Logique & Analyse **153-154** (1996), 51-67

THÉORIES PARACONSISTANTES DES ENSEMBLES

Newton C.A. DA COSTA et Jean-Yves BÉZIAU[1]

Abstract
Paraconsistency is a way to develop set theory with a Russellian set. We present here two main paraconsistent set theories, one similar to Quine's NF and the other one analogous to Church theory with a universal set. Basic properties of Russell set are studied. Some striking features of the paraconsistent relation of membership are described. The paper is a synthesis of old results (by da Costa, Arruda, Batens, Sylvan) and new ones (by da Costa, Béziau, Wertheyser).

0. *Vers une mathématique paraconsistante*

Le but de cet article est de donner un aperçu synthétique de l'application de la logique paraconsistante à la théorie des ensembles.

La logique paraconsistante existe depuis maintenant plus de trente ans (pour un aperçu général de cette logique voir par exemple [da Costa/Béziau /Bueno 1995] où le lecteur pourra trouver les références nécessaires à son initiation à la paraconsistance ici présupposée). Cependant comme dans le cas de beaucoup de logiques non-classiques, c'est surtout la partie propositionnelle qui a été étudiée et développée, or il semble nécessaire pour qu'une logique puisse vraiment mériter le nom de logique, qu'elle dépasse le stade d'une simple algèbre ou d'un calcul élémentaire au pouvoir d'expression extrêmement réduit, et qu'elle puisse notamment servir d'instrument pour le raisonnement mathématique et conséquemment qu'elle puisse s'appliquer à une science telle que la physique, par exemple.

Le premier d'entre nous a déjà esquissé une ébauche d'application de la logique paraconsistante aux «mathématiques concrètes», en l'occurrence à la géométrie affine finie (cf [da Costa 1989]). D'un autre côté, le développement de théories des ensembles paraconsistantes est un complément théorique fondamental pour l'élaboration d'une mathématique paraconsistante, en tant notamment que premier pas vers une théorie paraconsistante

[1] Titulaire d'une bourse du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique et de l'Académie Suisse des Sciences Techniques.

des structures mathématiques qui serait une adaptation, par exemple, de la théorie des structures de Bourbaki (cf [Bourbaki 1970]), aux préceptes de la paraconsistance.

1. *L'ensemble de Russell et le schéma d'abstracton*

Dans cet article nous allons présenter certaines théories paraconsistantes des ensembles (c'est-à-dire des théories des ensembles inconsistantes mais non-triviales).

De même qu'il y a différentes théories classiques des ensembles (Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel, Kelley-Morse, NF et ML de Quine, etc.), il existe de nombreuses théories paraconsistantes des ensembles.

Il est possible que dans une théorie des ensembles paraconsistante il y ait un ensemble de Russell: $r = \{x ; x \notin x\}$. Et comme alors à partir d'hypothèses très faibles on peut prouver que l'union de r est identique à la classe universelle v, il est naturel que cette classe soit elle aussi un ensemble, qui est membre de lui-même ($v \in v$). Tout ceci exige que l'on prenne un minimum de précautions pour développer de telles théories qui dépassent bien souvent notre intuition quotidienne.

De plus, les relations de Russell, qui elles aussi conduisent à des contradictions, peuvent également être admises. Soit $<x_1, x_2, ..., x_n>$ un n-uplet ordonné, la relation $r_{n,i}$ est définie comme suit:

$$<x_1, x_2, ..., x_n> \in r_{n,i} \leftrightarrow <x_1, x_2, ..., x_n> \notin x_i.$$

Si dans l'équivalence ci-dessus nous substituons les variables $x_1, x_2, ... x_n$ par $r_{n,i}$, il s'en suit alors que:

$$<r_{n,i}, r_{n,i}, ..., r_{n,i}> \in r_{n,i} \leftrightarrow <r_{n,i}, r_{n,i}, ..., r_{n,i}> \notin r_{n,i}$$

ce qui nous conduit à la contradiction:

$$<r_{n,i}, r_{n,i}, ..., r_{n,i}> \in r_{n,i} \wedge <r_{n,i}, r_{n,i}, ..., r_{n,i}> \notin r_{n,i}.$$

Si l'on considère par convention que $<x_1> = x_1$, on voit que $r_{1,1} = r$.

L'ensemble de Russell ou les relations de Russell ne peuvent pas être étudiés sans problème dans le cadre d'une théorie des ensembles paraconsistante contenant un schéma d'abstraction sans aucune restriction.

En effet, d'après le paradoxe de Curry-Moh Show Kwey le schéma d'abstraction *(tout prédicat détermine un ensemble)* est trivial sur la base d'une logique extrêmement faible sans négation. Il faut donc en général (si l'on veut travailler avec une implication usuelle; pour une solution différente voir [Arruda et da Costa 1984]), même dans les théories paraconsistantes, introduire des restrictions appropriées au niveau du schéma d'abstraction.

La forme générale du schéma d'abstraction est la suivante:

$$\text{(ABS)} \qquad \exists y \forall t\, (t \in y \leftrightarrow \exists x_1 x_2 \ldots x_n\; (t = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \wedge \phi\, (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

où les variables satisfont les restrictions usuelles; lorsque $n = 1$, alors (ABS) devient:

$$(\text{ABS}_1) \qquad \exists y \forall t\, (t \in y \leftrightarrow t = x_1 \wedge \phi\, (x_1))$$

ou encore:

$$(\text{ABS}_1\text{'}) \qquad \exists y \forall t\, (t \in y \leftrightarrow \phi\, (t)).$$

Si l'on veut donc avoir une théorie des ensembles contenant un ensemble de Russell, la solution la plus simple, et que nous adopterons, sera de donner un axiome qui affirme l'existence d'un tel ensemble.

Ces considérations étant faites, nous allons, après quelques remarques sur le langage et les définitions, décrire deux types de théories des ensembles paraconsistantes: la première basée sur NF et la seconde sur la version de Church de ZF (munie d'un ensemble universel) (cf [Church 1974] et [da Costa 1986]).

2. *Langage et définition*

Le langage des théories des ensembles que nous allons étudier est le langage ensembliste usuel, c'est-à-dire celui du calcul des prédicats avec identité (=) et comme unique symbole non-logique, le symbole de prédicat binaire d'appartenance ($\in$); les symboles logiques seront les symboles usuels de connecteurs ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\leftrightarrow$) et de quantificateurs ($\forall$, $\exists$).

La logique sous-jacente que nous utiliserons pour développer ces théories est la logique paraconsistante de premier ordre avec égalité $C_1^=$ (voir [da Costa 1964] et [da Costa 1974]); dans cette logique il y a une négation forte $\neg^*$ définie à partir de la négation faible de la façon suivante: $\neg^* \phi = \neg\phi \wedge \phi^\circ$ où $\phi^\circ = \neg\, (\phi \wedge \neg\phi)$.

Nous allons maintenant introduire au moyen de définitions contextuelles à la Russell le descripteur et l'abstracteur de Russell. Dans les ouvrages usuels de théorie des ensembles, il n'est en général pas fait mention de ce genre de procédés. Toutefois ils sont absolument indispensables pour que des manipulations extrêmement élémentaires, telles que celle du symbole bourbachique représentant le vide, $\varnothing$, aient un sens. Nous allons donc rappeler ces définitions contextuelles et évoquer quelques problèmes qui se posent à leur adaptation au monde de la paraconsistance (pour de plus amples détails sur ce problème et la notion de définition contextuelle voir [da Costa/Béziau 1997]).

Descripteur

$$
\begin{aligned}
&x = \iota y\phi\,(y) \equiv_{def} \exists y\,(x = y \wedge \phi\,(y) \wedge \forall t\,(\phi\,(t) \rightarrow t = y))\\
&\iota y\phi\,(y) = x \equiv_{def} \exists y\,(y = x \wedge \phi\,(y) \wedge \forall t\,(\phi\,(t) \rightarrow t = y))\\
&x \in \iota y\phi\,(y) \equiv_{def} \exists y\,(x \in y \wedge \phi\,(y) \wedge \forall t\,(\phi\,(t) \rightarrow t = y))\\
&\iota y\phi\,(y) \in x \equiv_{def} \exists y\,(y \in x \wedge \phi\,(y) \wedge \forall t\,(\phi\,(t) \rightarrow t = y))\\
&\iota y\phi\,(y) = \iota x\psi\,(x) \equiv_{def} \exists y\exists x\,(y = x \wedge \phi\,(y) \wedge \psi\,(x)\\
&\qquad\qquad \wedge \forall t\,(\phi\,(t) \rightarrow t = y) \wedge \forall t\,(\psi\,(t) \rightarrow t = x))\\
&\iota y\phi\,(y) \in \iota x\psi\,(x) \equiv_{def} \exists y\exists x\,(y \in x \wedge \phi\,(y) \wedge \psi\,(x)\\
&\qquad\qquad \wedge \forall t\,(\phi\,(t) \rightarrow t = y) \wedge \forall t\,(\psi\,(t) \rightarrow t = x))
\end{aligned}
$$

Abstracteur

La définition usuelle de l'*abstracteur* ou *classificateur relationnel* est la suivante:

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\ \phi\,(x_1, \ldots, x_n)\\
&\quad \equiv_{def} \iota y\,(\forall t\,(t \in y \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n\ (t = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge \phi\,(x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

en particulier: $\hat{x}\phi x \equiv_{def} \iota y\,(\forall x\,(x \in y \leftrightarrow \phi x \equiv_{def} \{x : \phi x\}$.

Remarquons qu'en logique paraconsistante on ne peut pas en général de $x \in y \leftrightarrow \phi x$ déduire $x \notin y \leftrightarrow \neg\phi y$; ou encore si $\phi = \neg\psi$, de $x \in y \leftrightarrow \neg\psi x$, on ne peut pas en déduire $x \notin y \leftrightarrow \psi x$.

Une idée serait alors de définir l'abstracteur avec les deux clauses suivantes (nous ne donnons la définition que pour les relations unaires):

1) Si ϕ n'est pas la négation d'une formule:

$$\hat{x}\phi x \equiv_{def} \{x : \phi x\} \equiv_{def} \iota y\,(\forall x\,(x \in y \leftrightarrow \phi x) \wedge (x \notin y \leftrightarrow \neg\phi y))$$

2) Si ϕ est de la forme $\neg\psi$:

$$\hat{x}\,\neg\psi x$$
$$\equiv_{def} \{x : \neg\psi x\} \equiv_{def} \iota y\,(\forall x\,(x \in y \leftrightarrow \neg\psi x) \wedge (x \notin y \leftrightarrow \psi y)).$$

L'ensemble de Russell r que nous écrirons $\{x : x \notin x\}$ serait donc défini comme suit:

$$r \equiv_{def} \iota y \forall x\,((x \in y \leftrightarrow x \notin x) \wedge (x \notin y \leftrightarrow x \in x)).$$

Cependant quelle que soit la manière dont on le définit, il mène à une contradiction.

Ce n'est pas le cas des ensembles non-circulaires; étudions un peu le cas de l'ensemble non-circulaire d'anti-circonférence 2. Si nous définissons le classificateur

$$c \equiv_{def} \{x\,;\, \neg\exists x_1 x_2\,(x \in x_1 \in x_2 \in x)\}$$

de la façon suivante:

$$c \equiv_{def} \iota y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \neg\exists x_1 x_2\,(x \in x_1 \in x_2 \in x)$$
$$\wedge\, x \notin y \leftrightarrow \exists x_1 x_2\,(x \in x_1 \in x_2 \in x))$$

alors on peut opérer le raisonnement suivant qui ne serait pas possible avec la première définition du classificateur:

Supposons que $c \in c$, alors on obtient: $\neg\exists x_1 x_2\,(c \in x_1 \in x_2 \in c)$, mais si l'on pose $x_1 = c$ et $x_2 = c$, alors il résulte que: $\exists x_1 x_2\,(c \in x_1 \in x_2 \in c)$ puisque $c \in c$.

Supposons à présent que $c \notin c$, alors on a: $\exists x_1 x_2\,(c \in x_1 \in x_2 \in c))$ donc $x_2 \in c \in x_1 \in x_2$, on a: $\neg\exists t_1 t_2\,(x_2 \in t_1 \in t_2 \in x_2)$ mais comme $x_2 \in c$, on a: $\neg\exists t_1 t_2\,(x_2 \in t_1 \in t_2 \in x_2)$.

Donc en appliquant la loi du tiers-exclu, de l'existence de c on en conclut la contradiction:

$$\exists x_1 x_2\,(c \in x_1 \in x_2 \in c)) \wedge \neg\exists x_1 x_2\,(c \in x_1 \in x_2 \in c)).$$

Cependant cette définition alternative de l'abstracteur mène à la trivialisation si on l'adopte en toute généralité (voir l'Annexe), sans réduire drastiquement les postulats de la théorie des ensembles. Ici nous nous contenterons donc d'opter pour la forme usuelle. Mais alors, dans certains cas, on a un dédoublement, puisque par exemple on peut définir un autre symbole $\varnothing$ en utilisant la seconde forme de l'abstracteur (qui nous donnera un résultat plus proche de la forme classique) qui n'est pas équivalent au symbole défini par la forme usuelle.

Par ailleurs, en général, étant donné une définition en théorie des ensembles classique dans laquelle apparaît $\neg$, il existe deux définitions correspondantes en théorie des ensembles paraconsistantes, une avec la négation faible $\neg$ et une avec la négation forte $\neg^*$. De manière conventionnelle nous utiliserons l'étoile pour le second type de définition; par exemple:

$x \notin y$ est une abrévation de $\neg(x \in y)$ et
$x \notin^* y$ est une abréviation de $\neg^* (x \in y)$,

de manière similaire on a: $x \neq y$ et $x \neq^* y$, et donc

$$\varnothing \equiv_{def} \{x : x = x\} \text{ et } \varnothing^* \equiv_{def} = \{x : x \neq^* y\}.$$

Dans les théories des ensembles paraconsistantes que nous allons étudier, il n'y a donc pas un ensemble vide mais *deux* ensembles vides, ce qui illustre la richesse de la paraconsistance qui est fertile même dans le vide.

Remarquons cependant que la notion d'ensemble non-vide ne dépend pas de cette ambivalence de la définition de l'ensemble vide, car comme on le sait «x est non-vide» peut s'exprimer simplement par la formule «$\exists y\ (y \in x)$».

3. *Une théorie des ensembles paraconsistante de type* NF

3.1. *La théorie des ensembles de Quine* NF_0

Des détails à propos de NF se trouvent notamment dans [Quine 1953] et [Rosser 1953]. Ici nous désignerons NF par NF_0; ses postulats logiques sont ceux de la logique classique de premier ordre avec identité et ses postulats non-logiques sont les suivants:

(E) Extensionnalité: $\forall t\ (t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y$
(SS) Séparation stratifiée: $\exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow \phi x)$
où ϕ est stratifiée.

On démontre facilement que dans NF_0 on a:

$$\exists y \forall t\ (t \in y \leftrightarrow \exists x_1 x_2 \ldots x_n\ (t = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \wedge \phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

dès lors que $\phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est stratifiée si l'on attribue le même type à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

NF_0 possède certains traits originaux. Par exemple, comme la classe de tous les ensembles v est un ensemble, l'ensemble des parties de v est inclu dans v, donc le théorème de Cantor n'est pas valable en général. Par ailleurs l'axiome du choix dans sa formulation usuelle est incompatible avec NF_0, comme l'a démontré Specker [Specker 1953]. La notion de paire ordonnée peut être définie de différentes manières, à la manière de Quine (cf [Rosser 1953]) ou à la manière de Kuratowski; c'est cette dernière que nous adopterons.

3.2. *La théorie des ensembles paraconsistante* NF_1

Nous présentons maintenant la théorie des ensembles paraconsistantes NF_1, basée sur la logique paraconsistante du premier ordre avec identité $C_1^=$.

Le langage de NF_1 est le même que celui de NF_0 et ses postulats non-logiques sont:

(E) Extensionnalité: similaire à NF_0

(SS) Séparation stratifiée: similaire à NF_0

(SP) Séparation paraconsistante:

$\exists y \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (<x_1, \ldots, x_n> \in y \leftrightarrow <x_1, \ldots, x_n> \notin x_i)$
où $1 \leq i \leq n$.

L'axiome (SP) assure dans NF_1 l'existence de relations de Russell $r_{n,i}$ ($1 \leq i \leq n$), en particulier l'existence de l'ensemble de Russell $r_{1,1}$ (ou plus simplement r) et on a le paradoxe de Russell généralisé: $r_{n,i} \in r_{n,i} \wedge r_{n,i} \notin r_{n,i}$, et en particulier $r \in r \wedge r \notin r$. Il est clair donc que NF_1 est inconsistante. La question qui se pose est de savoir si elle est non-triviale et nous avons la réponse relative suivante:

Théorème 1 Si NF_0 *est consistante, alors* NF_1 *est non-triviale.*

Preuve. Voir [da Costa 1986].

4. *Une théorie des ensembles paraconsistante de type Church*

Dans l'élaboration des théories paraconsistantes des ensembles, au lieu de partir de NF, on peut utiliser ZF, le système de Zermelo-Fraenkel.

Dans la formulation usuelle de ZF, il n'y a pas d'ensemble universel, l'existence d'un tel ensemble conduisant à une trivialisation du système. Toutefois A. Church a présenté une version de ZF avec un ensemble universel dont la consistance résulte de la consistance du système ZF usuel (cf [Church 1974]).

4.1. *La théorie des ensembles de Church* CHU_0
Nous commencerons par décrire le système de Church que nous désignerons par CHU_0. Le langage de CHU_0 est le même que celui de NF_0 et il n'y a aucune difficulté à définir les notions fondamentales de la théorie des ensembles contextuellement, par exemple au moyen du classificateur, lui-même défini contextuellement. Nous pouvons ainsi définir les notions suivantes:

- ensemble transitif: $trans\,(x) \equiv_{def} \forall y\,(y \in x \rightarrow y \subseteq x)$
- ensemble connexe:
  $connex\,(x) \equiv_{def} \forall uv\,(u, v \in x \rightarrow (u \in v \vee v \in u \vee u = v))$
- ensemble régulier:
  $reg\,(x) \equiv_{def} \exists y\,(y \in x) \rightarrow \exists t\,(t \in x \wedge t \cap x = \emptyset)$
- ordinal: $ord\,(x) \equiv_{def} trans\,(x) \wedge connex\,(x) \wedge reg\,(x)$.

Les postulats non-logiques de CHU_0 sont les suivants:

- (EXT) Extensionnalité, (PAI) Paire, (UNI) Union, (INT) Intersection, (INF) Infini, (PAR) Parties,
- (SEP) Séparation, (SUB) Substitution, (COM) Complément.

Tous ces axiomes, sauf les trois derniers, sont similaires aux axiomes de la version standard de ZF.

(COMP) affirme l'existence du complément d'un ensemble: $\exists u \forall x\,(x \in u \leftrightarrow x \notin y)$; la forme churchienne de l'axiome de substitution nous dit que l'image par une fonction (définie par une formule) d'un ensemble régulier est un ensemble et enfin la forme churchienne de l'axiome de séparation s'énonce comme suit:

$$reg\,(z) \rightarrow \exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi x \wedge (y \text{ n'est pas libre dans } \phi).$$

Dans CHU_0 on démontre le théorème de Cantor pour les ensembles réguliers, par contre étant donné l'axiome (COM), le complément d'un ensemble est toujours un ensemble.

4.2. *La théorie des ensembles paraconsistante* CHU_1
La théorie CHU_1 que nous allons introduire est par rapport à CHU_0 ce qu'est NF_1 par rapport à NF_0. C'est une théorie paraconsistante dans laquelle il y a des inconsistances bien qu'apparemment elle ne soit pas triviale. La logique sous-jacente à ZF_1 est également $C_1^=$.

Les postulats de CHU_1 sont les mêmes que ceux de CHU_0 mis à part que l'on remplace la négation par la négation forte, mais que l'axiome (COMP) est conservé à côté de l'axiome $(COMP)^*$ $(\exists\ \{y : y \notin^* x\})$ qui assure l'existence d'un complément fort et que l'on ajoute le postulat supplémentaire (SP) qui nous assure l'existence des relations de Russell.

De même que dans le cas de NF_1, il est clair que CHU_1 est inconsistante et l'on a:

Théorème 2 Si CHU_0 *est consistante, alors* CHU_1 *est non-triviale.*
Preuve. Voir [da Costa 1986].

5. *Propriétés de l'ensemble de Russell*

En utilisant des propriétés très faibles de la négation, on peut démontrer une série de résultats très intéressants concernant l'ensemble de Russell, qui sont valables aussi bien dans NF_1 que dans CHU_1.

Théorème 3 (Arruda) $\ldots \wp(\wp(r)) \subseteq \wp(r) \subseteq r$
Preuve.
(1) $\wp(r) \subseteq r$
Si $x \in \wp(r)$, alors $x \subseteq r$.
Si $x \in x$, donc $x \in r$; si $x \notin x$, par définition de r, $x \in r$.
(2) $\wp(\wp(r)) \subseteq \wp(r)$
Si $x \in \wp(\wp(r))$, alors $x \subseteq \wp(r)$, donc par (1), $x \subseteq r$, donc $x \in r$.
(3) Et ainsi de suite.

Lemmes
(1) $x \in r \rightarrow \{x\} \in r$
(2) $x, y \in r \rightarrow \{x, y\} \in r$

Preuve.
(1) Si $\{x\} \notin \{x\}$, alors $\{x\} \in r$. Si $\{x\} \in \{x\}$, alors $x = \{x\}$, donc $\{x\} \in r$.
(2) Si $\{x, y\} \notin \{x, y\}$, alors $\{x, y\} \in r$. Et si $\{x, y\} \in \{x, y\}$ alors $\{x, y\} = x$ ou $\{x, y\} = y$, donc dans un cas comme l'autre, par hypothèse, $\{x, y\} \in \{x, y\}$. En appliquant la loi du tiers-exclu on en conclut que $\{x, y\} \in \{x, y\}$.

Théorème 4 (Arruda-Batens) $\forall x (\{\{x, r\}\} \in r)$
Preuve. Si $\{\{x, r\}\} \notin \{\{x, r\}\}$, alors $\{\{x, r\}\} \in r$. Si $\{\{x, r\}\} \in \{\{x, r\}\}$, alors $\{\{x, r\}\} = \{x, r\}$, donc $x = r$, comme $r \in r$, on a: $x \in r$, donc en utilisant les lemmes: $\{x, r\} \in r$ et $\{\{x, r\}\} \in r$.

Théorème 5 (Arruda-Batens) $\bigcup r = v$

Preuve.

Supposons $\{x, r\} \notin \{x, r\}$, alors $\{x, r\} \in r$, donc $x \in \bigcup r$. Supposons maintenant $\{x, r\} \in \{x, r\}$, alors $\{x, r\} = x$ ou $\{x, r\} = r$. Dans le second cas comme $r \in r$, $\{x, r\} \in r$ et donc $x \in \bigcup r$. Dans le premier cas on en déduit d'abord que $\{\{x, r\}\} = \{x\}$, et de par le théorème précédent $\{x\} \in r$, donc $x \in \bigcup r$.

Corollaire $\bigcup^n r_{n,i} = v$

Corollaire Dans NF_1, *r n'est pas cantorien.*

En ce qui concerne la définition d'ensemble cantorien voir [Rosser 1953].

Comme pour tout x, $\{\{x, r\}\} \in r$, on peut introduire une nouvelle relation d'appartenance définie comme suit:

$$\{\{x, r\}\} \mathrel{\overline{\in}} \{\{y, r\}\} \leftrightarrow x \in y.$$

Ainsi r apparaît comme une sorte de «modèle interne». Par ailleurs r contient $\mathbb{N}^*$ (les entiers), $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, les ordinaux et les cardinaux (toutes ces notions étant construites avec la négation forte).

Théorème 6 (da Costa)

$x \subseteq r \rightarrow x \in r \qquad \exists y\,((y \in r) \wedge (y \in r)^\circ \wedge (y \neq^* r))$

6. *La nouvelle dimension de la relation d'appartenance*

6.1. *Propriétés fondamentales*

En utilisant les propriétés de la logique paraconsistante $C_1^=$ (en fait principalement les propriétés de la logique propositionnelle C_1) on montre facilement le résultat suivant:

Théorème 7 Dans ZF_1 *et* CHU_1 *on démontre:*

$\forall x \forall y\,(\neg^* (x \notin y) \vee (x \in y \wedge x \notin y) \vee (x \notin^* y))$

Intuitivement, le théorème précédent signifie qu'étant donné les ensembles x et y quelconques, on a l'une des trois situations suivantes:

(1) x appartient à y

(2) x appartient à y et x n'appartient pas à y

(3) x n'appartient «pas du tout» à y

La situation (2) peut être interprétée comme une indétermination, que ce soit le «flou» de la logique floue, ou bien un analogue à la troisième valeur de la logique trivalente. En ce qui concerne cette seconde possibilité voir la sémantique trivalente non-vérifonctionnelle fournie pour C_1 dans [Béziau 1990] qui s'adapte facilement à cette situation.

Comme pour le théorème précédent, en utilisant les propriétés de la logique paraconsistante propositionnelle on a les théorèmes suivants:

Théorème 8 Dans ZF_1 *et* CHU_1 *on démontre:*

$$(x \in y)^\circ \to ((x \in y) \wedge \neg^* (x \notin^* y)) \vee ((x \notin y) \wedge (x \notin^* y))$$

$$(x \in y)^\circ \to ((x \notin y) \leftrightarrow (x \notin^* y))$$

Ces propriétés sont vraies pour n'importe quelle relation binaire R d'une théorie de premier ordre construite sur la base de la logique paraconsistante $C_1^=$ et illustrent le fait que la logique paraconsistante fait intervenir un nouveau concept de relation qui étend et amplifie l'ancien.

Nous rappelons que dans $C_1^=$ on a une négation forte $\neg^*$ qui jouit de toutes les propriétés classiques et que la logique classique est traductible dans $C_1^=$ au sens suivant: si dans une formule ϕ on remplace la négation faible $\neg$ par la négation forte $\neg^*$ obtenant de la sorte la formule *transposée* ϕ^*, alors si ϕ est un théorème dans la logique classique sa transposée est un théorème de $C_1^=$, de plus si Γ est un ensemble de formules et Γ^* l'ensemble transposé obtenu en remplaçant chaque formule de Γ par sa transposée alors si ϕ est déductible classiquement de Γ, ϕ^* est déductible dans $C_1^=$ de Γ^*.

Théorème 9 Si ϕ *est déductible de* Γ *dans* NF_0 (respectivement CHU_0) *alors* ϕ^* *est déductible de* Γ^* *dans* NF_1 (respectivement CHU_1).
Preuve. Voir [da Costa 1986].

De même on peut facilement adapter les théorèmes célèbres (Gödel, Church, Tarski) à NF_1 et CHU_1 (voir [da Costa 1971]).

Ce dernier théorème nous dit que, en quelque sorte NF_1 (respectivement CHU_1) est plus forte que NF_0 (respectivement CHU_0), alors même que la logique $C_1^=$ sous-jacente est d'une certaine façon plus faible que C_0. (En ce qui concerne l'éclaircissement de cet apparent paradoxe et d'autres similaires relatifs à la comparaison des logiques, voir [Béziau/Tsuji 199?]).

Théorème 10 Dans ZF_1 *et* CHU_1 *on démontre:*

$\forall x \exists y\,(x \neq^* y)$ $\quad \exists x \exists y\,(x \neq^{*} y)$ $\quad \neg^* \forall x \forall y\,(x = y)$ $\quad x \neq^* x \rightarrow \phi$

$\exists x_1 \ldots \exists x_n\,(\wedge\,(x_i \neq x_j) \wedge (x_1 \in v \wedge \ldots \wedge x_n \in v)),\, n \in \mathbb{N} - \{0\},$
$1 \leq i \neq j \leq n$

$\forall x \forall y\,(x = y)^\circ \rightarrow \neg^* \exists x\,(x \neq x)$

$\forall x \forall y\,(x = y)^\circ \rightarrow \neg^* \exists x \exists y\,(x = y \wedge x \neq y)$

$(x = x)^\circ \rightarrow \neg^*(x \neq x) \qquad (x = y)^\circ \wedge \neg\,(x = y)^\circ \rightarrow \phi$

Ces résultats s'obtiennent facilement à partir des théorèmes précédents.

Théorème 11 (Wertheyser) Dans ZF_1 *et* CHU_1 *on démontre* $\exists x \exists y\,(x = y)^\circ$.

Preuve. Supposons que $\neg^* \exists x \exists y\,(x = y)^\circ$, alors $\forall x \forall y \neg^*(x = y)^\circ$, donc $\neg^*(x = y)^\circ$, donc $\neg\neg(x = y \wedge x \neq y)$, donc $x = y$, donc $\forall x \forall y\,(x = y)$. Mais comme $\neg^* \forall x \forall y\,(x = y)$ (cf théorème précédent), donc $\neg^* \neg^* \exists x \exists y\,(x = y)^\circ$, donc $\exists x \exists y\,(x = y)^\circ$.

De façon similaire on démontre aussi $\forall x \exists y\,(x = y)^\circ$.

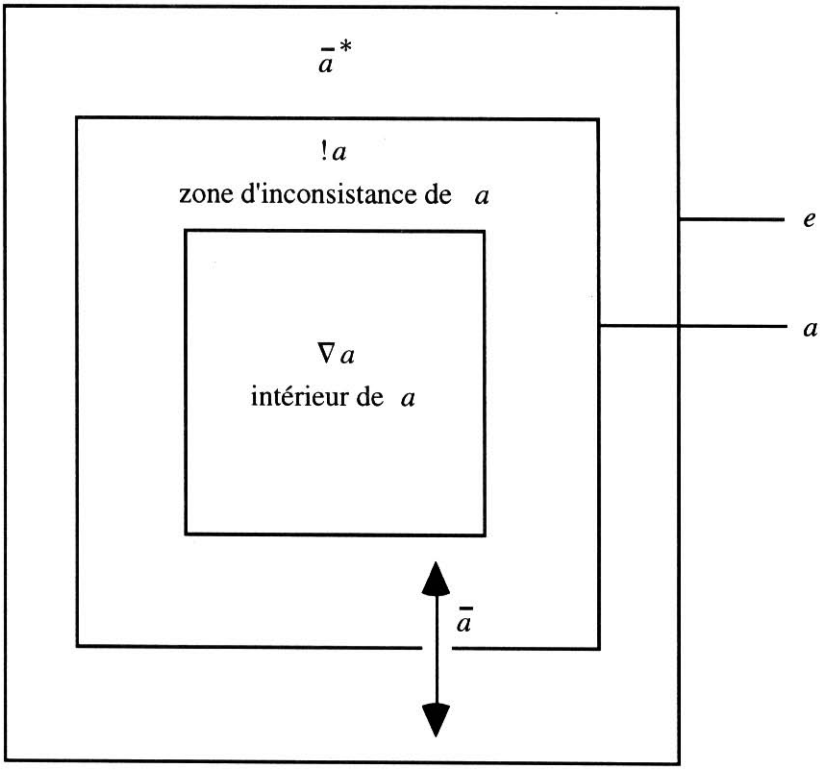
6.2. *Quelques caractéristiques de l'opérateur Nabla*

Jusqu'à présent les propriétés de la négation paraconsistante que nous avons évoquées sont essentiellement celles ayant trait à la négation forte et à la loi du tiers-exclu, c'est-à-dire en fait ce que nous avons dit concerne fondamentalement les propriétés du sous-système C_i de $C_1^=$ (voir à ce sujet [Béziau 1991]). Cependant la négation de $C_1^=$ a des propriétés supplémentaires qui sont données par les postulats de préservation et qui dans le cas de la théorie des ensembles nous apportent des informations supplémentaires sur la relation entre le complément, l'intersection et l'union de deux ensembles.

Tout d'abord commençons par fixer diagrammatiquement les idées relatives au complément d'un ensemble. Étant donné un ensemble e et un sous-ensemble a de e, on a:

- le complémentaire classique de a dans e:
  $\overline{a}^* = \{x \in e; x \notin^* a\}$
- le complémentaire relatif de a dans e:
  $\overline{a} = \{x \in e; x \notin a\}$.

On peut se représenter la situation par le schéma suivant:



L'intérieur de a, ∇a, étant défini comme $\{x : x \notin^* \bar{a}\}$, et la zone d'inconsistance de a, $!a$, comme $\{x : x \in a \wedge x \notin a\}$.

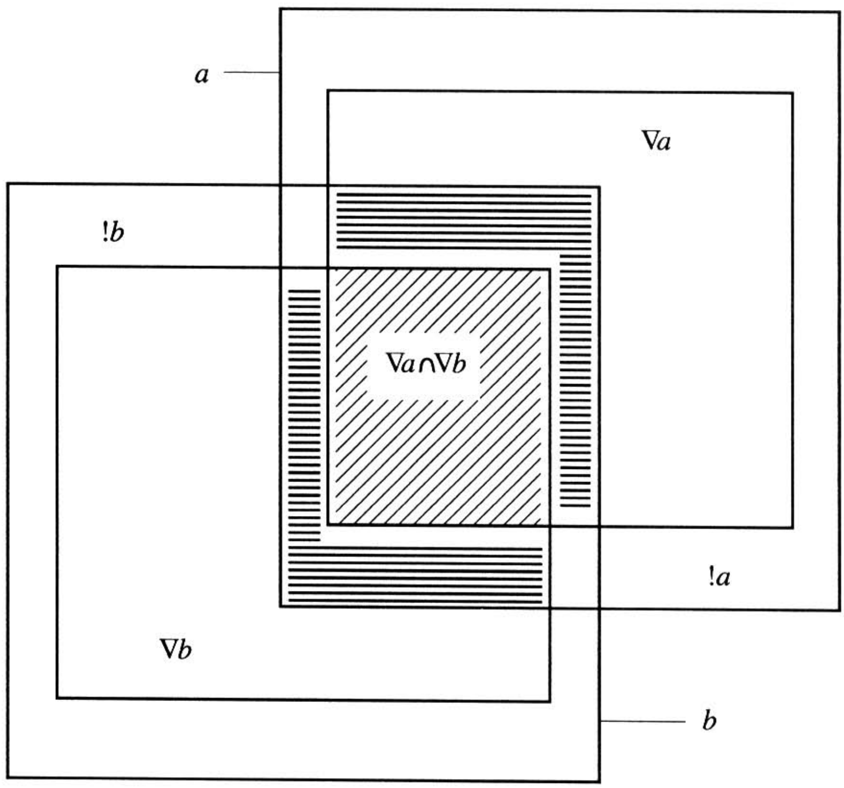
Ce qui est intéressant c'est que les axiomes de préservation de $C_1^=$ concernant les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ (à savoir $\psi^\circ \wedge \phi^\circ \rightarrow (\psi \wedge \phi)^\circ$ et $\psi^\circ \wedge \phi^\circ \rightarrow (\psi \vee \phi)^\circ$) permettent d'expliciter où sont situés les intérieurs de $a \cap b$ et $a \cup b$ par rapport aux intérieurs des deux ensembles a et de b.

En fait on a les résultats suivants:

Théorème 12 (Béziau)
$\nabla a \cap \nabla b \subseteq \nabla (a \cap b)$ est équivalent à $a^\circ \cap b^\circ \subseteq (a \cap b)^\circ$
$\nabla a \cap b \subseteq \nabla (a \cap b)$ est équivalent à $a^\circ \subseteq (a \cap b)^\circ$
$a \cap \nabla b \subseteq \nabla (a \cap b)$ est équivalent à $b^\circ \subseteq (a \cap b)^\circ$
où $a^\circ = \{x \in e; x \in \overline{a \cap \bar{a}}\}$.

Preuve. Adaptation directe des résultats de [Béziau 1995] (en utilisant la notion de définition contextuelle).

Il est facile de voir que $\nabla(a \cap b) \subseteq a \cap b$. Nous avons donc la figure suivante qui nous indique comment se situe $\nabla(a \cap b)$. Dans une théorie des ensembles paraconsistante ayant pour base la logique $C_1^{=}$, la zone est comprise dans $\nabla(a \cap b)$ et si l'on utilise à la place de $C_1^{=}$ la logique renforcée $C_1^{=+}$ (voir [Béziau 1990]) la zone y est comprise de surcroît:



Des résultats comparables peuvent être obtenus relativement à l'union de deux ensembles.

Ces résultats peuvent également s'étendre aux unions et intersections infinies si l'on utilise cette fois les postulats de préservation concernant les quantificateurs (à savoir $\forall x\phi^{\circ}x \rightarrow (\exists x\phi x)^{\circ}$ et $\forall x\phi^{\circ}x \rightarrow (\forall x\phi x)^{\circ}$) qui nous permettent de déduire dans $C_1^{=}$: $\neg(\forall x\phi x) \rightarrow \exists x\neg\phi x$ et $\neg(\forall x\neg\phi x) \rightarrow \exists x\phi x$. Et dans la logique paraconsistante de premier ordre $C_1^{=+}$, qui est obtenue avec les postulats suivants: $\exists x \phi^{\circ} x \rightarrow (\exists x \phi x)^{\circ}$ et $\exists x \phi^{\circ} x \rightarrow (\forall x \phi x)^{\circ}$, on a en outre: $\neg (\exists x \phi x) \rightarrow \forall x \neg \phi x$ et $\neg \exists x \neg \phi x \rightarrow \forall x \phi x$, ce qui nous permet d'obtenir des propriétés supplémentaires sur les unions et les intersections infinies.

On peut essayer d'analyser le comportement de l'ensemble r de Russell à l'aide de ces notions, on a ainsi les résultats suivants:

Théorème 13 Dans ZF_1 *et* CHU_1 *on démontre:*
$\nabla r \cup !r \cup \bar{r}^{*} = v \quad \nabla r \cap !r = \varnothing^{*} \quad !r \cap \bar{r}^{*} = \varnothing^{*} \quad \nabla r \cap \bar{r}^{*} = \varnothing^{*}$
$r \in !r \quad \exists x (x \in !r)$

Remarque: tous ces résultats, sauf les deux derniers, valent pour un ensemble quelconque a.

Théorème 14 (da Costa) Dans ZF_1 *et* CHU_1 *on démontre* $(v \in v)^{\circ} \vdash v \in \nabla r$.

On démontre le même résultat pour $v_{n+1} = v_n - \{n\}$ $(v_0 = v)$, et pour tout a tel que $a \in a$.

Annexe sur le classificateur et la paraconsistance

Lemmes
(1) Si x n'est pas libre dans la formule ϕ, alors $\exists \hat{x}\phi$.
(2) Si $\exists \hat{x}\phi$ et $\exists \hat{x}\psi$, alors: $\hat{x}\phi = \hat{x}\psi \rightarrow (\eta(\hat{x}\phi) \leftrightarrow \eta(\hat{x}\psi))$.

Preuve.
(1) On a $\phi \vee \neg^{*}\phi$. Si ϕ, alors $\phi \leftrightarrow x = x$ et $\hat{x}\phi = \hat{x}(x = x) = v$, donc $\exists \hat{x}\phi$. Si $\neg\phi$, alors $\phi \leftrightarrow x \neq^{*} x$ et $\hat{x}\phi = \hat{x}(x \neq^{*} x) = \varnothing^{*}$, donc $\exists \hat{x}\phi$.
(2) Évident de par les propriétés de l'identité et les définitions du descripteur et du classificateur.

Théorème (da Costa) Le schéma (AN) $\exists \hat{x}\phi \rightarrow (\forall x (x \notin \hat{x}\phi \leftrightarrow \neg\phi)$ *trivialise* NF_1 *et* CHU_1.

Preuve. Supposons que $\phi \leftrightarrow \psi$ et que x ne figure pas libre dans ϕ et ψ, alors par le lemme 1: $\exists \hat{x}\phi$, $\exists \hat{x}\psi$ et $\hat{x}\phi = \hat{x}\psi$. Donc par le schéma (AN): $x \notin \hat{x}\phi \leftrightarrow \neg\phi$, et par le lemme 2: $x \notin \hat{x}\phi \leftrightarrow x \notin \hat{x}\psi$, et comme par (AN) on a $x \notin \hat{x}\psi \leftrightarrow \neg\psi$, il résulte que $\neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$.

Mais R. Sylvan a démontré (cf [Sylvan 1990]) que si l'on rajoute la règle $\phi \leftrightarrow \psi \,/\, \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$ à C_1 on obtient la logique classique, donc le schéma

(AN) trivialise NF_1 et CHU_1 puisque l'axiome (SP) est évidemment trivial en logique classique.

Si nous voulons utiliser (AN) dans NF_1 ou CHU_1, il faut lui imposer des restrictions convenables. Il y a plusieurs solutions possibles:

S1) Limiter (AN) au cas où x ne figure que symboliquement dans l'abstraction $\hat{x}\phi$. Cette solution est problématique car:

$$\phi \leftrightarrow (\phi \wedge x = x) \text{ et } \hat{x}\phi = \hat{x}\,(\phi \wedge x = x).$$

S2) Restreindre (AN) au cas où ϕ appartient à une certaine catégorie de formules, par exemple les combinaisons booléennes de formules atomiques, ou exiger que ϕ soit stratifiée.

S3) Dans certains cas particuliers, comme par exemple le cas de l'ensemble vide, supposer que les abstractions définies soient «normales»:

$$Nor\,(\hat{x}\phi) \equiv_{def} \forall x\,(x \notin \hat{x}\phi \leftrightarrow \neg\phi).$$

Remarquons enfin que le schéma suivant est néanmoins théorème de NF_1 et de CHU_1:

$$\exists\hat{x}\phi \rightarrow (\forall x\,(x \notin^{*} \hat{x}\phi \leftrightarrow \neg^{*}\phi).$$

Institut des Hautes Études, Université de São Paulo
Av. Prof. Luciano Gualberto, trav. J, 374, 05508-900, S. Paulo, S.P., Brésil
e-mail: {ncacosta,beziau}@usp.br

BIBLIOGRAPHIE

Arruda, A.I. et Batens, D., 'Russell's set versus the universal set in paraconsistent set theory', *Logique et Analyse*, 98 (1982), 121-133.

Arruda, A.I. et da Costa, N.C.A., 'On the relevant systems P and P^* and some related systems', *Studia Logica*, 43 (1984), 33-49.

Béziau, J.-Y., «Logiques construites les méthodes de da Costa», *Logique et Analyse*, 131-132 (1990), pp. 259-272.

Béziau, J.-Y., «Nouveau regard et nouveaux résultats sur la logique paraconsistante C_1», *Logique et Analyse*, 141-142 (1993), pp. 45-58.

Béziau, J.-Y., *Recherches sur la logique universelle*, Université de Paris 7, Paris, 1995.

Béziau, J.-Y. et Tsuji, M., «Une approche structuraliste de la sociologie», à paraître, 1998

Bourbaki, N., *Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1970.

Church, A., 'Set theory with a universal set', in: *Proceedings of the Tarski Symposium*, L. Henkin (ed), A.M.S., Providence, 1974, pp. 297-308.

da Costa, N.C.A., «Calcul des prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 258 (1964), 1111-1113.

da Costa, N.C.A., «Sur un système inconsistant de théorie des ensembles», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 258 (1964), 3144-3147.

da Costa, N.C.A., «Sur les systèmes formels C_1, C_1^*, $C_1^=$, D_1 et NF_1», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 260 (1965), 5427-5430.

da Costa, N.C.A., «Remarques sur le système NF_1», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 272 (1971), 1149-1151.

da Costa, N.C.A., 'On the theory of inconsistent formal systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15 (1974), 497-510.

da Costa, N.C.A., 'On paraconsistent set theory', *Logique et Analyse,* 115 (1986), pp. 361-371.

da Costa, N.C.A., *Matemática e Paraconsistência*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática 7, UFPR, Curitiba, 1989.

da Costa, N.C.A., *Logiques classiques et non-classiques*, Masson, Paris 1995.

da Costa, N.C.A. et Béziau, J.-Y., «Définition, théorie des objets et paraconsistance», à paraître, Teoria, 1997.

da Costa, N.C.A., Béziau, J.-Y. et Bueno, O.A.S., 'Aspects of paraconsistent logic', *Bulletin of the Interest Group in Pure and Applied Logics*, 3 (1995), 597-614.

da Costa, N.C.A. et Guillaume, M., «Sur les calculs C_n», *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 36 (1964), 379-382.

Quine, W.V.O., 'New Foundations for mathematical logic', *American Mathematical Monthly*, (1937), réédité in: *From a logical point of view*, Harvard University Press.

Rosser, J.B., *Logic for mathematicians*, McGraw-Hill, 1953.

Specker, E., 'The axiom of choice in Quine's *New foundations for mathematical logic*', *Proc. Nat. Acad.*, 29 (1953), 972-975.

Sylvan, R., 'Variations on da Costa's C systems and dual intuitionistic logics. I: Analysis of C_ω and CC_ω', *Studia Logica*, 49 (1990), 47-65.