Logique & Analyse **146** (1994), 95-117

THÉORIE DE LA VALUATION

Newton C.A. da COSTA
Jean-Yves BÉZIAU

Résumé
On montre que les logiques vérifiant les lois d'identité et de coupure infinies (logiques normales) ont une sémantique bivalente adéquate constituée par les fonctions caractéristiques des théories closes (sémantique de l'évaluation). Si de plus ces logiques sont compactes alors on peut prendre la sémantique bivalente constituée par les fonctions caractéristiques des théories saturées (sémantique de la valuation). Cette sémantique est minimale et donc comme toute théorie maximale est saturée, la sémantique constituée par les fonctions caractéristiques des théories maximales s'avère caduque si elle se différencie de la précédente. On introduit ensuite la notion de calcul, c'est une logique définie à partir des notions de règles et de démonstrations. La définition la plus simple correspond aux calculs de Hilbert. Les calculs de Hilbert sont en fait des logiques normales et réciproquement. Une définiton plus complexe donne lieu aux calculs de Gentzen dont les calculs de Hilbert sont des cas particuliers. Si on considère l'ensemble des applications à valeur dans $\{0, 1\}$ respectant les règles engendrant un calcul on s'aperçoit qu'une telle sémantique (sémantique de la révaluation) est saine et même qu'elle coïncide avec la sémantique de l'évaluation dans le cas de règles de Hilbert.

Tout ces résultats concernent des logiques dont la nature des objets n'est pas spécifiée. On définit à présent différents ensembles d'objets qui seront les domaines de logiques particulières. On présente ensuite une série de calculs correspondant à ces différents langages. De manière unitaire et progressive on prouve les théorèmes d'adéquation en appliquant les résultats généraux de la première partie : de la logique implicative propositionnelle classique jusqu'à la logique classique d'ordre supérieur, en passant par la logique propositionnelle quantifiée et la logique infinitaire. On s'intéresse ensuite à la question de la vérifonctionnalité : une logique vérifonctionnelle est une sous-logique d'une version de la logique classique et un ensemble de règles engendrant un calcul vérifonctionnel est contenu dans un ensemble de règles engendrant une version de la logique classique. Pour finir on traite du problème de la décidabilité : une logique est décidable si elle l'est par la

méthode des tables de vérité qui est une généralisation de la méthode classique.

Qu'est-ce que la theorie de la valuation ?

La logique mathématique s'est depuis un siècle développée en une multiplicité de systèmes. L'idée qu'il existe une et une seule logique, telle la logique classique, paraît naïve devant la richesse de ces constructions, de même qu'il serait naïf de penser qu'il existe une et une seule algèbre, telle la théorie des groupes. Cependant il n'est pas absurde de penser que cette multiplicité puisse être subsumée par un cadre conceptuel, sorte de *logique universelle*, de même qu'il existe une *algèbre universelle*.

La théorie de la valuation fait partie de cet effort d'édification d'une logique universelle.

La sémantique est une façon simple d'envisager une notion de déductibilité. Les idées de départ sont le vrai et le faux. On dit qu'une formule F est déductible d'une théorie T lorsqu'à chaque fois que T est vraie dans une interprétation, F l'est aussi. Interpréter une formule consiste à lui attribuer une signification, or on sait depuis Frege que la signification d'une proposition (une formule n'est rien d'autre qu'une proposition abstraite) est soit le vrai, soit le faux. Une interprétation est donc une application de l'ensemble des formules dans un ensemble à deux valeurs (d'où le terme valuation) que l'on conviendra, pour des raisons de simplicité, de considérer comme étant 0 et 1. On appelle sémantique bivalente un ensemble d'intérprétations. La théorie de la valuation concerne l'étude de la logique du point de vue des sémantiques bivalentes.

Dans [2] on a montré que toute sémantique est réductible à une sémantique bivalente confirmant ainsi la justesse de la thèse de Frege et confirmant l'aptitude de la théorie de la valuation à servir de théorie générale de la logique. Ce résultat peut paraître étonnant, voire même paradoxal, il l'est moins si on songe que sémantique bivalente ne veut pas nécessairement dire sémantique bivalente vérifonctionnelle.

Ici on s'intéresse à des sémantiques bivalentes d'un genre particulier. Si l'on étudie les sémantiques bivalentes habituelles on s'aperçoit qu'elles correspondent à l'ensemble des fonctions caractéristiques des théories maximales (du point de vue de la relation de conséquence sémantique). En fait les interprétations sont les théories maximales et vice-versa. La notion de conséquence sémantique engendrée par la notion d'interprétation se reflète d'un point de vue purement déductif. Si nous avons à faire à une relation de conséquence quelconque on peut donc songer raisonnablement à obtenir une sémantique naturelle en considérant les fonctions caractéristiques des théories maximales. Telle est l'idée développée ici en long et en large, raffinée, détaillé et généralisée.

Cette idée n'est pas entiérement nouvelle, loin de là, puisque nous pouvons en faire remonter l'origine au fameux lemme de Lindenbaum, cependant elle n'a jamais été exposée en pleine lumière et de façon systématique.

D'autres travaux [15][16][17][27][28][29][30][31] ont un rapport plus ou moins lointain avec la théorie de la valuation. Concernant les connexions de la théorie de la valuation avec d'autres techniques, son développement, sa signification, sa place au sein de la logique, sa spécificité et son originalité, nous renvoyons le lecteur intéressé à notre article 'La Théorie de la Valuation en Question' [8] qui fait le point sur toutes ces questions. Le but du présent exposé est avant tout technique..

Les résultats de la première sous-partie se trouvent déjà soit dans [2], soit dans [12], nous en donnons ici une présentation nouvelle, adaptée à la présente exposition et la rendant autonome.

Premiere Partie : Resultats Generaux

1. *Adequation*

Préliminaire Conceptuel : Logique et Sémantique Bivalente

Une logique $\mathfrak{L}$ est une paire $<\mathfrak{F}; \vdash_{\mathcal{L}}>$ où $\mathfrak{F}$ est un ensemble, appelé *domaine* de la logique (on appelle *formule* un élément F du domaine et *théorie* un ensemble T de formules) et où $\vdash_{\mathcal{L}}$ est une relation sur $P(\mathfrak{F})X\mathfrak{F}$, dite *relation de déductibilité*.

Une *sémantique bivalente* $\mathfrak{B}$ pour une logique $\pounds = <\mathfrak{F}; \vdash_{\mathcal{L}}>$est une paire $<\mathbb{B}; \vdash_{\mathbb{B}}>$ où $\mathbb{B}$ est un ensemble d'applications de $\mathfrak{F}$ dans $\{0, 1\}$ appelé *univers* de la sémantique et où $\vdash_{\mathbb{B}}$ est une relation sur $P(\mathfrak{F})X\mathfrak{F}$, dite *relation de conséquence sémantique*, définie de la façon suivante: $T \vdash_{\mathbb{B}} F$ *ssi* pour tout $b \in \mathbb{B}$, si $b(T) = 1$ (ie $b(G) = 1$ pour tout $G \in T$) alors $b(F) = 1$. Dorénavant on entendra par sémantique, sémantique bivalente.

Une sémantique $\mathfrak{B} <\mathbb{B}; \vdash_{\mathfrak{B}}>$ est dite *adéquate* (resp *saine, complète*) pour une logique $\pounds = <\mathfrak{F}; \vdash_{\mathcal{L}}>$ *ssi* $T \vdash_{\mathcal{L}} F \Leftrightarrow T \vdash_{\mathfrak{B}} F$ $\left(T \vdash_{\mathcal{L}} F \Rightarrow T \vdash_{\mathfrak{B}} F, T \vdash_{\mathcal{L}} F \Leftarrow T \vdash_{\mathfrak{B}} F\right)$. On dit qu'une sémantique $\mathfrak{B}$ *contient* une sémantique $\mathfrak{B}'$ *ssi* l'univers de $\mathfrak{B}$ contient celui de $\mathfrak{B}'$. Si $\mathfrak{B}$ contient $\mathfrak{B}'$ alors $T \vdash_{\mathfrak{B}} F \Rightarrow T \vdash_{\mathfrak{B}'} F$. Donc si une sémantique est saine pour une logique $\mathcal{L}$, toute sémantique qu'elle contient l'est aussi et si une sémantique est complète, toute sémantique qui la contient l'est aussi.

Logique Normale et Normale Compacte
Une logique est dite normale ssi $T \vdash F \Leftrightarrow [T' \vdash G$ pour tout $G \in T \Rightarrow T' \vdash F]T$. Une logique est dite *normale compacte ssi* de plus $T \vdash F \Rightarrow$ [il existe une sous théorie finie $T_\circ$ de T telle que $T_\circ \vdash F$].

Il y a bien d'autres façons de définir ces logiques, notamment par l'opérateur de Tarski (voir [32] et [33]); remarquons simplement qu'une logique est normale *ssi* $F \in T \Rightarrow T \vdash F$ (loi d'identité infinie) et $[T \vdash F$ pour tout $F \in T' \& T' \vdash G] \Rightarrow T \vdash G$ (loi de coupure infinie).

Saturation, (E)valuation
Une théorie T d'une logique $\mathcal{L}$ est dite *T'-saturée* ssi pour toute $F \in T'$ $T \not\vdash_{\mathcal{L}} F$ et si lorsque $G \notin T$ alors $T \cup \{G\} \vdash_{\mathcal{L}} F$ pour une formule F de T''. Une théorie T est dite *faiblement saturée* ssi il existe T telle que T est T-saturée et *saturée* ssi il existe F tel que T est $\{F\}$-saturée.

Si l'on appelle une *théorie close* une théorie telle que les formules qui en sont déductibles lui appartiennent (la *clôture d'une théorie* quant à elle est l'ensemble des formules qui en sont déductibles ; il est facile de voir que la clôture d'une théorie est close) on constate que les théories faiblement saturées sont closes et vice versa. Du point de vue de cette terminologie on remarquera que la théorie $\mathfrak{F}$ est close. On notera également qu'une sémantique qui contient la fonction constante sur 1 a même relation de conséquence que cette même sémantique sans elle.

On appelle *évaluation* (*valuation*) une application de $\mathfrak{F}$ dans $\{0,1\}$ qui est la fonction caractéristique d'une théorie faiblement saturée (saturée). La *sémantique de l'évaluation* (*la valuation*) d'une logique $\mathcal{L}$ est la sémantique bivalente dont l'univers est constitué par l'ensemble des évaluations (valuations) de $\mathcal{L}$.

Théorème 1. *La sémantique de l'évaluation d'une logique normale est adéquate.*

Preuve. Si $T \nvdash_{\mathcal{L}} F$ alors soit e la fonction caractéristique de la clôture de T on a $e(T)=1$ et $e(F)=0$, ce qui règle l'affaire de la complétude. Pour la santé, soit e telle que $e(T)=1$ et $e(F)=0$ considérons $Te = \{G \in \mathfrak{F}; e(G)=1\}$ alors $T \subseteq Te$ donc $Te \vdash_{\mathcal{L}} H$ pour tout $H \in T$ et $T \nvdash_{\mathcal{L}} F$ car Te est close, puisque $\mathfrak{L}$ est normale (on utilise en fait seulement la loi de coupure infinie) on a donc $T \nvdash_{\mathcal{L}} F$.

Théorème 2. *La sémantique de la valuation d'une logique normale compacte est adéquate.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent si l'on considère le résultat suivant, qui est une certaine forme de ce que l'on appelle le lemme de Lindenbaum : *dans une logique normale compacte pour qu'il existe une extension F-saturée de T il suffit que F ne soit pas déductible de T.* La démonstration de ce résultat se fait par application du lemme de Zorn (cf [33] ou [2]), il a même été démontré que cette proposition lui était équivalente [11].

La compacité est une condition suffisante pour que la sémantique de la valuation soit adéquate pour une logique normale. Ce n'est cependant pas une condition nécessaire. Il y a des logiques non-compactes dans lesquelles il suffit que F ne soit pas déductible de T pour que T ait une extension F-saturée (cf [2]).

Proposition 3. *Si une sémantique contient la sémantique de la valuation d'une logique normale compacte $\mathfrak{L}$ elle est complète et si elle est contenue dans la sémantique de l'évaluation de $\mathfrak{L}$ alors elle est saine.*

Preuve. C'est immédiat.

Proposition 4. *Si une sémantique est saine pour une logique normale $\mathfrak{L}$ alors elle est contenue dans la sémantique de l'évaluation de $\mathfrak{L}$ (cette sémantique est, en ce sens, maximum).*

Preuve. C'est immédiat.

Théorème 5. *Si une sémantique est complète pour une logique normale $\mathfrak{L}$ alors elle ne peut être contenue strictement dans la sémantique de la valuation de $\mathfrak{L}$ (cette sémantique est, en ce sens, minimale).*

Preuve. Voir [2].

Théorie Maximale

On dit qu'une théorie T est *maximale* ssi elle est non-triviale (ie il existe une formule F qui n'est pas déductible de T) et n'est contenue strictement dans aucune autre théorie non-triviale.

Il est facile de voir que si une théorie est maximale alors elle est saturée; dans le cas de la logique classique l'inverse est également vrai si bien que ces deux concepts coïncident. En fait si on peut définir une négation classique dans une logique alors toute théorie saturée est maximale.

En logique classique la notion de théorie close complète est également un troisième concept identique aux deux précédents.

On pourrait songer à envisager la sémantique dont l'univers est constitué par l'ensemble des fonctions caractéristiques des théories maximales mais du fait de la minimalité de la sémantique de la valuation cette sémantique n'est pas complète dans le cas où il existe des théories saturées non-maximales.

2. *Calcul*

Règle et Démonstration
Les concepts fondamentaux liés à la notion de calcul sont ceux de règle et de démonstration.
Une *règle* sur un ensemble de formules $\mathfrak{F}$ est une paire $R = < T; F >$ où T est une théorie dont les éléments sont appelés *prémisses* de R et où F est une formule dite *conclusion* de R.
Une *démonstration d'une formule F dans une théorie T relativement à un ensemble de règles* $\mathfrak{R}$ est une suite (trans)finie de formules dont la dernière est F et donc chaque terme, soit appartient à T, soit est la conclusion d'une règle dont les prémisses la précèdent. On écrira $T \underset{\mathfrak{R}}{\vdash} F$ pour signifier qu'il existe une telle démonstration.

Calcul de Hilbert
Un calcul de *Hilbert* est une logique $\mathfrak{L} = < \mathfrak{F}; \underset{\mathfrak{L}}{\vdash} >$ telle qu'il existe un ensemble de règles $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{F}$ vérifiant $T \underset{\mathfrak{R}}{\vdash} F$ ssi $T \underset{\mathfrak{L}}{\vdash} F$.

Proposition 6 *Pour qu'une logique soit normale il faut et il suffit que ce soit un calcul de Hilbert.*

Preuve. Dans un calcul de Hilbert il est clair que la loi d'identité infinie est valide, en ce qui concerne la loi de coupure infinie il suffit de mettre bout à bout les démonstrations de G dans T pour G appartenant à T avec celle de F dans T' pour obtenir une démonstration de F dans T.

La réciproque est immédiate si l'on prend comme ensemble de règles toutes les paires $<T;F>$ telles $T \underset{\mathfrak{L}}{\vdash} F$.

Calcul de Gentzen
On appelle *bithéorie* une paire de théories.
Dans une *règle de Gentzen* les prémisses et la conclusion sont des bithéories. Une règle de Hilbert peut donc être vue comme une règle de Gentzen sans prémisse dont la conclusion est une bithéorie dont le deuxième membre est un singleton.

Une *démonstration de Gentzen d'une formule F dans une théorie T relativement à un ensemble de règles de Gentzen* est une suite de bithéories dont la dernière est $< T; \{F\} >$ et donc chaque terme est la conclusion d'une règle de Gentzen dont les prémisses la précèdent.

On définit sans surprise la notion de *calcul de Gentzen*.

Rapports entre les calculs de Hilbert et de Gentzen
D'après la proposition précédente on voit que si un calcul de Gentzen est une logique normale alors c'est un calcul de Hilbert. Nous allons montrer à présent que les calculs de Hilbert sont des calculs de Gentzen. La réciproque est fausse, il est facile en effet de trouver des calculs de Gentzen qui ne sont pas des logiques normales (voir par exemple [14]).

Proposition 7. *Tout calcul de Hilbert est un calcul de Gentzen.*

Preuve. Ce résultat s'obtient trivialement en prenant comme ensemble de règles de Gentzen, les règles du type $<\varnothing;<T;\{F\}>>$ avec $<T;\{F\}>$ telle que $T\vdash_{\mathfrak{L}} F$ où $\mathfrak{L}$ est le calcul de Hilbert en question. $T\vdash_{\mathfrak{L}} F$ constitue elle-même une démonstration de Gentzen de F dans T si $T\vdash_{\mathfrak{L}} F$. D'autre part si on a une démonstration de Gentzen de F dans T alors on voit que la dernière règle de Gentzen utilisée ne peut être que $<\varnothing;<T;\{F\}>>$ et que donc $T\vdash_{\mathfrak{L}} F$.

Calcul et logique normale compacte
Appelons *règle finitiste* une règle dont les prémisses sont en nombre fini, dans le cas d'une règle de Gentzen il s'agit d'une règle où en outre les bithéories qui la composent sont des paires de théories finies.

Un *calcul de Hilbert (de Gentzen) r-finitiste* est une logique $\mathfrak{L}=<\mathfrak{F};\vdash_{\mathfrak{L}}>$ telle qu'il existe un ensemble de règles (de Gentzen) finitistes $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{F}$ vérifiant $T\vdash_{\mathfrak{R}} F$ ssi $T\vdash_{\mathfrak{L}} F$.

Les calculs de Gentzen r-finitistes sont des logiques compactes (et réciproquement), ce n'est pas le cas pour les calculs de Hilbert. Par contre si l'on ne considère que des démonstrations finies alors un calcul de Hilbert est une logique (normale) compacte mais ce n'est pas vrai pour les calculs de Gentzen.

En modifiant quelque peu les définitions on peut cependant considérer des calculs de Gentzen compactes qui ne sont pas r-finitistes et des calculs de Hilbert compactes admettant des démonstrations infinies.

Soit un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles (simples ou de Gentzen), on écrira $T\vdash_{\mathfrak{R}\circ} F$ pour signifier qu'il existe $T\circ$ finie inclue dans T telle que $T\circ\vdash_{\mathfrak{R}} F$.

Un *calcul de Hilbert (de Gentzen) finitiste* est une logique $\mathfrak{L}=<\mathfrak{F};\vdash_{\mathfrak{L}}>$ telle qu'il existe un ensemble de règles (de Gentzen) $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{F}$ vérifiant $T\vdash_{\mathfrak{R}\circ} F$ ssi $T\vdash_{\mathfrak{L}} F$. Les calculs finitistes sont donc trivialement compactes.

Calcul et (R)évaluation

Une révaluation r est une fonction bivalente à valeur dans $\{0, 1\}$ respectant les règles engendrant un calcul. C'est-à-dire que si r donne la valeur 1 à toutes les prémisses d'une règle alors r doit donner la valeur 1 également à la conclusion de la règle.

Dans le cas d'un calcul de Gentzen où les prémisses et la conclusion sont des bithéories, on donne la définition suivante: $r(<T1;\ T2>)=1$ ssi $[r(T1)=1 \Rightarrow$ il existe $F \in T2,\ r(F)=1]$.

Une *sémantique de la révaluation hilbertienne* (*gentzenienne*) d'un calcul est une sémantique bivalente dont l'univers est constitué par un ensemble de toutes les révaluations relatives à un ensemble de règles de Hilbert (de Gentzen) engendrant ce calcul.

Théorème 8. *Une sémantique de la révaluation d'un calcul est saine.*

Preuve. On étudie seulement le cas le plus difficile, celui des sémantiques gentzeniennes.

On va prouver un résultat légèrement plus général, à savoir que si une bithéorie est un terme d'une démonstration, alors sa valeur est 1 pour toutes les révaluations de cette sémantique.

La preuve se fait par récurrence sur la position de cette bithéorie dans une démonstration. Le cas initial où la position est 1 est trivial, voyons le cas où la position est α. Cette bithéorie est la conclusion d'une règle dont les prémisses la précèdent. Par hypothése de récurrence les prémisses de cette règle sont telles que leurs valeurs pour toute révaluation est 1, donc par la nature même des révaluations la valeur de la conclusion est 1 pour toute révaluation.

Pour démontrer qu'une sémantique est saine pour un calcul normal engendré par un ensemble de règles il suffit donc de démontrer que les éléments de l'univers respectent les règles. Nous allons améliorer ce résultat par le théorème qui suit. Il nous faut auparavant une nouvelle définition.

On appelle *expansion d'une règle R* de la forme
$R = (<T1; T1'>, \ldots, <T\alpha; T\alpha'> \ldots; <T; T'>)$

une règle $R\$$ de la forme
$R\$ = (<T1 \cup X1; T1' \cup X1'>, \ldots, <T\alpha \cup T\alpha; T\alpha' \cup T\alpha'>, \ldots;$
$<T \cup X1 \cup \ldots \cup X\alpha \cup \ldots; T' \cup X1' \cup \ldots \cup X\alpha' \cup \ldots >)$.

Théorème 9. *Soit R une règle sur un ensemble de formules $\mathfrak{F}$ et b une application de $\mathfrak{F}$ dans $\{0,1\}$, si b respecte R alors b respecte toute expansion de R.*

Preuve. Supposons que b ne respecte pas l'expansion $R\$$ d'une règle R qu'elle respecte, alors b donne la valeur 1 a chacune des prémisses de $R\$$ et 0 à la conclusion de $R\$$.

Si b donne la valeur 0 à la conclusion de $R\$$ on a:

$b(F)=1$ pour tout $F \in T \cup X1 \cup \ldots \cup X\alpha \cup \ldots$

et

$b(F)=0$ pour tout $F \in T' \cup X1' \cup \ldots \cup X\alpha'$

on voit donc que b donne la valeur 0 à la conclusion $<T; T'>$ de R.

Si b donne la valeur 1 à une prémisse $< Ti \cup Xi; Ti' \cup Xi'>$ de $R\$$ comme $b(F)=1$ pour tout $F \in Xi$ et $b(F)=0$ pour tout $F \in Xi'$, il existe $G \in Ti$ telle que $b(G)=0$ ou il existe $G \in Ti'$ telle que $b(G)=1$, donc b donne la valeur 1 a $<Ti; Ti'>$.

Comme b respecte R, b donne donc la valeur 1 à la conclusion $<T; T'>$ de R, ce qui est absurde.

Si un calcul est normal on déduit du théorème 8 vue la proposition 3 qu'une sémantique de la révaluation est inclue dans celle de l'évaluation. On va voir que les sémantiques de la révaluation hilbertienne sont identiques à celle de l'évaluation et que donc les sémantiques de la révaluation hilbertiennes d'un calcul sont toutes les mêmes.

Proposition 10. *Une sémantique de la révaluation hilbertienne contient la sémantique de l'évaluation.*

Preuve. Soit T la théorie dont e est la fonction caractéristique; si e donne la valeur 1 à toutes les prémisses d'une règle alors ces prémisses sont déductibles de T, de par la loi de coupure infinie on en conclut que la conclusion l'est aussi, comme T est close cette conclusion est dans T et donc e lui donne la valeur 1.

Deuxieme Partie : Applications

1. *Spécification du domaine*

On va s'intéresser à des logiques dont les éléments du domaine sont des objets d'un caractère particulier et on parle alors de *domaine concret*.

Ces particularités peuvent être d'une grande variété; ici on tente de donner une perspective tendant à uniformiser la présentation des logiques usuelles.

Neutron, Atome, Connecteur, Formule
On commence par considérer deux ensembles d'objets.

Le premier est un ensemble d'objets appelés *atomes*, obtenus à partir d'objets plus fondamentaux, les *neutrons.* A chaque neutron est associé un type. On construit maintenant l'ensemble des atomes. Les neutrons sont des atomes (*atomes simples*). Si le type d'un neutron x est $< \tau_1, \ldots, \tau_\alpha, \ldots >$ et $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots$ une suite de neutrons aux types correpondants alors $xx_1 \ldots x_\alpha \ldots$ est un atome.

Le second est un ensemble d'objets appelés *connecteurs*, chaque connecteur étant muni d'une arité, à savoir un certain cardinal κ.

A partir de ces objets est engendré un ensemble de formules à l'aide des clauses suivantes:

1) les atomes sont des formules,
2) si $F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots$ sont des formules et k un connecteur d'arité convenable alors $k(F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots)$ est une formule,
3) clause de minimalité.

Les domaines concrets que l'on prendra en considération seront constitués de l'ensemble de ces formules ou d'une partie de cet ensemble, si le domaine est construit à partir d'atomes simples uniquement on parlera de *domaine simple* et de *domaine complexe* dans le cas contraire.

Quantification
Soit F une formule et x un neutron de type τ apparaissant dans F, on note $F[y/x]$ la formule obtenue à partie de F en substituant le neutron y de type τ à toutes les occurences de x dans F. $F[y/x]$ est appelé une *substitution* de $F[x]$. Soit une formule F on note $F[]$ une suite de toutes les substitutions de $F[x]$ et $k(F[\ ])$ la formule résultant de l'application du connecteur k d'arité de la cardinalité de l'ensemble des neutrons de type τ à cette suite. De telles formules sont appelées *quantifications*. Une quantification est relative à un connecteur et à un type correspondant au type des neutrons pour lesquels se fait la substitution.

Logique (In)finitaire, Domaine Quantificationnel
Si tous les connecteurs sont d'arité finie, on parle de *logique finitaire* et dans le cas contraire de *logique infinitaire.*

On peut considérer un domaine dont les seules formules infinies soient des quantifications. C'est ce que l'on appellera un *domaine quantificationnel*

2. *Adequation : de la logique propositionnelle de l'implication pure a la logique d'ordre superieur*

Remarque liminaire

Tous les calculs auxquels on va s'intéresser sont des calculs de Gentzen finitistes. Nous écrirons ces règles sous la forme intuitive habituelle, les majuscules grecques désigneront des théories finies ou non. Chacun de ces calculs sera vu comme engendré par deux sortes de groupe de règles, des *règles spécifiques* que l'on précisera le moment venu et des règles communes qui sont:

l'axiome d'identité:
$\Gamma \vdash \Delta$ lorsque Γ et Δ ont au moins un élément commun,
la règle de coupure:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,c.$$

On vérifiera que des calculs engendrés par de telles règles sont bien des logiques normales compactes.

On considère d'abord des calculs à domaines simples.

Calcul implicatif (*implication classique*)

On considère un calcul dont le domaine est constitué par l'ensemble des formules construites à l'aide d'un seul connecteur binaire noté $\rightarrow$ et appelé implication classique.

Les règles spécifiques de ce calcul sont:

$$\frac{\Gamma, F \vdash G, \Delta}{\Gamma \vdash (F \rightarrow G), \Delta}\rightarrow d \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta \qquad \Gamma, G \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', (F \rightarrow G) \vdash \Delta, \Delta'}\rightarrow g.$$

Nous allons montrer l'adéquation de la sémantique $\mathfrak{B}$ dont l'univers $\mathbb{B}(\rightarrow)$ est défini de la façon suivante:

$$\mathbb{B}(\rightarrow) = \left\{ b \in \{0,1\}^{\mathfrak{F}};\ b[(F \rightarrow G)] = 1 \text{ ssi } b[F] = 0 \text{ ou } b[G] = 1 \right\}.$$

i) On commence par montrer que $\mathbb{B}(\rightarrow)$ contient l'ensemble $\mathbb{V}$ des valuations.

Soit T telle que $T \vdash (F \rightarrow G)$, supposons que $T \vdash F$, alors on obtient $T \vdash G$ par la démonstration suivante :

$$\cfrac{T \vdash F \qquad \cfrac{T \vdash (F \to G) \qquad \cfrac{F \vdash F, \qquad G \vdash G}{F, (F \to G) \vdash G}{\scriptstyle \to g}}{T, F \vdash G}{\scriptstyle c}}{T \vdash G}{\scriptstyle c.}$$

Soit T, telle que $T \vdash G$, alors $T,\ F \vdash G$ donc $T \vdash (F \to G)$ par $\to d$.
Soit T H-saturée telle que $T \vdash / - F$ et $T \vdash / -(F \to G)$, on a alors $T,\ F \vdash H$ et $T,\ (F \to G) \vdash H$ par la démonstration suivante on arrive à l'absurdité $T \vdash H$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{T, F \vdash H}{T, F \vdash G, H}}{T \vdash (F \to G), H}{\scriptstyle \to d} \qquad T, (F \to G) \vdash H}{T \vdash H}{\scriptstyle c.}$$

[ii) Montrons maintenant que $\mathbb{B}(\to)$ est contenu dans l'ensemble $\mathbb{E}$ des évaluations. Vu les théorèmes 8 et 9, il suffit de démontrer que chaque élément de $\mathbb{B}(\to)$ respecte les règles ci-dessus dépourvues de leur contexte, ce qui se voit d'un seul coup d'oeil.

D'après la proposition 3, l'adéquation est démontrée, il est cependant intéressant de poser la question: $\mathbb{B}(\to)$ est-elle minimale? ie Est-elle la sémantique de la valuation de ce calcul? On va voir que la réponse est affirmative à un détail près.

On constate que la fonction constante sur 1 appartient à $\mathbb{B}(\to)$. Vu la remarque faite initialement à son sujet, on peut la retirer sans dommage de $\mathbb{B}(\to)$ et obtenir $\mathbb{B}(\to)^*$.

iii) Montrons maintenant que $\mathbb{B}(\to)$ est contenu dans $\mathbb{V}$.
Soit $b \in \mathbb{B}(\to)^*$, on va voir que $Tb = \{F;\, b[F] = 1\}$ est saturée. Comme b n'est pas la fonction constante sur 1, il existe H telle que $b(H) = 0$, ie telle que $H \notin Tb$. Comme b respecte les règles, Tb est close (théorème 8) donc $Tb \vdash / - H$. On va montrer que Tb est H-saturée. Considérons une formule $G \notin Tb$, on a $b[H] = b[G] = 0$ donc $b[(G \to H)] = 1$, d'où $Tb \vdash (G \to H)$, on en conclut $Tb,\ G \vdash H$.

En fait on a démontré que Tb est H-saturée pour une formule H quelconque non déductible de Tb, ce qui veut dire que Tb est maximale (supposons qu'il existe K et J telles que $K \notin Tb$ et $Tb,\ K \vdash / - J$, on a donc $Tb,\ \vdash / - J$ conséquemment Tb est J-saturée et on conclut absurdement que $Tb,\ K \vdash J$). Si T est saturée T est une Tb on a donc démontré que toute théorie saturée est maximale. On se convaincra facilement que cette conclusion ne dépend pas du fait que le calcul soit compacte ou non. Ce résultat peut s'obtenir plus directement (cf[26]).

Calcul disjoncto-implicatif

Le calcul présentement considéré a pour domaine une extension du domaine précédent obtenu par l'entremise d'un nouveau connecteur binaire $\vee$, on ajoute au calcul précédent les deux règles spécifiques suivantes:

$$\frac{\Gamma \vdash F, G, \Delta}{\Gamma \vdash (F \vee G), \Delta}\vee d \qquad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta \qquad \Gamma', G \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', (F \vee G) \vdash \Delta, \Delta'}\vee g.$$

Soit $\mathbb{B}(\vee)$ défini de la façon suivante:

$$\mathbb{B}(\vee) = \left\{ b \in \{0, 1\}^{\mathfrak{F}};\ b[(F \vee G)] = 1 \text{ ssi } b[F] = 1 \text{ ou } b[G] = 1 \right\},$$

on va montrer l'adéquation de la sémantique $\mathfrak{B}$ dont l'univers $\mathbb{B}(\to \vee)$ est l'intersection de $\mathbb{B}(\to)$ et $\mathbb{B}(\vee)$.

i) On montre en premier lieu que $\mathbb{B}(\to \vee)$ contient $\mathbb{V}$.
Pour toute théorie on a: si $T \vdash F$ ou $T \vdash G$ alors $T \vdash F \vee G$ (on utilise $\vee d$); en ce qui concerne la réciproque supposons T H-saturée telle que $T \vdash F \vee G$, $T \not\vdash F$ et $T \not\vdash G$, on a alors: $T, F \vdash H$ et $T, G \vdash H$ on dérive l'absurdité $T \vdash H$ comme suit:

$$\frac{T \vdash (F \vee G) \qquad \dfrac{T, F \vdash H \quad T, G \vdash H}{T, (F \vee G) \vdash H}\vee g}{T \vdash H}c.$$

ii) Il est facile de voir que $\mathbb{B}(\to \vee)$ est inclu dans $\mathbb{E}$.
iii) Le fait que $\mathbb{B}(\to \vee)$ soit inclu dans $\mathbb{V}$ résulte de la même démonstration que celle du iii) du cas précédent et on voit qu'il en sera de même pour n'importe quelle extension du calcul classique implicatif tel que $\mathbb{B}(\to \ldots)$ soit inclu dans $\mathbb{V}$.

Calcul de la négation classique

On considère le calcul dont le domaine est constitué par l'ensemble des formules construites grâce au connecteur unaire $\neg$ et dont les seules règles spécifiques sont:

$$\frac{\Gamma, F \vdash, \Delta}{\Gamma \vdash \neg F, \Delta}\neg d \qquad \frac{\Gamma \vdash F, \Delta}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}\neg g.$$

La sémantique dont nous prétendons démontrer l'adéquation a cette fois-ci comme univers $\mathbb{B}(\neg)$, défini comme suit:

$$\mathbb{B}(\neg)=\left\{b\in\{0,1\}^{\mathfrak{F}};\ b[F]=1 \text{ ssi } b[\neg F]=0\right\}.$$

i) $\mathbb{V}\subseteq\mathbb{B}(\neg)$
Supposons $T\vdash F$ et $T\vdash\neg F$, alors T est triviale comme l'indique la démonstration suivante :

$$\dfrac{\dfrac{T\vdash\neg F \qquad \dfrac{T\vdash F}{T,\neg F\vdash}\neg g}{T\vdash}c}{T\vdash G}.$$

Soit T H-saturée, supposons $T\nvdash F$ et $T\nvdash\neg F$ alors $T, F\vdash H$ et T, $\neg F\vdash H$, on en tire $T\vdash H$ comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{T,F\vdash H}{T\vdash\neg F,H}\neg d \qquad T,\neg F\vdash H}{T\vdash H}c.$$

ii) $\mathbb{B}(\neg)\subseteq\mathbb{E}$. C'est évident.
iii) $\mathbb{B}(\neg)\subseteq\mathbb{V}$.
Soit $b\in\mathbb{B}(\neg)$, on voit qu'il existe H telle que $b(H)=0$. On montre que Tb est H-saturée. Soit $G\notin Tb$, on a $\neg G\in Tb$; supposons $Tb, G\nvdash H$, il existe donc d'après i) b' tel que $b'(Tb, G)=1$, mais on a $b'(\neg G)=1$ et $b'(G)=1$, ce qui est absurde.

Tb est saturée pour tout H, *Tb* est maximale, comme tout T saturée est une *Tb* on a montré que toute théorie saturée est maximale.

L'étude des calculs classiques disjoncto-négationnel, implicativo-négationnel, disjoncto-implicativo-négationnel se fait sans surprise.

Calcul implicatif de la semi-négation
On obtient également tous les résultats attendus pour le calcul implicatif négationnel à droite dont le domaine correspond à ce que l'on imagine et dont les règles sont outre celles de la disjonction et de l'implication, celle de la négation à droite. On prend dans ce cas pour univers de la sémantique l'intersection de $\mathbb{B}(\rightarrow v)$ avec $\mathbb{B}(\neg d)$ défini comme suit:

$$\mathbb{B}(\neg d) = \left\{ b \in \{0, 1\}^{\mathfrak{F}};\ \text{si } b[F] = 0 \text{ alors } b[\neg F] = 1 \right\}.$$

Ces résultats valent aussi pour le calcul implicatif négationnel à gauche dont on imagine ce qu'il est et quelle sémantique il a.

Ce qu'il faut remarquer, c'est qu'ici nous n'avons plus à faire à des sémantiques vérifonctionnelles.

Calcul infinitaire disjoncto-implicatif

On considère à présent un calcul infinitaire dont le domaine est une extension du domaine du calcul disjoncto-implicatif opérée par l'ajout d'un connecteur $\vee$ d'arité de la cardinalité de l'ensemble des atomes et dont les règles outre celles du calcul disjoncto-implicatif sont:

$$\frac{T \vdash F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots, \Delta}{T \vdash \left(F_1 \vee \ldots \vee F_\alpha \vee \ldots\right), \Delta}\vee^d$$

$$\frac{\Gamma_1, F_1 \vdash \Delta_1 \qquad \ldots \qquad \Gamma_\alpha, F_\alpha \vdash \Delta_\alpha \qquad \ldots}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\alpha, \ldots, \left(F_1 \vee \ldots \vee F_\alpha \vee \ldots\right) \vdash \Delta_1, \ldots, \Delta_\alpha, \ldots}\vee^g$$

(pour des cardinalités convenables), et la sémantique considérée a pour univers l'intersection de $\mathbb{B}(\rightarrow v)$ et $\mathbb{B}(\vee)$ où ce dernier est défini comme suit:

$$\mathbb{B}(\vee) = \Big\{ b \in \{0, 1\}^{\mathfrak{F}};\ b\left[\left(F_1 \vee \ldots \vee F_\alpha \vee \ldots\right)\right] = 1 \text{ ssi il existe un terme de la disjonction } F_i \text{ telle que } b\left[F_i\right] = 1 \Big\}.$$

i) Pour obtenir le résultat désiré, on montrera le résultat suivant: si $\vdash \left(F_1 \vee \ldots \vee F_\alpha \vee \ldots\right)$ et si pour tout terme F_i de la disjonction $F_i \vdash H$, alors $\vdash H$.

$$\frac{\vdash \left(F_1 \vee \ldots \vee F_\alpha \vee \ldots\right) \qquad \dfrac{F_1 \vdash H \qquad \ldots \qquad F_\alpha \vdash H \qquad \ldots}{\left(F_1 \vee \ldots \vee F_\alpha \vee \ldots\right) \vdash H}\vee^g}{\vdash H}c.$$

ii) et iii) : évidents.

Calcul quantificationel existentio-implicatif
On considère maintenant un calcul dont le domaine est une restriction de celui du calcul précédent, c'est le domaine quantificationnel relatif aux quantifications $\vee$ (quantifications existentielles); les règles précédentes sont restreintes au cas où la suite $F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots$ est une suite substitutionnelle F [ ].

On vérifie sans peine que tout fonctionne bien.

Calculs à domaine complexe
Les calculs à domaines complexes sont des cas particuliers de calcul à domaine simple, il s'ensuit que tous les résultats obtenus se généralisent automatiquement.

Une autre méthode, intermédiaire entre celle-ci et celle de Henkin, se trouve exposée dans [5].

Remarque. Nous n'avons pas étudié ici de logiques dans lesquelles il existe des théories saturées non maximales. Des résultats de complétude pour de tels calculs, notamment la logique intuitionniste positive, obtenus en utilisant une méthode similaire se trouvent dans [18] et [20]. Cette méthode a également été appliquée aux logiques modales (cf [19]). Originellement cette méthode a été utilisée pour donner une sémantique bivalente à la logique paraconsistante *C*1 (cf [1], [6], [7] et [22]) qui ne possède pas de sémantique bivalente vérifonctionnelle ainsi que pour d'autres logiques du même style (voir [1], [3] et [23]). Nous allons justement étudier maintenant le problème de la vérifonctionnalité et voir comment on peut la caractériser.

3. *Vérifonctionnalité*

Fonction Connective, Extension par Définition et Equivalence
Pour tout connecteur k on définit une fonction f de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ telle que $f(F)=k(F)$ (une telle fonction est dite *fonction connective* primitive), l'ensemble des fonctions connectives est la clôture par composition des fonctions connectives primitives.

Si on a une fonction primitive connective non-primitive f on peut créer un nouveau connecteur k et remplacer toutes les formules de $\mathfrak{F}$ qui sont des images de f par des formules du type $k(F)$. On dira que la logique $\mathfrak{L}(f)=<\mathfrak{F}(f);\vdash(f)>$ ainsi obtenue est une *f-extension par définition* de $\mathfrak{L}$.

On dit que $\mathfrak{L}1$ est une *extension par définition* de $\mathfrak{L}2$ ssi $\mathfrak{L}1$ est obtenue à partir de $\mathfrak{L}2$ par une série de *f*-extensions par définition.

Une logique $\mathfrak{L}1$ est dite *sous-logique* d'une logique $\mathfrak{L}2$ lorsque sa relation de déductibilité est inclue dans celle de $\mathfrak{L}2$. Deux logiques sont dites *strictement équivalentes* lorsqu'elles sont sous-logiques l'une de l'autre, ie leurs relations de déductibilités coïncident et équivalentes lorsqu'elles ont des extensions par définitions strictement équivalentes.

Fonction de vérité et sémantique vérifonctionnelle

On appelle *fonction de vérité d'arité* κ, une application de $\{0,1\}^{\kappa}$ dans $\{0,1\}$.

Une *sémantique bivalente* $\mathfrak{B}$ pour une logique $\mathfrak{L}$ dont les fonctions connectives primitives sont $f1, ..., f\alpha, ...$ est dite *vérifonctionnelle* ssi il existe des fonctions de vérité $fv1, ..., fv\alpha, ...$ telles que l'univers de $\mathfrak{B}$ soit l'ensemble suivant:

$$\mathbb{B} = \{b \in \{0,1\}; b\Big(f\Big(F_1, ..., F_\beta, ...\Big)\Big) = fv1\Big(b\Big(F_1\Big), ..., b\Big(F_\beta\Big), ...\Big) \text{ et } ...$$
$$b\Big(f\Big(F_1, ..., F_\beta, ...\Big)\Big) = fv\alpha\Big(b\Big(F_1\Big), ..., b\Big(F_\beta\Big), ...\Big) \text{ et } ...\}.$$

Une *logique* est dite *vérifonctionnelle* ssi elle possède une sémantique adéquate vérifonctionnelle.

Caractérisation des logiques et calculs vérifonctionnels

On va dans le théorème qui suit caractériser les logiques vérifonctionnelles et les ensembles de règles engendrant des calculs vérifonctionnels.

Nous entendrons par logique classique, n'importe quelle logique équivalente aux calculs disjoncto-négationnels (à domaine simple ou complexe) présentés dans la section précédente.

Les résultats annoncés valent si l'on entend les termes logique (ou calcul) et logique (ou calcul) classique aussi bien comme le couple (logique finitaire \ logique classique finitaire) que comme le couple (logique \ logique classique infinitaire)

Théorème 11. *Si une logique est vérifonctionnelle c'est une sous-logique d'une extension par définition de la logique classique.*

Preuve. On utilise le fait que la logique classique est fonctionnellement complète.

Lemme 12. Soit un *ensemble de règles* $\mathfrak{R}$ tel que le calcul engendré par $\mathfrak{R}$ soit un sous-calcul d'un calcul $\mathfrak{C}$ *équivalent* au calcul classique, alors il existe un ensemble de règles $\mathfrak{R}c$ contenant $\mathfrak{R}$ et engendrant $\mathfrak{C}$.

Preuve. On utilise la complétude absolue de la logique classique.

Si la complétude absolue est bien connue pour la logique classique vue comme un calcul de Hilbert, elle l'est moins dans le cas d'une perspective gentzenienne. Pour que l'on puisse généraliser la preuve habituelle, il suffit de prouver que si l'on rajoute une règle non valide classiquement alors on obtient un ensemble de règles engendrant un calcul dans lequel il existe une formule démontrable qui ne l'était pas auparavant. Une règle non valide est une règle dont la conclusion $<T1; T2>$ est fausse, mais alors on obtient facilement une nouvelle formule démontrable en appliquant par exemple les règles de la négation et de la disjonction.

Théorème 13. *Si la logique engendrée par un ensemble de règles $\mathfrak{R}$ est vérifonctionnelle il existe un ensemble de règles $\mathfrak{R}c$ contenant $\mathfrak{R}$ tel que la logique engendrée par $\mathfrak{R}c$ soit équivalente à la logique classique.*

Preuve. Elle s'obtient directement à partir du théorème précédent en utilisant le lemme.

Souvent l'idée de vérifonctionnalité est associée à celle de table de vérité. Nous allons cependant montrer comment généraliser ce concept de table de vérité et obtenir ainsi des résultats de décidabilité par ce moyen pour des logiques non-vérifonctionnelles.

4. *Décidabilité*

Réduction du Problème de la Décidabilité

Par *table de vérité d'une formule F* d'une logique $\mathfrak{L}$ relativement à une sémantique adéquate $\mathfrak{B}$ pour $\mathfrak{L}$ nous entendons une table dont la première ligne est une suite finie S de formules dont fait partie F et dont les autres lignes (en nombre fini) sont des suites de O et de 1 telles que

- chacune de ces lignes peut s'étendre en un élément de $\mathbb{B}$
- chaque élément de $\mathbb{B}$ a sa restriction à S qui coïncide avec une ligne de la table.

On voit donc que $b(F)=1$ pour tout $b \in \mathbb{B}$ ssi il n'y a que des 1 dans la colonne de F.

On dira qu'une logique est *décidable par la méthode des tables de vérité* ssi il existe un procédé récursif permettant pour chaque formule d'obtenir une table de vérité pour cette formule.

Théorème 14. *Une logique normale est décidable ssi elle est décidable par la méthode des tables de vérité.*

Preuve. Il est clair que c'est une condition suffisante. Supposons maintenant que l'on ait une logique décidable alors pour chaque F nous pouvons construire récursivement la table suivante:

F
1

Table de vérité pour une logique non-vérifonctionnelle
La difficulté consiste bien sûr à trouver une méthode de construction de tables. Nous donnons l'exemple de tables de vérité pour la logique implicativo-négationnelle à gauche, qui est une logique non-vérifonctionnelle.

Soit une formule F, on construit de la façon suivante sa table de vérité:

- on inscrit sur la première ligne toutes les sous-formules de F par ordre croissant de complexité,
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'atomes de F, on remplit les n premières colonnes de la table comme dans le cas classique,
- supposons maintenant que l'on ait construit la table pour les $n+m(m \in \mathbb{N})$ premières colonnes, l'élaboration de la table pour la $n+m+1$-ème colonne se fait de la manière suivante:
  - si la formule qui est au sommet de cette colonne n'est pas la négation d'une formule on procède comme dans le cas classique,
  - sinon cette formule s'écrit $\neg G$ et on distingue les cas suivants:
    - sur les lignes où est inscrit 0 (respectivement 1) sur la colonne g (ie la colonne comportant G en son sommet) on inscrit 1 (resp 0) à la n+m+1-ème colonne,
    - on recopie les lignes où est inscrit 0 sur la colonne g en inscrivant 0 à la n+m+1-ème colonne.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette construction donne bien des tables de vérité et nous donnons l'exemple suivant de table qui montre que la formule $(\neg F \to (\neg\neg F \to \neg G))$ est valide dans cette logique.

F	G	$\neg F$	$\neg G$	$\neg\neg F$	$(\neg\neg F \to \neg G)$	$(\neg F \to (\neg\neg F \to \neg G))$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1

D'autres exemples sont donnés dans [1], [6], [9], [12], [13], [20], [21], [23] et [25]. Cette méthode a été notamment appliquée à la logique modale [19].

A-cotés et à venir

Etant donné que nous nous sommes intéressés seulement aux logiques normales on pourrait croire que la théorie de la valuation se restreint à de telles logiques et qu'elle ne permet pas en particulier d'étudier les *logiques non-monotones*, la *logique inductive*, ou encore les *logiques alphabarres* (logiques dans lesquelles la loi d'identité, $F \vdash F$, n'est pas valable en générale). Pour se défaire de cette idée on consultera [4], [14] et [24].

La théorie de la valuation permet également de traiter les *logiques multivalentes*. Il y a un théorème (cf [2]) qui permet de relier canoniquement les sémantiques multivalentes aux sémantiques bivalentes. Les sémantiques multivalentes apparaissent comme des projections de certaines sémantiques bivalentes. On peut donc établir des résultats concernant des logiques multivalentes à partir de sémantiques bivalentes. On peut consulter à ce sujet [3] et [10].

Pour ce qui est de la logique d'ordre non nul (ie non simplement propositionelle), la théorie de la valuation permet une étude tout à fait intéressante, que nous n'avons fait qu'effleurée, qui constitue une extension naturelle de l'ordre nul. Nous développerons de manière plus détaillé cette étude dans un prochain travail.

N.C.A. DA COSTA
Université deSão Paulo
Institut des Etudes Avancées
ncacosta@usp.br

J-Y.BÉZIAU
Université de ParisVII
Département de Mathématiques,
jyb @alpha.Incc.br

Le second d'entre nous a bénéficié d'une bourse Lavoisier du Ministère des Affaires Etrangères du Gouvernement de la France pendant la durée de ce travail, lui permettant de séjourner à l'Université de São Paulo.
Nous tenons à remercier le Professeur David W.Miller (Université de Warwick, Angleterre) qui a bien voulu lire ce manuscrit et apporter d'utiles conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Béziau, J-Y., 'Nouveaux résultats et nouveau regard sur la logique paraconsistante C1', *Logique et Analyse*, 141-142 (1993), pp. 45-58.

[2] Béziau, J-Y., 'Recherches sur la logique abstraite : les logiques normales', *Acta Universitatis Wratislaviensis, Serie Logika*, 16 (1994)

[3] Béziau, J-Y., 'Logiques construites suivant les méthodes de da Costa I', *Logique et Analyse*, 131-132 (1990), pp. 259-272.

[4] Carnota, R., et Coniglio, M., 'Estudio de nociones metadeductivas de logicas no monotonas aplicando teoria de valuaciones de da Costa', à paraître.

[5] da Costa, N.C.A., 'α-models and the systems T and T^*', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol XV, n3, (1974), pp. 443-454.

[6] da Costa, N.C.A. et E.H.Alves, 'Une sémantique pour le calcul C1', *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, T238A (1976), pp. 729-731.

[7] da Costa, N.C.A. et Alves, E.H., 'A semantical analysis of the calculi Cn', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol XVIII, n4 (1977), pp. 621-630.

[8] da Costa, N.C.A. et Béziau J-Y., 'La théorie de la valuation en question', *Proceedings of the Ninth Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Bahia-Blanca, 1993, pp. 95-104.

[9] da Costa, N.C.A. et Kotas J., 'Some problems on logical matrices and valorizations', in *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, édité par A.I.Arruda, N.C.A. da Costa et A.M.Sette, Sociedade Brasileira de Lógica (198O), pp. 131-146.

[10] D'Ottaviano, I.M.L., 'The completeness and compactness of a three valued first-order logic', *Revista Colombiana de Matemáticas*, n15 (1985), pp. 31-42.

[11] Dzik, W., 'The Existence of Lindenbaum's extensions is equivalent to the axiom of choice', *Reports on Mathematical Logic*, n° 13 (1981), pp. 29-31.

[12] Grana, N., *Sulla teoria delle valutazioni di N.C.A. da Costa*, Liguori Editore, Napoli 1990, 75p.

[13] Graziosi, L., *Il metodo delle valuazioni in logica*, Thèse, Università di Milano, 1985.

[14] Krause, D. et Béziau J-Y., 'Logiques dérogeant le principe d'identité', à paraître.

[15] Leblanc, H, 'Semantic deviations' in *Truth, Syntax and Modality*, édité par H. Leblanc, North-Holland, Amsterdam, 1973, pp. 244-273.

[16] Leblanc, H, *Truth-Value Semantics*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[17] Leblanc, H, 'Alternatives to standard first-order semantics' in *Handbook of Philosophical Logic* vol.I, édité par D. Gabbay et F. Guenthner, D.Reidel, Dordrecht, 1983, pp. 189-274.

[18] Loparic, A., 'Une étude sémantique de quelques calculs propositionnels', *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, T 284A (1977), pp. 835-838.

[19] Loparic, A., 'The method of valuations in modal logic', in *Mathematical logic : Proceedings of the First Brazilian Conference*, edité par A.I. Arruda, N.C.A. da Costa et R. Chuaqui, Marcel Dekker, New-York et Bâle, 1977, pp. 141-157.

[20] Loparic, A., 'A semantical study of some propositional calculi', *The Journal of Non-Classical Logic*, Vol 3, n° 1 (1986).

[21] Loparic, A., *Definição de conjuntos decidíveis de valorações pela fatorizaçõo da linguagem*, Thèse, Universidade Estadual de Campinas, 1988.

[22] Loparic, A. et E.H.Alves, 'The semantics of the systems *Cn* of da Costa' in *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, édité par A.I. Arruda, N.C.A. da Costa et A.M. Sette, Sociedade Brasileira de Lógica (1980), pp. 161-172.

[23] Loparic, A. et N.C.A. da Costa, 'Paraconsistency, paracompleteness and valuations', *Logique et Analyse*, n° 106 (1984), pp. 119-131.

[24] Loparic, A. et N.C.A. da Costa, 'Paraconsistency, paracompleteness, and induction', *Logique et Analyse*, n° 113 (1986), pp. 73-80.

[25] Marconi, D., 'A decision method for the calculus *C*1', in *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, édité par A.I. Arruda, N.C.A. da Costa et A.M. Sette, Sociedade Brasileira de Lógica (1980), pp. 311-223.

[26] Miller, D.W., *Investigations of Consequence*, à paraître.

[27] Scott, D.S., 'Background to formalization' in *Truth, Syntax and Modality*, édité par H. Leblanc, North-Holland, Amsterdam, 1973, pp. 244-273.

[28] Scott, D.S., 'Completeness and axiomatizability in many-valued logic' in *Proceedings of the Tarski Symposium*, édité par L.Henkin, American Mathematical Society, Providence, 1974, pp. 411-435.

[29] Suszko, R., 'Formalna teoria wartosci logicznych', *Studia Logica*, Tom VI (1957), pp. 145-236.

[30] van Fraasen, B.C., 'Singular terms, truth-value gaps, and free logic', *Journal of philosophy*, n° 63 (1966), pp. 481-495.

[31] van Fraasen, B.C., *Formal Semantics and Logic*, MacMillan, New-York, 1971.

[32] Wójcicki, R., *Lectures on Propositonal Calculi*, Ossolineum, Wrocław, 1984.

[33] Wójcicki, R., *Theory of Logical Calculi*, Kluwer, Dordrecht, 1988.