ordre deux. La notation $(h f'_x + k f'_y)^{[n]}$ rend, quant à elle, compte des dérivées partielles d'ordre n .

Ce développement appliqué à l'intervalle $[0, x]$ donne :

$$f(x, y) = f(0, 0) + x f'_x(0, 0) + y f'_y(0, 0) + \frac{1}{2} [x^2 f''_{x^2}(0, 0) + y^2 f''_{y^2}(0, 0) + 2xy f''_{xy}(0, 0)] + \dots \quad (9)$$

et se réduit, puisque les équations logiques de Boole sont du premier ordre par rapport aux variables logiques x et y ($f''_{x^2} = 0$ et $f''_{y^2} = 0$), à :

$$f(x, y) = f(0, 0) + x f'_x(0, 0) + y f'_y(0, 0) + xy f''_{xy}(0, 0) \quad (10)$$

Les dérivées partielles f' et f'' s'éliminent en substituant dans cette relation les combinaisons des valeurs possibles (0 et 1) pour x et y . Les relations suivantes sont alors obtenues :

- 1) $x = 0$ et $y = 0$. Ces valeurs qui ne présentent aucun intérêt, puisqu'elles conduisent à l'identité $f(0, 0) = f(0, 0)$.

³⁴ I. Grattan-Guinness rappelle de plus cette découverte pertinente pour notre propos : "Cauchy also showed, in the paper ("Sur le développement des fonctions en série", 1822, *Bull. sci. Soc. Philom.*, vol. 49-54, Paris), that Lagrange's belief in the expandability of any function $f(x+h)$ in a Taylor-series expansion about x for all values of x and h suffered counter-examples such as $\exp(-1/x^2)$ at $x = 0$." (1988 : 76).

- 2) $x = 1$ et $y = 0$ conduit à obtenir : $f(1, 0) - f(0, 0) = f'_x(0, 0)$
 3) $x = 0$ et $y = 1$ conduit à obtenir : $f(0, 1) - f(0, 0) = f'_y(0, 0)$
 4) $x = 1$ et $y = 1$ conduit à obtenir : $f(1, 1) - f(0, 0) = f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0) + f''_{xy}(0, 0)$

Les valeurs des dérivées partielles obtenues à partir des relations 2-3-4 permettent alors d'écrire la relation (10) sous la forme logique :

$$f(x, y) = f(0, 0) + x[f(1, 0) - f(0, 0)] + y[f(0, 1) - f(0, 0)] + xy[f(1, 1) - f(0, 0) - f(1, 0) - f(0, 1) + f(0, 0)] \quad (11)$$

expression qui se met sous la forme :

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1 - y) + f(0, 1)y(1 - x) + f(0, 0)(1 - x)(1 - y) \quad (12)$$

Cette démonstration permet de retrouver l'expression que Boole avait établie en considérant successivement x comme une variable et y comme une constante, puis y comme une variable et x comme une constante dans la relation (7).

Les quatre termes du développement sont, de par le principe de dualité, mutuellement exclusifs ; ils représentent la totalité des quatre classes d'objets qui peuvent être décrites par l'attribution et la non-attribution des propriétés exprimées par x et y . Ce type de développement, obtenu grâce à la loi de dualité, n'a pas d'équivalent en algèbre ordinaire. Le calcul présenté ci-dessus peut être aisément appliqué au cas d'une fonction $f(x, y, z, \dots)$ à n variables logiques indépendantes.

III. Coefficients et Constituants.

Les développements (7) et (12) comportent une suite de termes composée d'un coefficient (de la forme $f(a, b)$) associé à un constituant contenant des variables logiques ($x, y, \dots$). Boole répartit les coefficients en quatre catégories : $[1]$, $[0]$, $[\frac{0}{0}]$, $[a \neq 1, a \neq 0, a = \frac{1}{0}]$ et examine plus précisément les deux dernières puisque celles-ci posent problème en ne satisfaisant pas à la loi de dualité $a(1-a) = 0$.

Si Boole démontre que tout coefficient a différent de 1 ou 0 entraîne l'annulation du constituant qui lui est affecté (1992 : 102), il ne propose en

revanche aucune démonstration pour le coefficient, symbole de l'infini, $\frac{1}{0}$. En effet, Boole affirme simplement à son propos que son constituant doit être égalé à 0, car "plus un nombre s'approche de l'infini, moins il est à même de satisfaire la loi fondamentale" (1992 : 103).

La catégorie $\frac{0}{0}$, symbole de classe indéfinie, ne correspond plus pour Boole, comme en mathématique, à un passage à la limite d'une variable x dans un quotient de fonction. Boole la considère en effet comme une simple substitution des valeurs 0 ou 1 dans le coefficient d'un constituant du développement de la fonction. Plus précisément, Boole ne peut justifier l'application de la loi de dualité au coefficient $\frac{0}{0}$. Il procède alors par analogie avec les expressions que l'on obtient en mathématiques, lorsque le recourt à la comparaison de deux infiniment petits pour lever l'indétermination associée à $\frac{0}{0}$, permet d'obtenir que le quotient tend soit vers l'infini, soit vers a ou 0. Boole transpose ce résultat en affirmant que le coefficient " $\frac{0}{0}$ " signifie qu'il faut prendre en compte *tout*, *partie* ou *rien* de la classe à l'expression de laquelle elle est préfixée" (1992 : 102). Ces trois interprétations obéissent alors en partie à la loi de dualité, puisque "tout" peut être associé à 1 et "rien" à 0. Le problème persiste cependant pour la signification "partie" que Boole note par le symbole v et pour lequel il affirme sans justification qu'il obéit à la loi de dualité³⁵.

L'obligation d'annuler chaque constituant — quand son coefficient est différent de 0, 1 ou v — a pour conséquence que l'équation logique associée au développement de la fonction est réécrite sous la forme d'un système d'équations logiques constitué, d'une part, de l'équation initiale où ne subsistent que les termes associés aux coefficients 0, 1 et v , et d'autre part, des équations correspondant aux constituants qui ont été égalés à 0. Cette décomposition n'a pas d'équivalent en algèbre classique et est une conséquence directe du principe de dualité.

L'application de la loi de dualité aux coefficients et aux constituants d'une équation logique rend possible, grâce au nouveau système d'équations obtenu, son interprétation et a pour conséquence que toute fonction logique V "interprétable de manière indépendante" (i.e. "sans que soit pré-

³⁵ Bien que ce symbole v ait été l'objet de très nombreuses critiques, il est intéressant de remarquer que C. S. Peirce (1867) continuera à l'utiliser pour noter les classes indéterminées et que J. Venn (1894) y recourra également pour indiquer le sens de "partie" ou de "rien" (cf. Th. Hailperin 1986 : 122 et 127).

supposée une relation quelconque entre les choses que représentent les symboles qu'elle contient") satisfait la loi symbolique : $V(1-V) = 0$ (1992 : 104).

IV. Élimination des variables et réduction des systèmes de propositions.

L'introduction du principe de dualité ne se limite pas à modifier la forme du développement d'une fonction, car elle agit également sur le traitement algébrique d'élimination des variables et de réduction des systèmes d'équations. En effet, en algèbre classique, la condition nécessaire et suffisante relative à l'élimination de variables dans un système d'équations, est que si l'on veut éliminer n variables dans un système d'équations indépendantes, il faut disposer d'un système comprenant au moins $n+1$ équations indépendantes. Or dans l'algèbre logique de Boole, il n'existe plus aucune relation, ou condition nécessaire et suffisante, entre le nombre d'équations représentant les propositions et le nombre de symboles logiques que l'on peut supprimer. Il est ainsi possible d'éliminer un nombre quelconque de symboles dans un nombre quelconque d'équations logiques : une équation unique suffit même à la limite pour éliminer tous les symboles que l'on ne veut pas prendre en compte explicitement dans l'interprétation de cette équation.

Plus précisément, l'élimination des variables $x, y, \dots$, dans une équation logique $f(x, y, \dots) = 0$ est obtenue en donnant successivement aux symboles $x, y, \dots$, les valeurs 1 et 0, et en multipliant l'une par l'autre les équations ainsi obtenues. Cette règle se démontre, en considérant, à titre d'exemple, le développement du premier membre de $f(x)$ sous sa forme logique :

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1-x) = 0 \quad (7)$$

de la façon suivante :

- a) tout d'abord, la relation (7) peut se mettre sous la forme :
 $[f(1) - f(0)]x + f(0) = 0$
 ce qui permet de déduire les valeurs de x et de $(1-x)$, soit respectivement :

$$x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)} \quad \text{et} \quad (1-x) = -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)}$$

- b) Si l'on remplace x et $(1-x)$ dans la loi de dualité $x(1-x) = 0$, on obtient :

$$-\frac{f(0)f(1)}{[f(0)-f(1)]^2}=0$$

c) ce qui implique :

$$f(0).f(1)=0 \quad (13)$$

Cette relation (13) traduit la règle d'élimination énoncée ci-dessus; règle au statut logique puisqu'elle dérive du principe logique de dualité. L'équation $f(1)f(0)=0$ a de plus le statut de condition nécessaire et suffisante permettant d'éliminer x (quelle que soit son interprétation) dans toute équation logique³⁶.

Pour une équation logique $f(x, y)=0$, l'élimination des deux symboles x et y s'obtient en éliminant tout d'abord x grâce à la relation (13), ce qui donne :

$$f(1, y)f(0, y)=0 \quad (14)$$

puis en éliminant — dans cette nouvelle équation à une variable — le symbole y en appliquant de nouveau la relation (13). La relation d'élimination s'écrit alors :

$$f(1, 1)f(1, 0)f(0, 1)f(0, 0)=0 \quad (15)$$

et elle est une extension de la relation (13).

La relation d'élimination (13) ne fait que traduire le fait qu'il n'y a pas d'objet qui soit à la fois dans la classe $f(1)$ et dans la classe $f(0)$. Elle signifie donc que la classe $f(1).f(0)$ ne contient aucun objet³⁷, puisque ces classes sont mutuellement exclusives.

Ce processus d'élimination logique permet de supprimer dans une équation logique tout symbole dont on ne veut pas tenir compte dans le développement de l'équation, c'est-à-dire dans son interprétation. Les so-

³⁶ Il est par contre impossible, ainsi que l'a écrit Th. Hailperin (1986 : 101), de démontrer la suffisance de cette condition sans supposer que $f(x)$ satisfait la loi fondamentale.

L'application de la condition $f(1)f(0)=0$ pour éliminer la variable v dans une équation s'avère, de plus, problématique puisque Boole considère que v ne peut prendre que les valeurs duales 1 et 0.

³⁷ Il en est de même de la relation (15) qui ne traduit que le fait qu'il n'y a pas d'objet qui soit à la fois dans les classes $f(1, 1), f(1, 0), f(0, 1)$ et $f(0, 0)$; autrement dit que $f(1, 1)f(1, 0)f(0, 1)f(0, 0)=0$ ne contient aucun objet.

lutions logiques ne pouvant produire des termes superflus ou redondants sont considérées par Boole comme des "solutions pures" (1992 : 119).

Enfin, en présence d'un système de propositions (d'équations) ayant des symboles communs, il s'avère nécessaire si l'on désire connaître l'interprétation d'un symbole ou d'un ensemble de symboles en fonction des autres symboles de réduire le système en une équation unique équivalente. Cette équation permettra alors de présenter une interprétation du système sous n'importe quelle forme possible souhaitée.

Le procédé de réduction d'un système d'équations en une équation unique équivalente n'est possible que par la mise en application de la loi de la dualité (par le biais des développements logiques) et n'a donc pas d'équivalent en algèbre ordinaire.

Pour réduire, par exemple, un système de deux équations $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$, on les développe en fonction de leurs constituants :

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1-y) + f(0, 1)(1-x)y + f(0, 0)(1-x)(1-y) = 0$$

$$g(x, y) = g(1, 1)xy + g(1, 0)x(1-y) + g(0, 1)(1-x)y + g(0, 0)(1-x)(1-y) = 0$$

Deux cas sont alors envisageables :

- 1) Les coefficients f et g sont positifs: l'équation logique unique équivalente $h(x, y) = 0$ sera simplement la combinaison linéaire des deux équations du système étudié. Soit :

$$h(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = 0 \quad (16)$$

Cette combinaison linéaire se justifie par le fait que les constituants du développement de $h(x, y)$, dont les coefficients ne s'annulent pas, donnent un ensemble de relations identiques à celles obtenues séparément par chacun des constituants des développements de $f(x)$ et de $g(x)$. Il y aura donc identité d'interprétation entre le système et $h(x, y)$.

L'équation $h(x, y) = 0$ résume donc en son développement la signification totale des équations dont elle est issue.

- 2) Si les coefficients f et g sont quelconques (positifs ou négatifs), l'équation unique sera écrite sous la forme :

$$h(x, y) = [f(x, y)]^2 + [g(x, y)]^2 = 0 \quad (17)$$

Cette équation est maintenant à coefficients positifs et admet, compte tenu du *principe de dualité* appliqué aux constituants, une interprétation équivalente à celle de la relation (16), c'est-à-dire à celle du système $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$.

La méthode de réduction booléenne s'avère donc relever de la logique en conférant à cette dernière le rôle de condition nécessaire et suffisante à

laquelle est assujetti tout raisonnement algébrique classique. Van Evra décrivait donc un des aspects fondamentaux de l'algèbre de Boole lorsqu'il insistait sur le fait que : "In the method, we see one of the first important attempts to bring mathematical methods to bear on logic while retaining the basic independence of logic from mathematics" (1977 : 374)³⁸.

L'algèbre logique de Boole ne s'est donc pas élaborée en empruntant aveuglément à la mathématique ses théorèmes et ses lois, car le principe de dualité les a, en fait, profondément remodelés dans une perspective logique. Ce ne sont donc pas ses propriétés trop purement "mathématiques" qui ont empêché l'algèbre de Boole d'être à l'origine de la logique moderne. L'analyse de la réécriture des équations booléennes sous forme de développement d'une fonction polynomiale a en effet mis en évidence que l'action du principe de dualité élimine les notions de *fonction continue*, de *limite* et de *dérivée* qui sont au cœur des difficultés théoriques soulevées tout au long du XIX^{ème} siècle par l'analyse infinitésimale et pour lesquelles la fin du siècle montrera qu'elles se résolvent grâce aux notions arithmétiques. Le principe de dualité eut donc aussi pour conséquence d'éloigner le calcul logique de la réflexion arithmétique qui sera, avec Frege, à l'origine de la logique moderne.

(Paris VII, CNRS, URA 381)

BIBLIOGRAPHIE

- Blanché, R. (1970). "Boole et l'algèbre de la logique", in *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, A. Colin, pp. 269-278.
- Bochenski, I. M. (1956). *Formale Logik*, Verlag Karl Alber, Freiburg/München.
- Boole, G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, reprinted in *Studies in Logic and Probability*, 1952, pp.45-119.
- Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought*, Cambridge, trad. fr. *Les lois de la pensée*, 1992, Vrin.
- Boole, G. *Studies in Logic and Probability*, R. Rhees (ed.), Watts & Co., London, 1952.

³⁸ Cf. aussi les pages 365 et 373 où Van Evra développe cette idée de la logique comme discipline indépendante des mathématiques.

I. Grattan-Guinness défend, quant à lui, une position plus nuancée qui resitue systématiquement l'approche de Boole dans une chronologie historique : "At one extreme, Boole had used mathematics to analyse (his form of) logic ; at the other extreme, Russell claimed that only (his form of) logic was needed to analyse mathematics." (1988 : 78).

- Dummett, M. (1959). Review of *Studies in Logic and Probability*, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 24, n°3, pp. 203-209.
- Feys, R. (1954) "Boole as a logician", *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 57, Sec. A, n° 6, pp. 97-106.
- Feys, R. (1954) "Boolean Methods of Development and Interpretation", *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 57, Sec. A, n° 6, pp. 107-112.
- Frege, G. (1879/1925). *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil.
- Frege, G. (1969). *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*, trad. angl. (extraits) *Posthumous Writings*, 1979, University of Chicago Press.
- Grattan-Guinness, I. (1988). "Living together and living apart. On the interactions between mathematics and logics from the French Revolution to the First World War", *South African Journal of Philosophy*, vol. 7, n°2, pp. 73-82.
- Hailperin, Th. (1986). *Boole's Logic and Probability*, second edition, North-Holland.
- Heath, P. L. (1967) "Boole", in *The Encyclopedia of Philosophy*, The MacMillan Co. and The Free Press, New York; Collier-MacMillan, London.
- Jevons, W. S. *The Principles of Science, a Treatise on Logic and Scientific Method*, Dover Publications, Inc., New York (1958). A reprint of the London edition of 1874.
- Jorgensen, J. *A Treatise of Formal Logic*, Russell and Russell, New York (1962). A reprint of the Copenhagen edition of 1931.
- Kneale, W. (1948). "Boole and the Revival of Logic", *Mind* 57, pp. 149-175.
- Kneale, W. and Kneale, M. (1962/1984). *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press, pp. 404-420.
- Kotarbinski, T. (1964). *Leçons sur l'histoire de la logique*, Paris, PUF, pp. 163-183.
- Lewis, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*, chap 1, Berkeley, University of California Press. Reprint by Dover Publications, Inc., 1960.
- Nagel, E. (1935) "Impossible Numbers", in *Studies in the History of Ideas*, vol. III, Columbia U. P.
- Nuchelmans, G. "L'algébrisation de la logique", à paraître dans *Histoire des idées linguistiques*, tome 3 : *L'hégémonie du comparatisme*, S. Aurox (dir.), Liège, Mardaga.
- Passmore, J. (1957). *A Hundred Years of Philosophy*, chap VI, pp. 122-157, London, Duckworth.

- Peirce, C. S. (1867) "On an improvement in Boole's calculus of logic", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 7, pp. 250-261.
- Schröder, E. (1877). *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Teubner, Leipzig.
- Styazhkin, N. I. (1969). *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*, Cambridge Mass, MIT Press.
- Van Evra, J.W. (1977). "A Reassessment of George Boole's Theory of Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 18, pp. 363-377.
- Van Heijenoort, J. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel*, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Cambridge, Harvard University Press, 660p.
- Venn, J. (1894) *Symbolic Logic*, second edition, Macmillan and Co., London and New York (Reprinted 1971 by Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y.)
- Whitehead, A. N. (1898). *A Treatise on Universal Algebra*, Hafner Publishing company, New York, 1960.