Logique & Analyse **133-134** (1991), 151-158

MODALITÉ MONOTONE ET SCHÉMA T

Thierry LUCAS[1]

Abstract.

Using sequent calculus, we characterize the formulas A for which $\Box A \rightarrow A$ (T schema) is provable in propositional modal system M.

1. *Introduction*

Dans son article [2], M. CRABBE démontre que ce qu'il appelle règle de Löb, c'est-à-dire l'inférence de A à partir de $\Box A \rightarrow A$, est redondante dans plusieurs systèmes de logique modale propositionnelle, dont les systèmes K et E. (Nous adoptons les notations de [1]). Il montre aussi qu'elle ne l'est pas dans d'autres systèmes, en particulier le système M, essentiellement constitué d'une modalité monotone, c'est-à-dire admettant la règle $A \rightarrow B / \Box A \rightarrow \Box B$; on y démontre en effet $\Box\Box\top \rightarrow \Box\top$ sans démontrer $\Box\top$.

Parmi les systèmes modaux faibles, le système M nous semble fondamental, tant pour des raisons algébriques que pour son utilité dans l'analyse épistémique (voir par exemple [4]). Il est donc intéressant de maîtriser aussi bien que possible les relations entre modalités qu'il permet de prouver et la relation entre A et $\Box A$ en est un intéressant exemple soulevé par l'article de M. CRABBE.

La technique des calculs de séquents est particulièrement bien adaptée à une étude fine de la démonstration. Nous commencerons donc par présenter brièvement un calcul de séquents équivalent au système M (section 2) pour ensuite étudier certaines relations entre A et $\Box A$, ce qui nous permettra de caractériser les formules A pour lesquelles $\Box A \rightarrow A$ (schéma T) est démontrable (section 3).

[1] Je remercie M. CRABBE et L. LISMONT pour leurs suggestions.

2. *Un calcul de séquents pour M*

Le langage est celui de la logique propositionnelle classique augmenté de l'opérateur unaire $\Box$ que l'on peut lire "nécessaire". Les formules $\top$ et $\bot$ sont considérées comme des abréviations des formules $\neg(p \wedge \neg p)$ et $(p \wedge \neg p)$, où p est une variable propositionnelle arbitrairement choisie mais fixée.

Les séquents sont des couples d'ensembles de formules $\Gamma \Rightarrow \Delta$ avec l'interprétation usuelle "conjonctive" des formules de Γ et "disjonctive" des formules de Δ. Dans les séquents, la notation Γ, Δ représente $\Gamma \cup \Delta$ et $\{A\}$ se note aussi A.

Les séquents axiomatiques sont les séquents de la forme $A \Rightarrow A$. Comme nous définissons les séquents par des ensembles de formules, les règles structurales de permutation et de contraction sont implicites, mais nous utilisons explicitement des règles d'affaiblissement à gauche et à droite:

$$(AffG)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad (AffD)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}$$

Les règles d'introduction des connecteurs classiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ sont traditionnelles, mais pour la simplicité de l'exposé, nous nous contentons de traiter explicitement les règles de négation et de conjonction:

$$(\neg G)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} \qquad (\neg D)\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

$$(\wedge G)\ \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad (\wedge D)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}$$

Dans une règle telle que $(\neg G)$, nous dirons que $\Gamma \Rightarrow A, \Delta$ est la prémisse, que $\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta$ est la conclusion et que $\neg A$ est la formule introduite à gauche.

La seule règle concernant le connecteur $\Box$ est la règle de monotonie

$$(Mon) \qquad \frac{A \Rightarrow B}{\Box A \Rightarrow \Box B}$$

avec la stipulation qu'il y ait bien une et une seule formule à gauche ainsi qu'à droite dans la prémisse de la règle.

Nous avons ainsi décrit un calcul de séquents que nous noterons *M Seq*.

Pour montrer que le système *M Seq* est équivalent au système *M* via les correspondances usuelles, il suffit de montrer qu'il admet l'élimination des coupures.

THÉORÈME 1. *Le système M Seq est équivalent à ce même système augmenté de la règle de coupure:*

$$(El) \qquad \frac{\Gamma \to A\ ,\ \Delta \quad \Gamma'\ ,\ A \to \Delta'}{\Gamma\ ,\ \Gamma' \to \Delta\ ,\ \Delta'}$$

DÉMONSTRATION. On étend sans difficulté la démonstration du Hauptsatz de Gentzen (voir [3]). ∎

3. *Quelques relations entre A et* $\Box A$

Nous commençons par un théorème général qui caractérise la démonstrabilité du séquent $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ dans le système *M Seq*.

THÉORÈME 2. *Le séquent* $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *est démontrable si et seulement si il existe un ensemble fini* $\Theta = \{B_1, ..., B_k\}$ de formules telles que:

(1) $\Box\Theta = \{\Box B_1, ..., \Box B_k\}$ *est constitué de sous-formules (des formules) de* $\Gamma \cup \Delta$,

(2) les séquents $A \Rightarrow B_1, ..., A \Rightarrow B_k$ *sont démontrables,*

(3) le séquent $\Box\Theta, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *est démontrable.*

(Pour $k = 0$, $\Theta = \varnothing$ *et ces conditions se réduisent à "le séquent* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *est démontrable").*

DÉMONSTRATION DE LA CONDITION SUFFISANTE. Par (2) et la règle (*Mon*), les séquents $\Box A \Rightarrow \Box B_1, ..., \Box A \Rightarrow \Box B_k$ sont démontrables. Par (3) et la règle (*El*), il vient que le séquent $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ l'est aussi.

DÉMONSTRATION DE LA CONDITION NÉCESSAIRE. On procède par induction sur la forme des démonstrations sans coupures dont la conclusion est de forme $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (*A* est fixé, mais Γ et Δ peuvent varier). On y supposera que $\Box A \notin \Gamma$, sinon la condition nécessaire est évidente en prenant $\Theta = \varnothing$.

(Cas 1) $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *est axiomatique.*

Dans ce cas, $\Gamma = \varnothing$ et Δ est réduit à $\Box A$. On pose $\Theta = \{A\}$ et les propriétés (1), (2) et (3) sont immédiates.

(Cas 2) $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *provient de la règle (AffD).*
Dans ce cas, la prémisse est de forme $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta'$ avec $\Delta' \subseteq \Delta$ et l'hypothèse d'induction donne un $\Theta' = \{B'_1, \ldots, B'_{k'}\}$ qui satisfait

(1') $\Box\Theta'$ est constitué de sous-formules de $\Gamma \cup \Delta'$,
(2') $A \Rightarrow B'_1, \ldots, A \Rightarrow B'_{k'}$, sont démontrables,
(3') $\Box\Theta', \Gamma \Rightarrow \Delta'$ est démontrable.

Il suffit de poser $\Theta = \Theta'$ pour démontrer (1), (2) et (3): (1) et (2) sont évidents et de (3') on tire que $\Box\Theta, \Gamma \Rightarrow \Delta$ est démontrable par la règle (*AffD*).

(Cas 3) $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *provient de la règle (AffG).*
Si cette règle n'introduit pas $\Box A$, on raisonne comme dans le cas 2.
Si cette règle introduit $\Box A$, sa prémisse est de forme $\Gamma \Rightarrow \Delta$ et l'on peut prendre $\Theta = \varnothing$.

(Cas 4) $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *provient de la règle* $(\neg G)$, *de la règle* $(\neg D)$ *ou de la règle* $(\wedge G)$.
Tous ces cas sont analogues au cas 2: l'hypothèse d'induction donne un Θ' et il suffit de poser $\Theta = \Theta'$ pour démontrer les conditions (1), (2) et (3).

(Cas 5) $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *provient de la règle* $(\wedge D)$.
Dans ce cas, Δ est de la forme $\Delta' \cup \{E_1 \wedge E_2\}$ et les prémisses sont $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta', E_1$ et $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta', E_2$. L'hypothèse d'induction nous donne un Θ_1 (resp. Θ_2) qui satisfait les conditions (1), (2) et (3) pour Γ et $\Delta' \cup \{E_1\}$ (resp. $\Delta' \cup \{E_2\}$). Il suffit de poser $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ pour démontrer les conditions (1), (2) et (3) pour Γ et Δ.

(Cas 6) $\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *provient de la règle (Mon).*
Dans ce cas, Γ est vide, Δ est de forme $\{\Box B\}$ et la prémisse est $A \Rightarrow B$. Il suffit de poser $\Theta = \{B\}$ pour démontrer les conditions (1), (2) et (3). ■

Le théorème 2 nous permet d'obtenir une caractérisation des formules A telles que $\Box A \rightarrow A$ soit démontrable. Nous l'énonçons en faisant appel à la notion de degré modal, $deg(A)$, que l'on définit par induction sur la forme de A:

$deg(A) = 0$ si A est une variable propositionnelle;
$deg(\neg B) = deg(B)$;

$deg(B \wedge C) = max(deg(B), deg(C))$;
$deg(\Box B) = deg(B) + 1$.

THÉORÈME 3. *Le séquent $\Box A \Rightarrow A$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Rightarrow A$ est démontrable ou il existe une formule A^* (conjonction de sous-formules de A) de degré modal strictement plus petit que celui de A telle que*
(1) le séquent $A \Rightarrow A^*$ est démontrable,
(2) le séquent $\Box A^* \Rightarrow A$ est démontrable.

DÉMONSTRATION. La condition suffisante est claire. Pour prouver la condition nécessaire, on applique le théorème 2 au cas $\Gamma = \varnothing$ et $\Delta = \{A\}$, ce qui donne un ensemble $\Theta = \{B_1, ..., B_k\}$ de sous-formules de A de degré modal strictement inférieur à celui de A. Si Θ est vide, alors le séquent $\Rightarrow A$ est démontrable. Si Θ n'est pas vide, la conjonction de Θ constitue une formule A^* de degré modal strictement inférieur à celui de A et la propriété (2) du théorème 2 donne la propriété (1) du théorème 3. Pour prouver la propriété (2) du théorème 3, notons que pour tout i, $1 \leq i \leq k$, le séquent $A^* \Rightarrow B_i$ se démontre dans le calcul des séquents propositionnel classique; de là, on démontre aussi par la règle (*Mon*) le séquent $\Box A^* \Rightarrow \Box B_i$; il suffit alors d'appliquer la règle (*El*) et la propriété (3) du théorème 2. ∎

L'intérêt du théorème 3 est qu'il permet d'amorcer une récurrence sur le degré modal:

COROLLAIRE 4. *Soit $d = deg(A)$. Le séquent $\Box A \Rightarrow A$ est démontrable si et seulement si il existe une suite $A_0, A_1, ..., A_k = A$ $(0 \leq k \leq d)$ de formules de degré modal respectif $d_0 < d_1 < ... < d_k = d$ telles que*
(1) le séquent $\Rightarrow A_0$ est démontrable,
(2) pour tout j, $1 \leq j < k$, les séquents $\Box A_j \Rightarrow A_{j+1}$ et $A_{j+1} \Rightarrow A_j$ sont démontrables.

DÉMONSTRATION. La condition suffisante est claire. Pour la condition nécessaire, on notera d'abord que si le séquent $\Rightarrow A$ est démontrable, on peut prendre $k = 0$. Si le séquent $\Rightarrow A$ n'est pas démontrable, le théorème 3 nous donne un A^* pour lequel $deg(A^*) < deg(A)$ et pour lequel les séquents $\Box A^* \Rightarrow A$ et $A \Rightarrow A^*$ sont démontrables; la règle (*El*) donne alors que le séquent $\Box A^* \Rightarrow A^*$ est démontrable, ce qui permet d'itérer le processus. ∎

Si nous travaillons à l'équivalence logique près, le corollaire 4 suggère à son tour une construction explicite de l'ensemble des formules A pour lesquelles $\Box A \Rightarrow A$ est démontrable. Précisons d'abord que l'on définira "A équivaut logiquement à B" comme "les séquents $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont démontrables dans *M Seq*". Pour des ensembles de formules Φ et Ψ, on dira que Φ équivaut logiquement à Ψ si chaque formule de Φ équivaut logiquement à une formule de Ψ et réciproquement. Si nous utilisons cette équivalence logique, nous pouvons identifier à $\top$ les formules A_0 telles que (1) ci-dessus et par ailleurs, le (2) ci-dessus suggère de construire A_{j+1} à partir de A_j en "ajoutant" à $\Box A_j$ une formule que l'on "recoupe" par A_j. Plus précisément,

THÉORÈME 5. *Soit Φ l'ensemble des formules A pour lesquelles le séquent $\Box A \Rightarrow A$ est démontrable dans M Seq. Soit Ψ la réunion des ensembles Ψ_n définis par récurrence comme suit:*

$$\Psi_0 = \{\top\},$$
$$\Psi_{n+1} = \{\Box B \vee (S \wedge B) \mid B \in \Psi_n, S \text{ formule}\}.$$

Dans ces conditions, Φ équivaut logiquement à Ψ.

DÉMONSTRATION.
(1) Ψ est inclus dans Φ.
Nous montrons par récurrence sur n que $\Psi_n \subseteq \Phi$. Le cas $n = 0$ est évident, car $\Box \top \Rightarrow \top$ est démontrable. Supposons maintenant $\Psi_n \subseteq \Phi$ et démontrons $\Psi_{n+1} \subseteq \Phi$; pour cela, soit A dans Ψ_{n+1}; A est de forme $\Box B \vee (S \wedge B)$ avec $B \in \Psi_n$; par l'hypothèse de récurrence, $\Box B \Rightarrow B$ est démontrable et de là, $A \Rightarrow B$ est démontrable; par ailleurs, étant donné la forme de A, $\Box B \Rightarrow A$ est démontrable; de la démonstrabilité de $A \Rightarrow B$ et de $\Box B \Rightarrow A$, on tire celle de $\Box A \Rightarrow A$ par (*Mon*) et (*El*), ce qui prouve bien que $A \in \Phi$.
(2) Toute formule de Φ équivaut logiquement à une formule de Ψ.
Soit $A \in \Phi$. Nous prouvons par induction sur le degré de A, que A équivaut logiquement à une formule de Ψ. Par le théorème 3, soit le séquent $\Rightarrow A$ est démontrable, soit il existe un A^* de degré modal strictement plus petit que celui de A, pour lequel les séquents $\Box A^* \Rightarrow A$ et $A \Rightarrow A^*$ sont démontrables (‡). Dans le premier cas, A équivaut logiquement à $\top$ qui appartient à Ψ_0. Dans le second cas, l'hypothèse de récurrence donne que A^* est logiquement équivalent à une formule B d'un Ψ_n; par ailleurs, les conditions (‡) montrent que A est logiquement équivalent à $\Box A^* \vee (A \wedge A^*)$; il en résulte (en utilisant notamment la règle (*Mon*)) que A est logiquement équivalent à $\Box B \vee (A \wedge B)$ et donc que $A \in \Psi_{n+1}$. Dans les deux cas, on a prouvé que

$A \in \Psi$. ∎

Le théorème 3 permet aussi de démontrer par récurrence le résultat suivant:

COROLLAIRE 6. *Soit $d = deg(A)$. Si le séquent $\Box A \Rightarrow A$ est démontrable, alors il existe $k \leq d$ tel que $\Box^k \top \Rightarrow A$ soit démontrable. (Pour $k = 0$, on pose $\Box^k \top = \top$).*

Notons pour terminer que tous les résultats précédents peuvent se dualiser pour étudier la démonstrabilité de $\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box A$ et de $A \Rightarrow \Box A$, en "retournant" le sens de $\Rightarrow$, en remplaçant $\wedge$ par $\vee$ et $\top$ par $\bot$. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous nous bornons à dualiser le corollaire 6:

COROLLAIRE 7. *Soit $d = deg(A)$. Si le séquent $A \Rightarrow \Box A$ est démontrable, alors il existe $k \leq d$ tel que $A \Rightarrow \Box^k \bot$ soit démontrable. (Pour $k = 0$, on pose $\Box^k \bot = \bot$).*

On peut ainsi retrouver la proposition 6 de [2]:

COROLLAIRE 8. *Dans M, on ne démontre $\Box A \leftrightarrow A$ pour aucune formule A.*

DÉMONSTRATION. Sinon, par ce qui précède, il existerait k_1 et k_2 tels que $\Box^{k_1} \top \Rightarrow A$ et $A \Rightarrow \Box^{k_2} \bot$ soient démontrables dans *M Seq*. De là, par (*El*), $\Box^{k_1} \top \Rightarrow \Box^{k_2} \bot$ serait démontrable. Des considérations usuelles sur les modèles montrent que cela est impossible. On peut aussi utiliser l'inversion de la règle (*Mon*), facile à démontrer dans le système sans coupures, pour se ramener à la démonstrabilité de séquents telles que $\Box^p \top \Rightarrow \bot$ ou $\top \Rightarrow \Box^q \bot$ et utiliser le théorème 2 ou son dual pour voir que ces séquences ne sont pas démontrables. ∎

Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHELLAS, B.F., *Modal Logic. An introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
[2] CRABBE, M., *Deux redondances de la règle de Löb en logique modale*, soumis pour publication.
[3] GENTZEN, G., *Investigations into logical deduction*, in *The collected papers of Gerhard Gentzen*, SZABO M.E., North-Holland, Amsterdam,

London, 1969, p. 68-131.
[4] LISMONT, L., *La connaissance commune en logique modale*, Math. Log. Quart., 39, (1993), p. 115-130.