Logique & Analyse **149** (1995), 89-106

SÉMANTIQUE POUR LA LOGIQUE DÉONTIQUE

Frédéric SART

Abstract

This paper is divided in two parts. The topic of part 1 is alethic logic, commonly called "classical propositional logic". The topic of part 2 is alethico-deontic logic, commonly called "deontic propositional logic".

The scope of part 1 is alethic logic grounded on a pair of definitions:

(1) a definition of the concept of alethic world;
(2) a definition of the concept of alethic function (on an alethic universe) referred to by a formula.

Following the same frame, the scope of part 2 is alethico-deontic logic grounded on a pair of definitions:

(1) a definition of the concept of alethico-deontic world;
(2) a definition of the concept of alethic function (on an alethico-deontic universe) referred to by a formula.

1. *Logique aléthique*

Nous partons du principe que le vrai et le faux sont deux concepts primitifs corrélatifs.[1]

1. *Proposition*. Objet qui est ou vrai, ou faux.[2]

2. *Monde aléthique*[3] *sur l'ensemble N*. Relation telle qu'à chaque objet de l'ensemble *N* correspond ou le vrai, ou le faux.

[1] Cf. Frege (1848-1925) dans [4].

[2] Cf. Frege dans [4].

[3] Leibniz (1646-1716) emploie en ce sens le terme "monde possible"; Wittgenstein (1889-1951), (dans [9]) le terme "possible état de choses"; Carnap (1891-1970), (dans [1]) le terme "description d'un état de choses".

3. $U_0(N)$, *l'univers aléthique sur l'ensemble N*. L'ensemble des mondes aléthiques sur l'ensemble *N*.

Si l'ensemble *N* contient *n* objets, il existe donc 2^n mondes dans $U_0(N)$.[4]

Expression de $U_0(\{p, q\})$.

I: $\{\underline{p}, \underline{q}\}$ II: $\{\underline{p}, \overline{q}\}$ III: $\{\overline{p}, \underline{q}\}$ IV: $\{\overline{p}, \overline{q}\}$

Dans l'expression de chaque monde de $U_0(\{p, q\})$, un simple trait horizontal au-dessous (au-dessus) de l'expression d'un objet de l'ensemble $\{p, q\}$ signifie qu'à cet objet correspond le vrai (le faux).

4. *Fonction aléthique*[5] *sur* $U_0(N)$. Relation telle qu'à chaque monde de $U_0(N)$ correspond ou le vrai, ou le faux.

Si l'ensemble *N* contient *n* objets, il existe donc $2^{(2^n)}$ fonctions aléthiques sur $U_0(N)$.[6]

5. *La fonction aléthique tautologique*[7] *sur* $U_0(N)$. La fonction aléthique sur $U_0(N)$ telle qu'à chaque monde de $U_0(N)$ correspond le vrai.

6. *La fonction aléthique contradictoire sur* $U_0(N)$. La fonction aléthique sur $U_0(N)$ telle qu'à chaque monde de $U_0(N)$ correspond le faux.

7. *La fonction aléthique complète* f_α *sur* $U_0(N)$. La fonction aléthique sur $U_0(N)$ telle que seulement au monde α de $U_0(N)$ correspond le vrai.

Si l'ensemble *N* contient *n* objets, il existe donc 2^n fonctions aléthiques complètes sur $U_0(N)$.

[4] Cf. Wittgenstein dans [9], 4.27.

[5] Frege emploie en ce sens le terme "fonction de vérité".

[6] Cf. Wittgenstein dans [9], 4.42.

[7] Le terme "tautologique" est employé la première fois en ce sens dans [9] par Wittgenstein. Leibniz emploie en ce sens le terme "nécessaire"; Kant (1724-1804), le terme "analytique".

8. *Fonction aléthique consistante sur* $U_0(N)$. Fonction aléthique sur $U_0(N)$ telle qu'à au moins un monde de $U_0(N)$ correspond le vrai.

9. *Conséquence de la fonction aléthique f sur* $U_0(N)$. Fonction aléthique sur $U_0(N)$ telle qu'à chaque monde de $U_0(N)$ auquel correspond le vrai par la fonction aléthique *f* sur $U_0(N)$, correspond le vrai.

10. $A_0(N)$, *l'alphabet aléthique sur l'ensemble N*. L'ensemble formé:
    (1) des noms des objets de l'ensemble N;
    (2) des caractères "$\top$" (lire "le tautologique"), "$\perp$" (lire "le contradictoire"), "$\neg$" (lire "non"), "$\wedge$" (lire "et"), "$\vee$" (lire "ou"), "$\rightarrow$" (lire "implique") et "$\leftrightarrow$" (lire "équivaut à").

11. *Formule aléthique sur l'ensemble N.*
    (1) Ou le nom d'un objet de l'ensemble N;
    (2) ou $\top$, ou $\perp$;
    (3) ou $\neg\varphi$, ou $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$, ou $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$, ou $\varphi \rightarrow \psi$, ou $\varphi \leftrightarrow \psi$, φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules aléthiques sur l'ensemble N.

12. $L_0(N)$, *le langage formel aléthique sur l'ensemble N*. L'ensemble des formules aléthiques sur l'ensemble N.

    Exemples de formules de $L_0(\{p, q\})$.
    $\top$, q, $\neg p$, $\neg\neg p$, $p \wedge \neg p$, $p \vee q$, $(\neg p \leftrightarrow q) \rightarrow p$.

13. *La fonction aléthique sur* $U_0(N)$ *désignée par une formule de* $L_0(N)$. Soit le nom "p" d'un objet de l'ensemble N, des formules φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_0(N)$ et un monde α de $U_0(N)$.

(1)	$p(\alpha) = 1$	ssi	à l'objet p correspond le vrai dans le monde α;
(2)	$\top(\alpha) = 1$;		
(3)	$\perp(\alpha) = 0$;		
(4)	$(\neg\varphi)(\alpha) = 1$	ssi	$\varphi(\alpha) = 0$;
(5)	$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(\alpha) = 1$	ssi	pour chaque i, $\varphi_i(\alpha) = 1$;
(6)	$(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)(\alpha) = 1$	ssi	pour au moins un i, $\varphi_i(\alpha) = 1$;
(7)	$(\varphi \rightarrow \psi)(\alpha) = 1$	ssi	ou $\varphi(\alpha) = 1$ et $\psi(\alpha) = 1$, ou $\varphi(\alpha) = 0$ et $\psi(\alpha) = 1$, ou $\varphi(\alpha) = 0$ et $\psi(\alpha) = 0$;
(8)	$(\varphi \leftrightarrow \psi)(\alpha) = 1$	ssi	ou $\varphi(\alpha) = 1$ et $\psi(\alpha) = 1$, ou $\varphi(\alpha) = 0$ et $\psi(\alpha) = 0$.

Table aléthique[8] d'une fonction aléthique sur $U_0(\{p, q\})$ désignée par une formule de $L_0(\{p, q\})$.

α	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	q
I: $\{\underline{p}, \underline{q}\}$	1	1	1	**1**	1
II: $\{\underline{p}, \overline{q}\}$	1	0	0	**0**	0
III: $\{\overline{p}, \underline{q}\}$	0	1	1	**1**	1
IV: $\{\overline{p}, \overline{q}\}$	0	1	0	**0**	0

Exemples de formules de $L_0(\{p, q\})$ qui désignent la fonction aléthique tautologique sur $U_0(\{p, q\})$.

$\top$, $p \vee \neg p$, $p \rightarrow p$, $p \rightarrow (p \vee q)$, $(p \wedge q) \rightarrow p$, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

Exemples de formules de $L_0(\{p\})$ qui désignent la fonction aléthique contradictoire sur $U_0(\{p\})$.

$p \wedge \neg p$, $p \leftrightarrow \neg p$.

Exemples de formules de $L_0(\{p, q\})$ qui désignent des fonctions aléthiques complètes sur $U_0(\{p, q\})$.

$p \wedge q$, $p \wedge \neg q$.

Exemples de formules de $L_0(\{p, q\})$ qui désignent des fonctions aléthiques consistantes sur $U_0(\{p, q\})$.

p, $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$.

14. *La négation de la proposition p*. La proposition qui est la fonction aléthique $\neg p$ sur $U_0(\{p\})$.[9]

Exemple d'un énoncé qui exprime la négation d'une proposition.

Il ne parle pas.

[8] Frege emploie en ce sens le terme "table de vérité".

[9] Cf. Wittgenstein dans [9], 5.101.

15. *La conjonction des propositions* $p_1, \ldots, p_n$. La proposition qui est la fonction aléthique $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ sur $U_0(\{p_1, \ldots, p_n\})$.[10]

Exemples d'énoncés qui expriment la conjonction de propositions.
Il aime et respecte ses parents.
Elle est vive et exigeante.

16. *La disjonction des propositions* $p_1, \ldots, p_n$. La proposition qui est la fonction aléthique $p_1 \vee \ldots \vee p_n$ sur $U_0(\{p_1, \ldots, p_n\})$.[11]

Exemples d'énoncés qui expriment la disjonction de propositions.
Le Standard a gagné ou a perdu.
Dali est fou ou génial.

17. *L'implication de la proposition q par la proposition p.* La proposition qui est la fonction aléthique $p \rightarrow q$ sur $U_0(\{p, q\})$.[12]

Exemple d'un énoncé qui exprime l'implication d'une proposition par une proposition.
S'il pleut, Pierre roule sagement.

18. *L'équivalence des propositions p et q.* La proposition qui est la fonction aléthique $p \leftrightarrow q$ sur $U_0(\{p, q\})$.[13]

Exemple d'un énoncé qui exprime l'équivalence de deux propositions.
Il pleut si et seulement s'il y a du vent.

Soit l'ensemble $\underline{\alpha}$ (l'ensemble $\overline{\alpha}$) des noms des objets de l'ensemble N auxquels correspond le vrai (le faux) dans le monde aléthique α sur l'ensemble N.

La formule p^α représente $(\bigwedge_{\underline{\alpha}} p) \wedge (\bigwedge_{\overline{\alpha}} \neg p)$.

[10] Cf. Wittgenstein dans [9], 5.101.

[11] Cf. Wittgenstein dans [9], 5.101.

[12] Cf. Wittgenstein dans [9], 5.101.

[13] Cf. Wittgenstein dans [9], 5.101.

19. *Formule conjonctive complète de* $L_0(N)$. Formule de $L_0(N)$ représentée par p^α, α étant un monde de $U_0(N)$.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc 2^n formules conjonctives complètes dans $L_0(N)$.

20. Théorème.
La fonction aléthique complète f_α *sur* $U_0(N)$ *est désignée par une seule formule conjonctive complète de* $L_0(N)$: p^α.

21. *Formule canonique de* $L_0(N)$. Formule de $L_0(N)$ représentée par $\bigvee_X p^\alpha$, X étant un ensemble de mondes de $U_0(N)$.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc $2^{(2^n)}$ formules canoniques dans $L_0(N)$.

22. Théorème de forme normale disjonctive développée.
La fonction aléthique f *sur* $U_0(N)$ *est désignée par une seule formule canonique de* $L_0(N)$: $\bigvee_{\{\alpha : f(\alpha)=1\}} p^\alpha$.

Chaque fonction aléthique sur $U_0(N)$ est donc désignée par au moins une formule de $L_0(N)$.

2. *Logique aléthico-déontique*

Les deux premiers paragraphes portent sur l'axiomatique: nous définissons un système formel aléthico-déontique, puis la transformation équivalente de von Wright. Les deux derniers ont pour objet la sémantique: nous définissons le concept de fonction aléthique désignée à la von Wright, ensuite, par récurrence, celui de fonction aléthique désignée à notre façon.

2.1. *Système formel aléthico-déontique*

Nous partons du système de principes aléthico-déontiques conçu par von Wright.[14]

[14] Cf. von Wright (né en 1916) dans [7], pp. 60-69.

(1) L'obligation d'une proposition est équivalente à la négation de la permission de la négation de la proposition.
(2) La permission d'une disjonction de propositions est équivalente à la disjonction des permissions des propositions.
(3) L'obligation d'une proposition contradictoire est contradictoire.
(4) Les permissions de deux propositions sont équivalentes, ces propositions étant équivalentes.

La plupart[15] des logiciens ont ajouté un cinquième principe que nous acceptons.

(5) La permission d'une proposition contradictoire est contradictoire.

A l'opposé, nous refusons le principe (3).

23. $A_1(N)$, *l'alphabet aléthico-déontique sur l'ensemble N.* L'ensemble formé:
   (1) des noms des objets de l'ensemble N;
   (2) des caractères "$\top$" (lire "le tautologique"), "$\perp$" (lire "le contradictoire"),"$\neg$" (lire "non"), "$\wedge$" (lire "et"), "$\vee$" (lire "ou"),"$\rightarrow$" (lire "implique"), "$\leftrightarrow$" (lire "équivaut à"), "P" (lire "il est permis que") et "O" (lire "il est obligatoire que").

24. *Formule aléthico-déontique sur l'ensemble N.*
   (1) Ou le nom d'un objet de l'ensemble N;
   (2) ou $\top$, ou $\perp$;
   (3) ou $\neg\varphi$, ou $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$, ou $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$, ou $\varphi \rightarrow \psi$, ou $\varphi \leftrightarrow \psi$, ou $P\varphi$, ou $O\varphi$,
   φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules aléthico-déontiques sur l'ensemble N.

25. $L_1(N)$, *le langage formel aléthico-déontique sur l'ensemble N.* L'ensemble des formules aléthico-déontiques sur l'ensemble N.

Exemples de formules de $L_1(\{p, q\})$.
$\perp$, $p \leftrightarrow q$, $P(p \wedge q)$, $O(p \vee q)$, $q \rightarrow Pq$, $OOp \leftrightarrow Op$, $O(Oq \rightarrow q)$.

[15] Cf. Føllesdal et Hilpinen dans [3], pp. 13-15.

26. $L_{\alpha,\Delta}(N)$, *le petit langage formel aléthico-déontique sur l'ensemble* N. L'ensemble de formules de $L_1(N)$ formé:
(1) des noms des objets de l'ensemble N;
(2) de $\top$ et $\bot$;
(3) de $P\varphi$ et $O\varphi$,
φ étant une formule de $L_0(N)$;
(4) de $\neg\varphi$, $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$, $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$, $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \leftrightarrow \psi$,
φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules de $L_{\alpha,\Delta}(N)$.

Exemples de formules de $L_{\alpha,\Delta}(\{p,q\})$.
$\top, p, O(p \rightarrow q), p \rightarrow Oq, Pp \vee O\neg p$.

Exemples de formules de $L_1(\{p\})$, mais hors de $L_{\alpha,\Delta}(\{p\})$.
$OOp, P(p \rightarrow Op)$.

27. *Petite thèse aléthico-déontique sur l'ensemble* N.
1. (1) Soit une formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$ qui résulte du remplacement, dans une formule de $L_0(M)$ qui désigne la fonction aléthique sur $U_0(M)$, de chaque nom d'objet de l'ensemble M par une formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$;
(2) soit $O\varphi \leftrightarrow \neg P \neg\varphi$,[16]
(3) soit $P(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k) \leftrightarrow (P\varphi_1 \vee \ldots \vee P\varphi_k)$,[17]
(4) soit $\neg P\bot$,[18]
φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules de $L_0(N)$;
2. (1) soit ψ,
φ et $\varphi \rightarrow \psi$ étant des petites thèses aléthico-déontiques sur l'ensemble N,
(2) soit $P\varphi \leftrightarrow P\psi$,
$\varphi \leftrightarrow \psi$ étant une formule de $L_0(N)$ qui désigne la fonction aléthique tautologique sur $U_0(N)$.[19]

[16] Ce schéma correspond au principe aléthico-déontique (1).

[17] Ce schéma correspond au principe aléthico-déontique (2).

[18] Ce schéma correspond au principe aléthico-déontique (5).

[19] Cette règle correspond au principe aléthico-déontique (4).

28. $S_{\alpha,\Delta}(N)$, *le petit système formel aléthico-déontique sur l'ensemble* N. L'ensemble des petites thèses aléthico-déontiques sur l'ensemble N.

2.2. *La transformation équivalente de von Wright*

29. $L_{v.W.}(N)$, *le langage formel aléthico-déontique de von Wright sur l'ensemble* N. L'ensemble de formules de $L_{\alpha,\Delta}(N)$ formé:
(1) des noms des objets de l'ensemble N;
(2) des Pp^{α}, α étant un monde de $U_0(N)$;
(3) de $\top$ et $\bot$;
(4) de $\neg\varphi$, $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$, $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$, $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \leftrightarrow \psi$, φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules de $L_{v.W.}(N)$.

30. *La transformation équivalente de von Wright* μ *sur* $L_{\alpha,\Delta}(N)$.
1. Soit le nom "p" d'un objet de l'ensemble N et une formule φ de $L_0(N)$.
(1) $\mu(p) = p$;
(2) $\mu(\top) = \top$;
(3) $\mu(\bot) = \bot$;
(4) $\mu(P\varphi) = (\bigvee_{\{\alpha:\ \varphi(\alpha)=1\}} Pp^{\alpha})$;
(5) $\mu(O\varphi) = \neg(\bigvee_{\{\alpha:\ \varphi(\alpha)=0\}} Pp^{\alpha})$.

2. Soit des formules φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_{\alpha,\Delta}(N)$.
(1) $\mu(\neg\varphi) = \neg\mu(\varphi)$;
(2) $\mu(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) = \mu(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge \mu(\varphi_k)$;
(3) $\mu(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k) = \mu(\varphi_1) \vee \ldots \vee \mu(\varphi_k)$;
(4) $\mu(\varphi \rightarrow \psi) = \mu(\varphi) \rightarrow \mu(\psi)$;
(5) $\mu(\varphi \leftrightarrow \psi) = \mu(\varphi) \leftrightarrow \mu(\psi)$.

Illustration de la transformation équivalente de von Wright μ sur $L_{\alpha,\Delta}(\{p,q\})$.

φ	$\mu(\varphi)$
$P(p \vee q)$	$P(p \wedge q) \vee P(p \wedge \neg q) \vee P(\neg p \wedge q)$
$p \rightarrow Oq$	$p \rightarrow \neg(P(p \wedge \neg q) \vee P(\neg p \wedge \neg q))$

31. Théorème.
    (1) *La formule* $\mu(\varphi)$ *est dans* $L_{v.W.}(N)$.
    (2) *Si la formule* φ *est dans* $L_{v.W.}(N)$, $\mu(\varphi)=\varphi$.
    (3) *La formule* $\mu(\varphi)\leftrightarrow\varphi$ *est une thèse de* $S_{\alpha,\Delta}(N)$.

2.3. *Fonction aléthique désignée à la von Wright*

Nous partons du principe que le permis et l'interdit sont deux concepts primitifs corrélatifs.

32. *Monde déontique sur l'ensemble N.* Relation telle qu'à chaque monde aléthique de $U_0(N)$ correspond ou le permis, ou l'interdit.

33. *Monde aléthico-déontique sur l'ensemble N.* Union d'un monde aléthique sur l'ensemble N et d'un monde déontique sur l'ensemble N.

34. $U_1(N)$, *l'univers aléthico-déontique sur l'ensemble N.* L'ensemble des mondes aléthico-déontiques sur l'ensemble N.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc $2^n\times 2^{(2^n)}$ mondes dans $U_1(N)$.

Expression de $U_1(\{p\})$.

I:	III:	V:	VII:
$\left\{\underline{p};\underline{\underline{\{\underline{p}\}}},\underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	$\left\{\underline{p};\underline{\underline{\{\underline{p}\}}},\overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	$\left\{\underline{p};\overline{\overline{\{\underline{p}\}}},\underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	$\left\{\underline{p};\overline{\overline{\{\underline{p}\}}},\overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$
II:	IV:	VI:	VIII:
$\left\{\overline{p};\underline{\underline{\{\underline{p}\}}},\underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	$\left\{\overline{p};\underline{\underline{\{\underline{p}\}}},\overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	$\left\{\overline{p};\overline{\overline{\{\underline{p}\}}},\underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	$\left\{\overline{p};\overline{\overline{\{\underline{p}\}}},\overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$

Dans l'expression de chaque monde de $U_1(\{p\})$, un simple trait horizontal au-dessous (au-dessus) de l'expression de l'objet p signifie qu'à l'objet p correspond le vrai (le faux); un double trait horizontal au-dessous (au-dessus) de l'expression d'un monde aléthique de $U_0(\{p\})$ signifie qu'à ce monde correspond le permis (l'interdit).

35. *Fonction aléthique sur* $U_1(N)$. Relation telle qu'à chaque monde de $U_1(N)$ correspond ou le vrai, ou le faux.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc $2^{(2^n \times 2^{(2^n)})}$ fonctions aléthiques sur $U_1(N)$.

36. *La fonction aléthique tautologique sur* $U_1(N)$. La fonction aléthique sur $U_1(N)$ telle qu'à chaque monde de $U_1(N)$ correspond le vrai.

37. *La fonction aléthique contradictoire sur* $U_1(N)$. La fonction aléthique sur $U_1(N)$ telle qu'à chaque monde de $U_1(N)$ correspond le faux.

38. *La fonction aléthique complète* $f_{(\alpha,\Delta)}$ *sur* $U_1(N)$. La fonction aléthique sur $U_1(N)$ telle que seulement au monde (α, Δ) de $U_1(N)$ correspond le vrai.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc $2^n \times 2^{(2^n)}$ fonctions aléthiques complètes sur $U_1(N)$.

39. *Fonction aléthique consistante sur* $U_1(N)$. Fonction aléthique sur $U_1(N)$ telle qu'à au moins un monde de $U_1(N)$ correspond le vrai.

40. *Conséquence de la fonction aléthique f sur* $U_1(N)$. Fonction aléthique sur $U_1(N)$ telle qu'à chaque monde de $U_1(N)$ auquel correspond le vrai par la fonction aléthique f sur $U_1(N)$, correspond le vrai.

41. *La fonction aléthique sur* $U_1(N)$ *désignée à la von Wright par une formule de* $L_{\alpha,\Delta}(N)$.
   1. Soit le nom "p" d'un objet de l'ensemble N, des formules φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_{v.W.}(N)$, un monde β de $U_0(N)$ et un monde (α, Δ) de $U_1(N)$.

(1)	$p(\alpha, \Delta) = 1$	ssi à l'objet p correspond le vrai dans le monde (α, Δ);
(2)	$(Pp^{\beta})(\alpha, \Delta) = 1$	ssi au monde aléthique β correspond le permis dans le monde (α, Δ);
(3)	$\top(\alpha, \Delta) = 1$;	
(4)	$\bot(\alpha, \Delta) = 0$;	
(5)	$(\neg\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$;
(6)	$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi pour chaque i, $\varphi_i(\alpha, \Delta) = 1$;

(7) $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)(\alpha, \Delta) = 1$ ssi pour au moins un i, $\varphi_i(\alpha, \Delta) = 1$;

(8) $(\varphi \rightarrow \psi)(\alpha, \Delta) = 1$ ssi ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 1$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 1$, ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 1$, ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 0$;

(9) $(\varphi \leftrightarrow \psi)(\alpha, \Delta) = 1$ ssi ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 1$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 1$, ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 0$.

2. Soit une formule φ de $L_{\alpha,\Delta}(N)$, mais hors de $L_{v.W.}(N)$.
$\varphi(\alpha, \Delta) = (\mu(\varphi))(\alpha, \Delta)$.

La définition précédente suppose une axiomatique.

Table aléthique d'une fonction aléthique sur $U_1(\{p\})$ désignée à la von Wright par une formule de $L_{\alpha,\Delta}(\{p\})$.

	(α, Δ)	φ	$\mu(\varphi)$					
		$Op \rightarrow (p \wedge Pp)$	$(\neg$	$P\neg p)$	$\rightarrow$	$(p$	$\wedge$	$Pp)$
I:	$\left\{\underline{p}; \underline{\underline{\{\underline{p}\}}}, \underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**1**	0	1	**1**	1	1	1
II:	$\left\{\overline{p}; \underline{\underline{\{\underline{p}\}}}, \underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**1**	0	1	**1**	0	0	1
III:	$\left\{\underline{p}; \underline{\underline{\{\underline{p}\}}}, \overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**1**	1	0	**1**	1	1	1
IV:	$\left\{\overline{p}; \underline{\underline{\{\underline{p}\}}}, \overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**0**	1	0	**0**	0	0	1
V:	$\left\{\underline{p}; \overline{\overline{\{\underline{p}\}}}, \underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**1**	0	1	**1**	1	0	0
VI:	$\left\{\overline{p}; \overline{\overline{\{\underline{p}\}}}, \underline{\underline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**1**	0	1	**1**	0	0	0
VII:	$\left\{\underline{p}; \overline{\overline{\{\underline{p}\}}}, \overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**0**	1	0	**0**	1	0	0
VIII:	$\left\{\overline{p}; \overline{\overline{\{\underline{p}\}}}, \overline{\overline{\{\overline{p}\}}}\right\}$	**0**	1	0	**0**	0	0	0

Exemples de formules de $L_{\alpha,\Delta}(\{p, q\})$ qui désignent à la von Wright la fonction aléthique tautologique sur $U_1(\{p, q\})$.
$\top, p \vee \neg p, Op \leftrightarrow \neg P \neg p, P(p \vee q) \leftrightarrow (Pp \vee Pq), O(p \wedge q) \leftrightarrow (Op \wedge Oq)$.

Exemples de formules de $L_{\alpha,\Delta}(\{p\})$ qui désignent à la von Wright la fonction aléthique contradictoire sur $U_1(\{p\})$.
$p \wedge \neg p, P\bot$.

Exemples de formules de $L_{\alpha,\Delta}(\{p\})$ qui désignent à la von Wright des fonctions aléthiques complètes sur $U_1(\{p\})$.
$p \wedge Pp \wedge P\neg p, \neg p \wedge Op \wedge Pp$.

Exemples de formules de $L_{\alpha,\Delta}(\{p, q\})$ qui désignent à la von Wright des fonctions aléthiques consistantes sur $U_1(\{p, q\})$.
$p, P(p \wedge q), p \rightarrow Pp, Pp \rightarrow Op, p \rightarrow Oq$.

42. Théorème de complétude.[20]
Une formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$ désigne à la von Wright la fonction aléthique tautologique sur $U_1(N)$ si et seulement si elle est une thèse de $S_{\alpha,\Delta}(N)$.

2.4. *Fonction aléthique désignée à notre façon*

43. *Monde parfait*[21] *de $U_1(N)$*. Monde de $U_1(N)$ tel qu'au monde aléthique correspond, dans le monde déontique, le permis.

La moitié des mondes de $U_1(N)$ sont donc parfaits.

44. *Monde parfait de $U_1(N)$ pour le monde (α, Δ) de $U_1(N)$*. Monde parfait de $U_1(N)$ dont le monde déontique est celui du monde (α, Δ).

Voici la déduction qui nous mène de la définition à la von Wright à une définition par récurrence du concept de fonction aléthique (sur un univers aléthico-déontique) désignée par une formule.

[20] Cf. von Wright dans [8], pp. 16-20.

[21] Saint Augustin (354-430) emploie en ce sens le terme "cité de Dieu"; Leibniz, le terme "règne de la grâce"; Kant, (dans [6], p. 111) le terme "règne des fins"; Hintikka (né en 1929), (dans [5], p. 71) le terme "monde déontiquement parfait".

Soit une formule φ de $L_0(N)$ et un monde (α, Δ) de $U_1(N)$.

$(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	$(\mu(P\varphi))(\alpha, \Delta) = 1$
donc $(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	$\left(\bigvee_{\{\beta:\ \varphi(\beta)=1\}} Pp^\beta \right)(\alpha, \Delta) = 1;$
donc $(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour au moins un monde aléthique β de $U_0(N)$ tel que $\varphi(\beta) = 1, (Pp^\beta)(\alpha, \Delta) = 1;$
donc $(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour au moins un monde aléthique β de $U_0(N)$ tel que $(Pp^\beta)(\alpha, \Delta) = 1, \varphi(\beta) = 1;$
donc $(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour au moins un monde aléthique β de $U_0(N)$ auquel correspond le permis dans le monde (α, Δ), $\varphi(\beta) = 1;$
donc $(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour au moins un monde parfait (β, Δ) de $U_1(N)$ pour le monde (α, Δ), $\varphi(\beta) = 1$.

Nous dépassons la définition à la von Wright par la définition suivante.

45. *La fonction aléthique sur $U_1(N)$ désignée à notre façon par une formule de $L_1(N)$.*

Soit le nom "p" d'un objet de l'ensemble N, des formules φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_1(N)$ et un monde (α, Δ) de $U_1(N)$.

(1) $p(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	à l'objet p correspond le vrai dans le monde (α, Δ);
(2) $\top(\alpha, \Delta) = 1;$		
(3) $\bot(\alpha, \Delta) = 0;$		
(4) $(\neg\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	$\varphi(\alpha, \Delta) = 0;$
(5) $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour chaque i, $\varphi_i(\alpha, \Delta) = 1;$
(6) $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour au moins un i, $\varphi_i(\alpha, \Delta) = 1;$
(7) $(\varphi \rightarrow \psi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 1$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 1$, ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 1$, ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 0;$
(8) $(\varphi \leftrightarrow \psi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 1$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 1$, ou $\varphi(\alpha, \Delta) = 0$ et $\psi(\alpha, \Delta) = 0;$
(9) $(P\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$	ssi	pour au moins un monde parfait (β, Δ) de $U_1(N)$ pour le monde (α, Δ), $\varphi(\beta, \Delta) = 1;$

(10) $(O\varphi)(\alpha, \Delta) = 1$ ssi pour chaque monde parfait (β, Δ) de $U_1(N)$ pour le monde (α, Δ), $\varphi(\beta, \Delta) = 1$.

Table aléthique d'une fonction aléthique sur $U_1(\{p\})$ désignée à notre façon par une formule de $L_1(\{p\})$.

	(α, Δ)	p	$\to$	$(O$	P	$p)$
I:	$\left\{\underline{\mathrm{p}}; \underline{\underline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \underline{\underline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde parfait pour I et II	1	**1**	1	1	1
II:	$\left\{\bar{\mathrm{p}}; \underline{\underline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \underline{\underline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde parfait pour I et II	0	**1**	1	1	0
III:	$\left\{\underline{\mathrm{p}}; \underline{\underline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \overline{\overline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde parfait pour III et IV	1	**1**	1	1	1
IV:	$\left\{\bar{\mathrm{p}}; \underline{\underline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \overline{\overline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde non parfait	0	**1**	1	1	0
V:	$\left\{\underline{\mathrm{p}}; \overline{\overline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \underline{\underline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde non parfait	1	**0**	0	0	1
VI:	$\left\{\bar{\mathrm{p}}; \overline{\overline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \underline{\underline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde parfait pour V et VI	0	**1**	0	0	0
VII:	$\left\{\underline{\mathrm{p}}; \overline{\overline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \overline{\overline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde non parfait	1	**1**	1	0	1
VIII:	$\left\{\bar{\mathrm{p}}; \overline{\overline{\{\underline{\mathrm{p}}\}}}, \overline{\overline{\{\bar{\mathrm{p}}\}}}\right\}$, monde non parfait	0	**1**	1	0	0

Exemples de formules de $L_1(\{p, q\})$ qui désignent à notre façon la fonction aléthique tautologique sur $U_1(\{p, q\})$.

$\top$, $p \vee \neg p$, $Op \leftrightarrow \neg P \neg p$, $P(p \vee q) \leftrightarrow (Pp \vee Pq)$,
$O(p \wedge q) \leftrightarrow (Op \wedge Oq)$, $Pp \to OPp$, $Op \leftrightarrow OOp$.

Exemples de formules de $L_1(\{p\})$ qui désignent à notre façon la fonction aléthique contradictoire sur $U_1(\{p\})$.

$P\bot$, $\neg Pp \wedge PPp$.

Exemples de formules de $L_1(\{p\})$ qui désignent à notre façon des fonctions aléthiques complètes sur $U_1(\{p\})$.
$p \wedge Pp \wedge P\neg p, \neg p \wedge OOp \wedge PPp.$

Exemples de formules de $L_1(\{p, q\})$ qui désignent à notre façon des fonctions aléthiques consistantes sur $U_1(\{p, q\})$.
$p, P(p \wedge q), p \rightarrow Pp, Pp \rightarrow Op, \neg Pq \wedge OPq.$

46. *Proposition actuelle*. Proposition dont le prédicat est un acte.

Nous supposons que tout acte implique le concept d'auteur conscient et volontaire.

Exemple d'un énoncé qui exprime une proposition actuelle.
Pierre roule à trente kilomètres à l'heure.

Exemples d'énoncés qui n'expriment pas une proposition actuelle.
Il fait nuit.
Je suis français.

47. *La permission de la proposition actuelle p*. La proposition qui est la fonction aléthique Pp sur $U_1(\{p\})$.

Exemple d'un énoncé qui exprime la permission d'une proposition actuelle.
Vous pouvez fumer.

48. *L'obligation de la proposition actuelle p*. La proposition qui est la fonction aléthique Op sur $U_1(\{p\})$.

Exemple d'un énoncé qui exprime l'obligation d'une proposition actuelle.
Il doit voter.

49. Théorème.
Les fonctions aléthiques sur $U_1(N)$ désignées respectivement à la von Wright et à notre façon par une même formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$ sont identiques.

Soit l'ensemble $\underline{\Delta}$ (l'ensemble $\overline{\Delta}$) des mondes aléthiques de $U_0(N)$ auxquels correspond le permis (l'interdit) dans le monde déontique Δ sur l'ensemble N.

La formule p_Δ représente $(\bigwedge_{\Delta} Pp^\beta) \wedge (\bigwedge_{\bar{\Delta}} \neg Pp^\beta)$.

La formule p^α_Δ représente $p^\alpha \wedge p_\Delta$.

50. *Formule conjonctive complète de* $L_1(N)$. Formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$ représentée par p^α_Δ, (α, Δ) étant un monde de $U_1(N)$.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc $2^n \times 2^{(2^n)}$ formules conjonctives complètes dans $L_1(N)$.

51. Théorème.

La fonction aléthique complète $f_{(\alpha,\Delta)}$ *sur* $U_1(N)$ *est désignée par une seule formule conjonctive complète de* $L_1(N)$: p^α_Δ.

52. *Formule canonique de* $L_1(N)$. Formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$ représentée par $\bigvee_{X} p^\alpha_\Delta$, X étant un ensemble de mondes de $U_1(N)$.

Si l'ensemble N contient n objets, il existe donc $2^{(2^n \times 2^{(2^n)})}$ formules canoniques dans $L_1(N)$.

53. Théorème de forme normale disjonctive développée.

La fonction aléthique f sur $U_1(N)$ *est désignée par une seule formule canonique de* $L_1(N)$: $\bigvee_{\{(\alpha,\Delta):\, f(\alpha,\Delta)=1\}} p^\alpha_\Delta$.

Chaque fonction aléthique sur $U_1(N)$ est donc désignée par au moins une formule de $L_{\alpha,\Delta}(N)$.

Université de Liège

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carnap R., *Meaning and Necessity*, The University of Chicago Press, 1956.

[2] Chellas B., *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, 1980.

[3] Føllesdal D. et Hilpinen R., "Deontic Logic: An Introduction", in *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings* (ed. by Hilpinen R.), D. Reidel Publishing Company, 1981, pp. 1-36.

[4] Frege G., "Über Sinn und Bedeutung", in *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, Vol. 100, 1892, pp. 25-58. Trad. française de Imbert C. dans *Écrits logiques et philosophiques* (de Frege G.), Édition du Seuil, 1971, pp. 102-126.

[5] Hintikka J., "Some Main Problems of Deontic Logic", in *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings* (ed. by Hilpinen R.), D. Reidel Publishing Company, 1981, pp. 64-104.
[6] Kant E., *Fondements de la métaphysique des moeurs*, Le Livre de Poche, 1993.
[7] von Wright G. H., "Deontic Logic", in *Mind* 60, 1951, pp. 1-16. Reprinted in *Logical Studies* (by von Wright G. H.), Routledge and Kegan Paul, 1962, pp. 58-74.
[8] von Wright G. H., *An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action* (*Acta Philosophica Fennica* 21), North-Holland Publishing Company, 1972.
[9] Wittgenstein L., *Tractatus logico-philosophicus*, Gallimard, 1961.