Logique & Analyse **125-126** (1989), 143-155

CALCUL DES SEQUENTS POUR LOGIQUE NON-ALETHIQUE

Jean-Yves BÉZIAU

1. *Introduction*

Le principe de contradiction et le principe du tiers-exclu sont longtemps apparus comme les deux piliers de la logique. S'il n'est plus question aujourd'hui de montrer qu'une logique peut bien subsister sans l'un de ces principes, de même qu'un borgne possède encore la vue, on pourrait penser qu'une logique dépourvue à la fois de ces deux principes serait totalement inopérante. Cependant A.Loparic et N.C.A. da Costa ont présenté une telle logique [4], dite non-alèthique, qui, en un certain sens, est plus forte que la logique classique.

De façon plus générale et plus technique la notion de logique non-alèthique doit être entendue comme suit. Si dans une théorie T il y a deux théorèmes contradictoires tous deux vrais, cette théorie est dite paraconsistante, s'il y a deux formules contradictoires toutes deux fausses, elle est dite paracomplète ; une théorie non-alèthique est une théorie à la fois paraconsistante et paracomplète. Une logique non-alèthique est une logique pouvant servir de base au développement de théories non-alèthiques.

A.Loparic et N.C.A. da Costa ont élaboré suivant une méthode axiomatique une logique propositionnelle non-alèthique π, ils ont montré que l'on pouvait munir cette logique d'une sémantique bivalente adéquate et que cette logique était décidable d'après une méthode généralisée des tables de vérité (ces résultats sont exposés dans [4]).

Nous présentons ici un calcul des séquents S_π pour cette logique. Après avoir démontré son équivalence avec la présentation axiomatique nous montrons que ce calcul admet l'élimination des coupures (il en résulte un théorème de décidabilité) et que l'on peut y définir une négation possédant un comportement séquentiellement classique. Ensuite nous présentons une hiérarchie infinie de calcul des séquents non-alèthiques construits sur ce modèle et possédant ces deux propriétés fondamentales. Enfin nous montrons comment l'on peut élaborer en modifiant S_π une logique non-alèthique plus forte (et une hiérarchie infinie correpondante) pourvue elle aussi de ces propriétés.

Du point de vue du calcul des séquents, ces systèmes non-alèthiques ont l'avantage de jouir de propriétés de symétrie remarquables contrairement au calcul des séquents correspondant à la logique paraconsistante C de N.C.A. da Costa (Voir [2] pour une présentation générale de cette logique, [1] et [5] pour une approche en termes de calcul des séquents) et à sa duale paracomplète.

2. *Présentation des systèmes* π *et* S_π

Loparic et da Costa ont utilisé le système axiomatique suivant pour π:

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3) $A\ ,\ A \to B\ /\ B$
4) $(A \wedge B) \to A$
5) $(A \wedge B) \to B$
6) $(A \to (B \to (A \wedge B))$
7) $(A \to (A \vee B))$
8) $(B \to (A \vee B))$
9) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
10) $A^{\circ} \vee (A \wedge A) \vee \neg(A \vee \neg A)$
11) $\neg(A \vee \neg A) \to \neg(A \wedge \neg A)$
12) $\neg(A \wedge \neg A) \to ((A \wedge \neg A) \to B)$
13) $\neg(A \vee \neg A) \to ((A \vee \neg A) \to B)$
14) $(A_1^{\circ} \wedge \ldots \wedge A_p^{\circ}) \to (k[A_1,\ldots,A_p])^{\circ}$

A° est une abréviation pour $\neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A)$.

Dans 14) $p \in \{1\}$ et $k \in \{\neg\}$ ou $p \in \{2\}$ et $k \in \{\vee, \to, \wedge\}$, $k[A_1,\ldots,A_p] \neq B \vee \neg B$ et $k[A_1,\ldots,A_p] \neq B \wedge \neg B$. Nous utiliserons toujours ces écritures dans ce sens.

S_π est le système suivant:

Axiome $\qquad A \vdash A$

Coupure $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A,\Delta \qquad \Gamma',A \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,c$

Affaiblissement $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A,\Delta}\,\text{ad} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma,A \vdash \Delta}\,\text{ag}$$

Conjonction $$\frac{\Gamma \vdash A,\Delta \quad \Gamma' \vdash B,\Delta}{\Gamma,\Gamma' \vdash A \wedge B,\Delta,\Delta'}\,\wedge\text{d} \qquad \frac{\Gamma,A,B \vdash \Delta}{\Gamma,A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge\text{g}$$

Disjonction $$\frac{\Gamma \vdash A,B,\Delta}{\Gamma \vdash A \vee B,\Delta}\,\vee\text{d} \qquad \frac{\Gamma,A \vdash \Delta \quad \Gamma',B \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma',A \vee B \vdash \Delta,\Delta'}\,\vee\text{g}$$

Implication $$\frac{\Gamma,A \vdash B,\Delta}{\Gamma \vdash A \to B,\Delta}\,\to\text{d} \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\Delta \quad \Gamma',B \vdash \Delta'}{\Gamma,\Gamma',A \to B \vdash \Delta,\Delta'}\,\to\text{g}$$

Négation $$\frac{\Gamma,A \vee \neg A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(A \vee \neg A),\Delta}\,\neg\text{td} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee \neg A,\Delta}{\Gamma,\neg(A \vee \neg A) \vdash \Delta}\,\neg\text{tg}$$

$$\frac{\Gamma,A \wedge \neg A \vdash ,\Delta}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge \neg A),\Delta}\,\neg\text{cd} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge \neg A,\Delta}{\Gamma,\neg(A \wedge \neg A) \vdash \Delta}\,\neg\text{cg}$$

$$\frac{\Gamma,K \vdash \Delta \qquad \Gamma_{1_i} \vdash A_i,\neg A_i,\Delta_{1_i} \qquad \Gamma_{2_i},A_i,\neg A_i \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma,\Gamma_{1_i},\Gamma_{2_i} \vdash \neg K,\Delta,\Delta_{1_i},\Delta_{2_i}}\,\neg\text{kd}$$

$$\frac{\Gamma \vdash K,\Delta \qquad \Gamma_{1_i} \vdash A_i,\neg A_i,\Delta_{2_i} \qquad \Gamma_{2_i},A_i,\neg A_i \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma,\Gamma_{1_i},\Gamma_{2_i},\neg K \vdash \Delta_1,\Delta_{1_i},\Delta_{2_i}}\,\neg\text{kg}$$

$1 \leq i \leq p$
$K=k[A_1,\ldots,A_p]$

NB: $\Gamma_i \vdash \Delta_i,\ 1 \leq i \leq p$ signifie: $\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \ \ldots\ \Gamma_p \vdash \Delta_p$
$\Gamma,\Gamma_i \vdash \Delta_i,\ 1 \leq i \leq p$ signifie: $\Gamma,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_p \vdash \Delta_1,\ldots,\Delta_p$

3. *Equivalence des systèmes*

$$\boxed{T \vdash_{\pi} F \text{ ssi } T \vdash_{s_{\pi}} F}$$

a) si $T \vdash_{\pi} F$ alors $T \vdash_{s_{\pi}} F$

10)

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge \neg A \vdash A \wedge \neg A}{\vdash \neg(A \wedge \neg A),\ A \wedge \neg A}\,\neg cd \qquad \dfrac{A \vee \neg A \vdash A \vee \neg A}{\vdash A \vee \neg A,\ \neg(A \vee \neg A)}\,\neg td}{\dfrac{\vdash \neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A),\ A \wedge \neg A,\ \neg(A \vee \neg A)}{\vdash (\neg(A \wedge \neg A) \wedge (A \vee \neg A)) \vee ((A \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A))}\,\vee d}\,\wedge d$$

11)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash A, \neg A}\,ad+ag}{A \wedge \neg A \vdash A, \neg A}\,\wedge g}{A \wedge \neg A \vdash A \vee \neg A}\,\vee d}{A \wedge \neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash}\,\neg tg}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)}\,\neg cd}{\vdash \neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)}\,\rightarrow d$$

12)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \wedge \neg A \vdash A \wedge \neg A}{A \wedge \neg A,\ \neg(A \wedge \neg A) \vdash}\,\neg cg}{A \wedge \neg A,\ \neg(A \wedge \neg A) \vdash B}\,ad}{\vdash \neg(A \wedge \neg A) \rightarrow ((A \wedge \neg A) \rightarrow B)}\,\rightarrow d$$

13)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee \neg A \vdash A \vee \neg A}{A \vee \neg A,\ \neg(A \vee \neg A) \vdash}\ \neg tg}{A \vee \neg A,\ \neg(A \vee \neg A) \vdash B}\ ad}{\vdash \neg(A \vee \neg A) \to ((A \vee \neg A) \to B)}\ {\to}d$$

14)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_i \vdash A_i \qquad \neg A_i \vdash \neg A_i}{A_i, \neg A_i \vdash A_i \wedge \neg A_i}\ \wedge d}{\neg(A_i \wedge \neg A_i), A_i, \neg A_i \vdash}\ \neg cg}{A^{\circ}_{i\bullet}, A_i, \neg A_i \vdash}\ ag + \wedge g \qquad (14.1)$$

$$\dfrac{\dfrac{A_i \vdash A_i \qquad \neg A_i \vdash \neg A_i}{A_i \vee \neg A_i \vdash A_i, \neg A_i}\ \vee g}{A^{\circ}_{i\bullet} \vdash A_i,\ \neg A_i}\ ag + \vee g \qquad (14.2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(14.1) \quad (14.2) \quad K \vdash K}{A^{\circ}_{1\bullet}, \ldots, A^{\circ}_{p\bullet}, K, \neg K \vdash}\ \neg kg}{A^{\circ}_{1\bullet}, \ldots, A^{\circ}_{p\bullet}, K \wedge \neg K \vdash}\ \wedge g}{A^{\circ}_{1\bullet}, \ldots, A^{\circ}_{p\bullet} \vdash \neg(K \wedge \neg K)}\ \neg cd \qquad \dfrac{\dfrac{(14.1) \quad (14.2) \quad K \vdash K}{A^{\circ}_{1\bullet}, \ldots, A^{\circ}_{p\bullet} \vdash K, \neg K}\ \neg kd}{A^{\circ}_{1\bullet}, \ldots, A^{\circ}_{p\bullet} \vdash K \vee \neg K}\ \vee d}{A^{\circ}_{1\bullet}, \ldots, A^{\circ}_{p\bullet} \vdash \neg(K \wedge \neg K) \wedge (K \vee \neg K) : K^{\circ}_{\bullet}}\ \wedge d}{A^{\circ}_{1\bullet} \wedge \ldots \wedge A^{\circ}_{p\bullet} \vdash K^{\circ}_{\bullet}}\ \wedge g}{\vdash (A^{\circ}_{1\bullet} \wedge \ldots \wedge A^{\circ}_{p\bullet}) \to K^{\circ}_{\bullet}}\ {\to}d$$

$1 \leq i \leq p$

$K = k[A_1, \ldots, A_p]$

b) si T $\vdash_{s_\pi}$ F alors T $\vdash_\pi$ F

Pour cette preuve on utilise un système de déduction naturelle de style M (cf [3]) dont l'équivalence avec le système axiomatique est évidente suivant les méthodes habituelles. On résoud le problème de la multiplicité des formules à droite du fait que la loi de Peirce $[((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A]$ est démontrable dans π (cela résulte du théorème 4 de [4]). Dans cette preuve nous utilisons les propriétés usuelles du système M sous-jacent et signalons uniquement l'usage des règles du système correspondant aux axiomes typiques de π.

$\neg$tg)

$$\dfrac{\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\vee\neg A) \qquad \vdash A\vee\neg A}{\neg(A\vee\neg A)\vdash}\ 13)$$

$\neg$cg)

$$\dfrac{\neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A) \qquad \vdash A\wedge\neg A}{\neg(A\wedge\neg A)\vdash}\ 12)$$

$\neg$td)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(10)}{\vdash (A\vee\neg A)\vee(A\wedge\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A)} \qquad A\vee\neg A\vdash}{\vdash (A\wedge\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A)}}{\vdash (A\vee\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A)} \qquad A\vee\neg A\vdash}{\vdash \neg(A\vee\neg A)}$$

$\neg$cd)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(10)}{\vdash \neg(A\wedge\neg A)\vee(A\wedge\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A)} \qquad (11)}{\vdash \neg(A\wedge\neg A)\vee(A\wedge\neg A)\vee\neg(A\wedge\neg A)}}{\vdash \neg(A\wedge\neg A)\vee(A\wedge\neg A)} \qquad A\wedge\neg A\vdash}{\vdash \neg(A\wedge\neg A)}$$

$\neg$kd)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_i,\neg A_i\vdash}{\vdash \neg(A_i\wedge\neg A_i)}\quad \vdash A_i\vee\neg A_i}{\vdash A^{\circ}_{i\bullet}}\;14)}{\vdash K^{\circ}_{\bullet}} \qquad \dfrac{\dfrac{K\vee\neg K\vdash K\vee\neg K}{\neg(K\wedge\neg K),K\vee\neg K\vdash K\vee\neg K}}{K^{\circ}_{\bullet}\vdash K\vee\neg K}}{\dfrac{\vdash K\vee\neg K \qquad\qquad K\vdash}{\vdash \neg K}}$$

$K=k[A_1,\ldots,A_p]$
$1\leq i\leq p$

$\neg$kg) cas symétrique.

4. *Elimination des coupures*

La preuve se fait de façon identique à celle de LK (la logique classique) ,le seul cas préoccupant est celui des règles $\neg$kd et $\neg$kg; il faut montrer que:

a) l'on peut faire baisser le degré de la formule de coupure dans le cas où cette formule est de type $\neg k[A_1,\ldots,A_p]$,

b) l'on peut faire baisser le rang de la coupure dans le cas où la dernière règle employée est $\neg$kd ou $\neg$kg; ces deux règles étant parfaitement symétriques, il suffira de le montrer pour l'une d'entre elles.

a)
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,K\vdash\Delta\quad \Gamma_{1_i},A_i,\neg A_i\vdash\Delta_{1_i}\quad \Gamma_{2_i}\vdash A_i,\neg A_i,\Delta_{2_i}}{\Gamma,\Gamma_{1_i},{}_{2_i}\vdash\neg K,\Delta,\Delta_{1_i},\Delta_{2_i}}\,\neg\mathrm{kd}}{\ldots}$$

$$\dfrac{\ldots\qquad\dfrac{\Gamma'\vdash K,\Delta'\quad \Gamma_{3_i},A_i,\neg A_i\vdash\Delta_{3_i}\quad \Gamma_{4_i}\vdash A_i,\neg A_i,\Delta_{4_i}}{\Gamma',\Gamma_{3_i},\Gamma_{4_i},\neg K\vdash\Delta',\Delta_{3_i},\Delta_{4_i}}\,\neg\mathrm{kg}}{\Gamma,\Gamma_{1_i},\Gamma_{2_i},\Gamma',\Gamma_{3_i},\Gamma_{4_i}\vdash\Delta,\Delta_{1_i},\Delta_{2_i},\Delta',\Delta_{3_i},\Delta_{4_i}}\,c$$

$$\text{donne:}\quad \cfrac{\cfrac{\Gamma' \vdash K,\Delta' \qquad \Gamma,K \vdash \Delta}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}\,c}{\Gamma,\Gamma_{1_i},\Gamma_{2_i},\Gamma',\Gamma_{3_i},\Gamma_{4_i} \vdash \Delta,\Delta_{1_i},\Delta_{2_i},\Delta',\Delta_{3_i},\Delta_{4_i}}\,ad+ag$$

$(1 \leq i \leq p)$
$K=k[A_1,..,A_p]$

b)

$$\cfrac{\overset{\alpha_1}{\bigvee}\atop{\Gamma',[C],K \vdash \Delta'} \qquad \overset{\alpha_2}{\bigvee}\atop{\Gamma_{1_i},[C] \vdash A_i,\neg A_i,\Delta_{1_i}} \qquad \overset{\alpha_3}{\bigvee}\atop{\Gamma_{2_i},[C],A_i,\neg A_i \vdash \Delta_{2_i}}}{\Gamma',\Gamma_{1_i},\Gamma_{2_i},C \vdash \neg K,\Delta',\Delta_{1_i},\Delta_{2_i}}\,\neg kd \qquad (b.1)$$

$$\cfrac{\overset{\alpha}{\bigvee}\atop{\Gamma \vdash C,\Delta} \qquad (b.1)}{\Gamma,\Gamma',\Gamma_{1_i},\Gamma_{2_i} \vdash \neg K,\Delta,\Delta',\Delta_{1_i},\Delta_{2_i}}\,c$$

$K=k[A_1,..,A_p]$ $(1 \leq i \leq p)$

donne:

$\neg kd(coup(\alpha,\alpha_j),\alpha_h,\alpha_m)$
ou $\neg kd(coup(\alpha,\alpha_j),coup(\alpha,\alpha_h),\alpha_m)$ $\qquad 1 \leq j,h,m \leq 3$
ou $\neg kd(coup(\alpha,\alpha_j),coup(\alpha,\alpha_h),coup(\alpha,\alpha_m))$ $\qquad h \neq m, j \neq m, h \neq j$
suivant que C apparaisse ou non dans $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

Corollaires de l'élimination des coupures

▸ La notion de para-sous-formule d'une formule A est définie de la façon suivante: $PSF(A) = SF(A) \cup \{\neg B;\ B \in SF(A) \text{ et } B \neq A\}$.

▸ Etant donné que S_π admet l'élimination des coupures et vu la configuration des règles de S_π , il est clair que S_π *a la propriété de la para-sous-formule*, c'est-à-dire que s'il existe une démonstration de $\Gamma \vdash \Delta$ il existe une démonstration de $\Gamma \vdash \Delta$ dans laquelle les séquents ne sont faits que de para-sous-formules de formules de Γ et de Δ.

▸ On en déduit que S_* *est décidable.*

5. *Définition d'une négation classique* $\neg^*_*$

▸ On montre facilement que:

$$\frac{A \vdash}{\vdash (\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A)}$$

et

$$\frac{\vdash A}{(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \vdash}$$

ainsi pour le second:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A}{\vdash A \vee \neg A}\ \text{ad}+\vee\text{d}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash}\ \neg\text{tg} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A \qquad \neg A \vdash \neg A}{\neg A \vdash A \wedge \neg A}\ \wedge\text{d}}{\neg(A \wedge \neg A), \neg A \vdash}\ \neg\text{cg}}{(\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \vdash}\ \vee\text{g}+\wedge\text{g}$$

▸ Si on montre maintenant que:

$$\begin{aligned} &\neg^*_* A : A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \\ &\text{eq}\ \ (\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A) \\ &\text{eq}\ \ (\neg(A \wedge \neg A) \wedge \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A), \end{aligned}$$

on aura: $\dfrac{A \vdash}{\vdash \neg^*_* A}\ \neg^*_*\text{d} \qquad \dfrac{\vdash A}{\neg^*_* A \vdash}\ \neg^*_*\text{g}$

a)

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\vee\neg A)\qquad \dfrac{\neg A\vdash\neg A\qquad \neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A)}{\neg A,\neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg A}\,\wedge d}{\neg(A\vee\neg A)\vee\neg A\,,\neg(A\wedge\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg A\,,\neg(A\vee\neg A)}\,\vee g}{(\neg(A\vee\neg A)\vee\neg A)\wedge\neg(A\wedge\neg A)\vdash(\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A)}\,\wedge g+\vee d$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vdash A\qquad \neg A\vdash\neg A}{\neg A\,,A\vdash A\wedge\neg A}\,\wedge d}{\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg A,A\vdash}\,\neg cg+\wedge g\qquad \neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\vee\neg A)}{(\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A),A\vdash\neg(A\vee\neg A)}\,\vee g}{(\neg(A\wedge\neg A)\wedge\neg A)\vee\neg(A\vee\neg A)\vdash A\rightarrow\neg(A\vee\neg A)}\rightarrow d$$

c1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vdash A\qquad \neg A\vdash\neg A}{A\vee\neg A\vdash A,\neg A}\,\vee g}{\vdash A,\neg A,\neg(A\vee\neg A)}\,\neg td\qquad \neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\vee\neg A)}{A\rightarrow\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg A,\neg(A\vee\neg A)}\rightarrow g}{A\rightarrow\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg A\vee\neg(A\vee\neg A)}\,\vee d$$

c2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vdash A}{A\wedge\neg A\vdash A}\,ag+\wedge g}{\vdash A,\neg(A\wedge\neg A)}\,\neg cd\qquad \dfrac{}{\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A)}\,\text{cf 3 a) 11)}}{A\rightarrow\neg(A\vee\neg A)\vdash\neg(A\wedge\neg A)}\rightarrow g$$

c1 + c2 donne $A \rightarrow \neg(A \vee \neg A) \vdash (\neg(A \vee \neg A) \vee \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$.

▸ Soit S_π' le système obtenu à partir de S_π en remplaçant les règles $\neg$td, $\neg$cg, par $\neg^{*}_{*}$g, $\neg^{*}_{*}$d, les règles $\neg$td, $\neg$cg sont alors des règles dérivées de S_π' ; ainsi S_π' est équivalent à S_π.

6. *La hiérarchie* S_{π_n} $(n \in \mathbb{N})$

▸ Soient $A^{\square}$: $A \wedge \neg A$ et $A_{\blacksquare}$: $A \vee \neg A$, on définit A^n et A_n $(n \in \mathbb{N})$ de la façon suivante:

$$A^o = A \qquad\qquad A_o = A$$
$$A^1 = A^{\square} \qquad\qquad A_1 = A_{\blacksquare}$$
$$A^{n+1} = (A^n)^{\square} \qquad\qquad A_{n+1} = (A_n)_{\blacksquare}\ .$$

▸ S_{π_n} $(n \in \mathbb{N}^*)$ est pour chaque n le calcul des séquents comportant les mêmes règles positives que S_π et dont les règles pour la négation sont les suivantes:

$$\frac{\Gamma, A_n \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A_n, \Delta}\ \neg\text{tnd} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A_n, \Delta}{\Gamma, \neg A_n \vdash \Delta}\ \neg\text{tng}$$

$$\frac{\Gamma, A^n \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A_n, \Delta}\ \neg\text{cnd} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A^n, \Delta}{\Gamma, \neg A^n \vdash \Delta}\ \neg\text{cng}$$

$$\frac{\Gamma, k[A_1,\ldots,A_p] \vdash \Delta \quad \Gamma_{1_i} \vdash A_{i_{n-1}}, \neg A_{i_{n-1}}, \Delta_{1_i} \quad \Gamma_{2_i}, A_i^{n-1}, \neg A_i^{n-1} \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i} \vdash \neg k[A_1,\ldots,A_p], \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}}\ \neg\text{knd}$$

$$\frac{\Gamma \vdash k[A_1,\ldots,A_p], \Delta \quad \Gamma_{1_i} \vdash A_{i_{n-1}}, \neg A_{i_{n-1}}, \Delta_{1_i} \quad \Gamma_{2_i}, A_i^{n-1}, \neg A_i^{n-1} \vdash \Delta_{2_i}}{\Gamma, \Gamma_{1_i}, \Gamma_{2_i}, \neg k[A_1,\ldots,A_p] \vdash \Delta, \Delta_{1_i}, \Delta_{2_i}}\ \neg\text{kng}$$

$(1 \leq i \leq p)$

▸ Si $n = 0$, $\neg$tnd = $\neg$cnd et $\neg$tng = $\neg$cng et ce sont les règles de la négation pour le calcul des séquents classiques ; $\neg$knd et $\neg$kng ne sont alors pas définies, on considérera donc que S_{π_0} est le calcul des séquents classique.

▸ On voit que $S_{\pi_1} = S_\pi$.

▸ On appelle S_{π_ω} le calcul S_π sans les règles pour la négation, S_{π_ω} est donc un calcul des séquents pour la logique positive classique.

▸ Il est clair que S_{π_n} ($n \in \mathbb{N}$) ainsi que S_{π_ω} admettent l'élimination des coupures.

▸ Dans chaque calcul S_{π_n} ($n \in \mathbb{N}$) on a une négation $\neg^n_n$ qui a un comportement séquentiellement classique: $\neg^n_n A$: $A \to \neg A_n$.

7. S_ρ *et la hiérarchie* S_{ρ_n}

▸ S_ρ est le calcul des séquents obtenu à partir de S_π en remplaçant les règles $\neg$kd et $\neg$kg par les règles $\neg$kd' et $\neg$kg' suivantes:

$$\frac{\Gamma\ ,\ k[A_1,\ldots,A_n] \vdash \Delta \qquad \Gamma_i \vdash A_i\ ,\neg A_i,\Delta_i}{\Gamma,\Gamma_i \vdash \neg k[A_1,\ldots,A_p],\Delta,\Delta_i}\ \neg\text{kd'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash k[A_1,\ldots,A_p]\ ,\ \Delta \qquad \Gamma_i, A_i,\neg A_i \vdash \Delta_i}{\Gamma,\Gamma_i,\neg k[A_1,\ldots,A_p] \vdash \Delta,\Delta_i}\ \neg\text{kg'}$$

▸ $\neg^*_*$ est bien-sûr toujours définissable dans S_ρ de la même manière que dans S_π et a également un comportement séquentiellement classique ; on vérifie sans peine en employant une méthode analogue que S_ρ permet l'élimination des coupures ; enfin il est clair que S_ρ est strictement plus fort que S_π.

▸ La présentation axiomatique ρ est obtenue à partir de π en remplaçant 14) par:

15) $(A_1{}^\circ \wedge \ldots \wedge A_p{}^\circ) \rightarrow (k[A_1,\ldots,A_p])^\circ$ $[A^\circ : \neg(A \wedge \neg A)]$
16) $(A_{1\bullet} \wedge \ldots \wedge A_{p\bullet}) \rightarrow (k[A_1, \ldots,A_p])_\bullet$ $[A_\bullet : A \vee \neg A]$

▸ La hiérarchie S_{ρ_n} ($n \in \mathbb{N}$) est obtenue selon une méthode comparable à celle utilisée pour $S^n_{\pi_n}$ et on a $S_{\rho_\omega} = S_{\pi_\omega}$.

8. *Perspectives*

Les méthodes que nous avons utilisées peuvent être déployées suivant deux axes: un axe horizontal qui concerne une adaptation (relativement directe et évidente) au calcul des prédicats du premier ordre et d'ordres supérieurs, ainsi qu'aux diverses extensions conservatrices de la logique classique (logiques modale, épistémique, temporelle, etc...); un axe vertical qui est la continuation du chemin conduisant de la logique paraconsistante à la logique non-alèthique, la question étant de savoir qu'elle serait la logique μ la plus faible remplissant les deux conditions suivantes: que la logique classique soit traductible dans μ, que le théorème de l'élimination des coupures soit valable pour μ.

Universités de Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) et Paris 7 (Jussieu)

REFERENCES

[1] Béziau,J.Y., 'C_1 et C_i', à paraître.
[2] da Costa, N.C.A., 'On the theory of inconsistent formal systems' *Notre Dame Journal of Formal Logic*,Vol XV, n°4 (1974), pp.497-51O.
[3] Gentzen ,G., *Recherches sur la déduction logique*, PUF, Paris, 1955, traduction commentée par R.Feys et J.Ladrière de 'Untersuchungen über das logische Schliessen', *Mathematische Zeitchrift*, T39 (1934), pp.176-21O/pp.4O5-431.
[4] Loparic,A. et N.C.A. da Costa, 'Paraconsistency, paracompletness, and valuations', *Logique et Analyse*, n° 1O6 (1984), pp.119-131.
[5] Raggio,R., 'Propositional sequence-calculi for inconsistent systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol IX, n°4 (1968), pp.359/366.