

CARNAP ET GÖDEL :
ÉCHANGE DE LETTRES AUTOUR DE LA DÉFINITION
DE L'ANALYTICITÉ.
INTRODUCTION, TRADUCTION ET NOTES

Gerhard HEINZMANN et Joëlle PROUST

*INTRODUCTION**

En Préface de son *Logical Syntax of Language* (1937, p. XVI), Carnap remercie Behmann et Gödel d'avoir relu le manuscrit (achevé en 1932) et lui avoir suggéré certaines corrections. Nous avons retrouvé cette correspondance évoquée dans Wang (1987, 51) et très partiellement citée dans Coffa (1987), dans les Archives de la Collection Rudolf Carnap, de l'Université de Pittsburgh, et dans les archives Kurt Gödel. Nous disposons en outre des notes prises par Carnap après ses rencontres avec Gödel, ainsi que du manuscrit d'un article impublié de Gödel sur la conception "syntaxique" des mathématiques défendue par Carnap.

Nous publions ci-dessous la version originale suivie de la traduction française de quelques-unes des lettres les plus significatives qu'ont échangées en 1932 Carnap et Gödel, avec la permission du Dr. Nolan, conservateur des Archives Rudolf Carnap, et du Prof. Harry Wolf, directeur de l'Institute for Advanced Studies de Princeton. Nous remercions vivement ces deux institutions de nous avoir autorisés à publier ces lettres *in extenso*. Nous pensons en effet qu'elles permettent d'éclairer la maturation de la pensée de Carnap sur un point essentiel de son œuvre. Ces

* Nous remercions Richard Nolan, conservateur des Archives Rudolf Carnap, à la Bibliothèque de l'Université de Pittsburgh, ainsi que Harry Wolf, directeur de l'Institute for Advanced Studies de Princeton et responsable des Archives Gödel de nous avoir permis de publier cette correspondance dans la version allemande accompagnée d'une traduction française. Nous remercions également chaleureusement Warren Goldfarb (Harvard university) d'avoir bien voulu nous fournir la copie de manuscrits de Gödel à paraître dans le volume trois des *Collected Works* à l'édition desquels il collabore, ainsi que George Boolos (M.I.T.) de nous avoir signalé l'existence de ces manuscrits. Nous remercions enfin Yves-Marie Visetti d'avoir bien voulu relire une version antérieure de notre introduction et de nous avoir permis, par ses remarques, de l'améliorer.

lettres seront d'ailleurs incluses dans la publication de l'ensemble de la correspondance de Gödel, en version bilingue dans le tome IV des *Collected Works* de Kurt Gödel, dont le premier volume, contenant les travaux publiés entre 1929 et 1936, est paru en 1986 chez Oxford University Press, sous la direction de Solomon Feferman.

Si la correspondance de Carnap avec Behmann concerne surtout des points de terminologie, l'échange avec Gödel sur la notion d'analyticité touche un point central du programme logiciste de Carnap. La thèse centrale de ce programme, à savoir l'affirmation selon laquelle les théorèmes logico-mathématiques ont un caractère "conservatif" (ils n'ont pas de "contenu" intrinsèque) suppose que l'on dispose d'une définition correcte et adéquate de l'analyticité qui s'applique aux formules purement logiques ou mathématiques, qu'elles soient ou non décidables.

L'échange entre Kurt Gödel et Rudolf Carnap a ceci de particulier qu'il semble avoir été déterminant pour l'un comme pour l'autre, en certains points de leur recherche, sans pourtant que chacun des deux hommes aient jamais partagé la perspective de l'autre sur les questions les plus fondamentales, comme celle du rapport entre vérité mathématique et convention linguistique, ou, plus généralement, la question du fondement des mathématiques. Le journal personnel de Carnap conservé aux archives Rudolf Carnap atteste que Carnap et Gödel, qui se sont probablement connus en 1926, et ont participé l'un et l'autre aux réunions du Cercle de Schlick, se sont rencontrés assez souvent entre 1928 et 1933. Il serait simplificateur d'imaginer que Carnap ait passivement "exploité" les idées de Gödel dans sa *Syntaxe logique*. Car réciproquement, Gödel indique, en réponse à un questionnaire, en 1974, que, outre l'*Introduction à la logique mathématique* de Hilbert-Ackermann, ce sont les cours de Carnap sur la métalogue (suivis par Gödel en 1928-29) qui ont le plus contribué à orienter ses travaux dans la direction des questions de complétude et de décidabilité de la logique. Il est juste néanmoins de dire que les lettres que nous publions ci-dessous confirment ce qu'indique Hao Wang (1987, 77) : très vite les rôles du professeur et de l'élève ont été intervertis.

Le projet même de fournir une définition du concept d'"analyticité", qui est au centre des préoccupations de Carnap en 1932, est intrinsèquement lié à la découverte faite par Gödel en 1931 de l'incomplétude de l'arithmétique. Le premier théorème d'incomplétude montre que si un système formel est suffisamment riche pour contenir une formalisation de l'arithmétique récursive, soit il est ω -inconsistant, soit il contient une

formule vraie mais indécidable, c'est-à-dire une formule A close dont on ne peut démontrer ni $S \vdash A$ ni $S \vdash \neg A$, bien qu'on puisse démontrer sa vérité à l'aide de moyens extérieurs au système. (Un système ω -consistant ⁽¹⁾ jouissant de cette propriété est appelé "incomplet"). A partir de 1931, on ne peut plus identifier une formule démontrée et une formule "vraie": la tâche que les résultats de Gödel suggèrent au logicien consiste à découvrir le nouveau critère de *validité "logique"* susceptible de s'appliquer à l'ensemble des formules logico-mathématiques et de compléter l'outillage inférentiel, en ajoutant au concept strictement effectif, mécanisable, de dérivabilité un moyen d'"inférence" non effectif. Ce nouveau critère est donné par la définition d'"analytique dans L ". Celle-ci est destinée à remplacer dans les mêmes fonctions la notion wittgensteinienne de "tautologie", à laquelle les membres du Cercle de Vienne avait — contre l'intention originale de Wittgenstein — conféré un rôle fondationnel pour la logique et les mathématiques. Mais les théorèmes de Gödel viennent briser net l'espoir d'identifier tout énoncé mathématique à une tautologie. On ne peut désormais plus soutenir que comprendre une formule mathématique ou "logique" (au sens large du terme, c'est-à-dire incluant le calcul des prédicats de second ordre) revienne comme dans le cas du calcul des propositions à saisir sa valeur de vérité en tant que dépendant des "règles d'emploi" de ses constituants; en d'autres termes, l'analyticité ne peut plus être une propriété immédiatement apparente des formules. On peut parfaitement "être au clair sur les règles d'emploi d'une phrase", selon les mots de Schlick, sans pour autant pouvoir saisir *toutes* les conséquences de ces règles ⁽²⁾. C'est donc du premier théorème d'incomplétude que procède l'exigence de compléter les concepts métallogiques traditionnels (ce que Carnap appelle les "d-concepts" — ou concepts liés à la dérivation, tels que démontrable, réfutable, etc.) par des "c-concepts" (construits à l'aide de la relation de conséquence, tels qu'analytique, contradictoire, L -déterminé etc.) permettant de rétablir la complétude du système formel, en rendant chacun de ses énoncés soit analytiques, soit contradictoires, c'est-à-dire " L -déterminés". Mais le procédé qu'utilise Gödel pour construire une formule indécidable peut éga-

(1) Un système formel est ω -consistant si l'ensemble des formules déductibles est ω -consistant. Un ensemble de formules arithmétiques M est ω -consistant s'il n'existe pas de formule $A(x)$ telle que $M \vdash A(n)$ pour tous les n et $M \vdash \neg (x) A(x)$.

(2) Cf *L.S.*, § 34a, p. 101; avec la référence à Schlick (1934), p. 96. Voir aussi W.V. Quine (1979, p. 55). Nous renvoyons sur ce sujet à Granger (19) et à Proust (1986) et (1987).

lement être utilisé pour établir une incomplétude du système en question par rapport à la définissabilité: il n'existe pas de définition de vérité pour l'arithmétique qui puisse être donnée dans l'arithmétique ⁽³⁾. En exploitant l'idée menant à ce résultat. Carnap indique une condition à laquelle doit obéir la construction du "c-concept d'analytique" s'il est défini pour le langage L II: par opposition au d-concept "démontrable dans L II" "analytique dans L II" ne peut pas être défini dans L II (L.S. § 60c, 219) mais seulement dans une métalangue plus riche que ce langage.

Carnap ne se contente pas, dans sa *Logische Syntax der Sprache*, de méditer les nouveaux obstacles révélés par Gödel à l'espoir de fonder les mathématiques. C'est aussi à Gödel qu'il emprunte les moyens techniques qui vont lui permettre de les surmonter. La *Syntaxe logique* reprend en effet, jusque dans le détail de l'application, la méthode d'arithmétisation mise en œuvre dans les théorèmes d'incomplétude. Dans quel état d'esprit Gödel accueille-t-il le travail fondationnel accompli dans la *Syntaxe logique*? A la question portant sur ses rapports avec le Cercle de Vienne, le questionnaire cité plus haut indique laconiquement: "Je n'ai été d'accord que sur certaines de leurs thèses. Entre autres je n'ai jamais cru que la mathématique était la syntaxe du langage" (Wang, 1987, 20). Dans une lettre jamais envoyée destinée à commenter ses réponses au questionnaire, il ajoute: "Je suis un réaliste conceptuel et mathématique depuis 1925 environ. Je n'ai jamais pensé que la mathématique était la syntaxe du langage. Comprise dans un sens quelconque qui lui conserve de l'intelligibilité, cette idée peut au contraire être *réfutée* par mes résultats" (Wang 1987, 20). Un manuscrit encore inédit, sur lequel nous reviendrons plus bas, permet de mieux comprendre l'évaluation très négative du projet logiciste par Gödel.

* *
*

⁽³⁾ Ce théorème a d'abord été publié par Tarski en 1933 (cf. Tarski, 1972, p. 243, en particulier la note 6). Selon Hao Wang, il avait pourtant été déjà démontré par Gödel devant le Cercle de Vienne lors de la séance du 2 Juillet 1931 et dans une lettre à Zermelo du 12 Octobre 1931 (cf. Wang, 1987, pp. 51 & 90; la date de la lettre figurant à la page 51 est erronée). En outre, Carnap a pris note le 26 Mars 1932 d'une conversation avec Gödel au cours de laquelle celui-ci observe que vrai ("*richtig*") ne se laisse pas définir (cf. aussi Wang, 1987, p. 51).

L'intérêt des lettres que nous publions ci-dessous consiste dans la mise en évidence du rôle crucial des objections de Gödel lors de l'élaboration par Carnap de la définition du concept d'analyticité. C'est en effet une lettre de Gödel datée du 11 Septembre 1932 qui convainc Carnap de l'erreur contenue dans la définition d'"analytique dans L II" présentée dans son précédent manuscrit.

Pour situer le problème qui se pose à Carnap, il convient de rappeler brièvement pourquoi deux définitions distinctes de l'analyticité sont présentées dans la *Syntaxe logique*. Carnap se donne d'abord un premier langage, L I, dans lequel peut s'exprimer une partie de l'arithmétique élémentaire. L I est effectif (*definit*) en ce sens que l'on peut, par un procédé fini, décider pour toute propriété numérique et pour tout nombre donné quelconque, si ce nombre a ou n'a pas la propriété en question (*L.S.*, p. 11). Puisque, dans L I, tous les quantificateurs sont à portée limitée, toutes les formules closes y sont effectives (*ibid.*, § 15) ⁽⁴⁾. Mais l'arithmétique formalisable dans L I n'en est pas moins incomplète (*ibid.*, pp. 37, 134) ⁽⁵⁾. Carnap définit pour ce langage un critère d'analyticité qui, selon les termes de Coffa (1987), se présente comme la "généralisation syntaxique" de la notion de déduction ("syntaxique" est à prendre au sens large, c'est-à-dire en un sens qui recouvre comme on va le voir l'approche qu'on qualifie depuis 1935 de "sémantique"). Est dite *analytique* toute formule qui est "conséquence" de la classe nulle des formules (une formule est contradictoire quand toute formule en est la conséquence). Ce qui fait de cette définition en termes de *conséquence* une notion plus générale que celle de *dérivation*, c'est que celle-ci est constituée par une série finie de formules, tandis qu'une "série de conséquence" est une série finie de classes non nécessairement finies de formules. Comme on le constate dans l'énoncé des règles de la "conséquence directe" (*S.L.*, § 14 p. 38), les règles dites de conséquence sont plus fortes que les règles gouvernant la dérivation : elles comprennent en particulier la règle- ω mettant en jeu la notion d'une classe infinie de formules. En effet, l'énoncé indécidable dans S construit par Gödel a la forme $(x) A(x)$ où $A(x)$ est effective et où $A(0), A(1)...$ sont vraies dans tous les modèles de S. Selon le théorème de complétude, $A(n)$ est donc déductible dans S pour tous les n, tandis que $(x) A(x)$ ne l'est pas. On dit alors que S est " ω -incomplet". Le travail de Gödel suggère ainsi que pour atteindre la complétude il faut ajouter au système

⁽⁴⁾ En revanche, les formules ouvertes de L I sont non-effectives (*L.S.*, § 15).

formel L I de nouveaux moyens de démonstration (et non seulement une nouvelle expression, c'est-à-dire l'énoncé indécidable lui-même) : une règle infinie qui transforme L I en un système semiformal que l'on espère complet. C'est là la fonction de la règle DC2, qui permet de dériver à partir de la suite infinie $F(0)$, $F(0')$, $F(0'')$, la formule "universelle" $F(x)$. En revanche, la règle d'inférence dite de "dérivabilité directe" suppose seulement la règle d'induction complète, laquelle permet de dériver "pas à pas" $F(x)$ de $F(0)$ et de $F(x) \Rightarrow F(x')$.

Cette généralisation du critère de dérivation rend tous les énoncés logiques de L I L-déterminés. Mais L I est un langage trop modeste pour que l'on puisse y formaliser les mathématiques classiques : les quantificateurs limités qui y interviennent imposent aux variables un domaine de variation borné par une expression numérique (contenant éventuellement à son tour de nouvelles variables) (L.S., § 6, p. 21). L II n'a pas ces limitations : il contient des quantificateurs illimités. Le critère correspondant d'analyticité doit donc être rendu applicable à un langage fondamentalement non effectif. Réfléchissant en 1932 au critère élargi d'analyticité, Carnap cherche donc à mettre sur pied un critère qui puisse s'appliquer à un système formalisé assez riche pour que puissent s'y exprimer les mathématiques classiques. L II contient, nous l'avons dit, en plus des quantificateurs limités de L I, des quantificateurs illimités. Les prédicats et fonctions y appartiennent à un type donné, les expressions numériques se voyant assigner le type de degré 0. L II remplit les conditions pour que puissent s'y appliquer les théorèmes d'incomplétude Gödel.

La formulation du concept d'analyticité dans Metalogik

Il n'est pas facile de reconstruire la première formulation du critère d'analyticité à laquelle répond la lettre de Gödel du 11 Septembre. Nous ne disposons pas ici d'une lettre exposant explicitement cette première version. Comme le suggèrent les lettres de Gödel du 11 Avril et du 11 Septembre 1932, c'est dans le manuscrit intitulé d'abord *Metalogik* puis

(⁵) Les formules contenant des variables libres équivalent implicitement dans L I à des formules universellement quantifiées (il n'y a plus toutefois équivalence entre la négation de la formule à variable libre et la négation de la formule correspondante quantifiée).

Semantik ⁽⁶⁾, et publié avec des corrections et des adjonctions sous le titre de *Die logische Syntax der Sprache*, qu'était contenue la première proposition de définition. Or cette version du manuscrit ne nous est parvenue. Grâce à ce qu'en dit Gödel et aussi en suivant la première partie du § 34c où Carnap paraît rapporter la progressive élaboration de sa définition, on peut cependant faire l'hypothèse qu'il s'agit d'une méthode réductive s'appuyant sur un traitement substitutionnel de la quantification, dont on trouve la préfiguration dans la démonstration du théorème 14.3 de L I.

La version définitive de la définition d'"analytique dans L II" telle qu'elle est exposée dans la *Syntaxe logique* (§ 34c) est donnée comme on le sait non de façon "explicite", mais de façon récursive : elle s'appuie sur les règles énoncées au § 34b permettant de réduire les formules du langage considéré en sorte qu'elles soient dites analytiques si toutes leurs instances le sont, c'est-à-dire se réduisent à des identités. Il faut donc tout d'abord transformer les phrases de L II en phrases équivalentes de moindre complexité syntaxique. Neuf règles devant être appliquées dans l'ordre de leur formulation, indiquées au § 34b, enjoignent respectivement d'éliminer tous les symboles définis, de simplifier les disjonctions et les conjonctions, les équations, d'éliminer les variables d'énoncés, l'opérateur d'individualité, les quantificateurs universels limités, et de construire toutes les formules ainsi transformées en forme normale prénexe. On peut penser que Carnap espérait qu'une fois réduites, les formules de ce langage pourraient donner lieu à une instanciation substitutionnelle des variables quantifiées permettant de faire apparaître les formules constitutives comme des identités (de la forme $0=0$) ou des contradictions, ce qui permettrait d'obtenir le critère recherché pour la validité ou la contravalidité logiques des formules bien formées de L II.

En quoi la première version — la version substitutionnelle — de la définition d'"analytique pour L II" est-elle, selon le terme de Gödel, "erronée" ? En exposant sa version finale dans la *Syntaxe logique*, Carnap

⁽⁶⁾ Voir la discussion terminologique dans *L.S.*, p. 9. Dans une lettre à Carnap du 21 Mars 1932, Behmann avait proposé le titre de *Semantik* au sens de "théorie de la représentation par signes" (*Lehre von der Darstellung durch Zeichen*). Dans sa réponse à Behmann du 17 Avril 1932, Carnap note que cette suggestion rejoint celle de Gödel, et rapporte que Neurath avait suggéré le terme de "Syntaxe". C'est finalement ce terme qui été retenu dans la publication de 1934.

donne au début du § 34c une raison qui nous semble rétrospectivement mériter commentaire. Il caractérise en effet le problème en disant que si la méthode de réduction-substitution est possible et adéquate dans le cas des expressions ayant des variables numériques, elle ne l'est pas toujours dans le cas des variables de prédicats ou de foncteurs : "un fait, remarquait-il qui a été souligné par Gödel". S'agit-il ici des conséquences des théorèmes d'incomplétude ? S'agit-il du *regressus* signalé par Gödel dans sa lettre ? Il faut ici distinguer deux difficultés bien différentes, l'une à laquelle Gödel fait explicitement référence dans sa lettre, l'autre qui est celle que rapporte Carnap au § 34c-d (cf. surtout p. 114), et qui est simplement pré-supposée par la lettre de Gödel.

La première difficulté concerne certains obstacles de fait qui s'opposent à la mise en œuvre de l'approche substitutionnelle à laquelle Carnap a recours dans son premier essai de définition. Dans sa lettre, Gödel montre que dans certains cas, ce processus conduit à un *regressus in infinitum* si l'on substitue au *definiendum* (une variable de prédicat) une constante de prédicat contenant de nouveau une variable liée de même type. Il est dans ce cas impossible d'obtenir la suite finie "descendante" qui est nécessaire pour que puisse s'appliquer la définition de l'analyticité. Mais cette difficulté paraît relativement secondaire, dans la mesure où l'on peut imaginer une modification des règles de construction du langage qui rendrait effective la décomposition des formules en forme réduite. On peut par exemple renforcer la théorie simple des types en direction d'une théorie ramifiée, ce qui garantit la réduction progressive des formules du langage. Mais on doit alors accepter un domaine stratifié de nombres réels, ce qui est inévitable si l'on renonce à l'axiome de réductibilité, comme on préfère en général le faire. A cet inconvénient, vient se surimposer un second problème qui conduit Gödel à écarter cette solution.

La seconde difficulté, qui n'est que pré-supposée dans la lettre de Gödel, concerne l'impossibilité *de principe* de définir dans une langue donnée non seulement tous les prédicats ou tous les foncteurs, mais aussi bien toutes les expressions numériques nécessaires à l'établissement de la validité des mathématiques classiques, du fait qu'ils excèdent toute capacité de représentation par un système formel *donné*. C'est à cette difficulté de principe, déjà mise en évidence par la méthode de la diagonale par Cantor à propos des nombres, puis étendue dans la démonstration des théorèmes d'incomplétude aux procédés de démonstration, que la *Syntaxe logique* fait allusion au § 34c : "Par suite des recherches de Gödel, écrit

Carnap, il est certain, par exemple, que pour tout système arithmétique, il y a des *propriétés numériques qui ne sont pas définissables*, ou, en d'autres termes, il y a des nombres réels indéfinissables".

Le procédé de définition auquel Gödel fait référence dans sa réponse est donc bien destiné à résoudre ce problème général, et non le problème particulier concernant l'effectualité de la réduction substitutionnelle de variables non numériques. Lorsqu'il écrit : "On ne peut, à mon avis, éviter cette erreur que si l'on admet comme domaine des variables de fonction non pas les prédicats d'un langage particulier, (Gödel veut surtout dire : "*définissables dans un langage particulier*"), mais tous les ensembles et relations en général", Gödel produit une ellipse, conformément à son style habituel : il saute du problème technique mineur de la réduction de certaines variables à l'indication du moyen permettant d'éviter en même temps que "cette erreur" l'impact autrement plus fort de l'indéfinissabilité de principe.

Le premier essai de définition d'"analytique dans L II" est ainsi abandonné par Carnap non pas seulement parce que la réduction est impossible dans un certain nombre de cas, mais parce qu'on ne peut pas obtenir, à partir d'une quantification substitutionnelle *stricto sensu* (c'est-à-dire sans ajouter toutes les constantes désirables permettant d'accroître les capacités expressives du langage), l'universalité forte qui est requise par le concept de validité de la mathématique classique. "Car de même que pour tout langage, il y a des propriétés numériques qui n'y sont pas définissables, de même il y a des propriétés syntaxiques qui ne sont pas définissables dans S. Il pourrait ainsi se produire que l'énoncé 'S1 est analytique dans II' soit vrai (analytique) dans le langage syntaxique S, mais faux (contradictoire) dans un langage syntaxique plus riche que S" (L.S., 114). Maintenant, est-il *légitime* de faire varier les prédicats sur un domaine non définissable dans L II? Là-dessus, divers éléments de jugement sont invoqués tant dans la lettre de Gödel du 11 Septembre que dans les lettres successives des 25 et 27 Septembre de Carnap.

Gödel écarte d'emblée, dans une note de sa lettre du 11 Septembre destinée à préciser le sens de l'expression "tous les ensembles et relations en général", l'interprétation "platonicienne" qui ferait appel à un domaine absolu d'interprétation. La référence que fait Gödel au platonisme est probablement à mettre en relation avec la mise en garde de Carnap contre la "mathématique théologique" dans une récente publication. Dans un article paru dans *Erkenntnis* en 1931, Carnap rejette en effet au nom de

ce qu'il appelle "la tendance constructive du logicisme" la solution offerte par Ramsey au problème des définitions imprédicatives. Celle-ci impliquait que l'on admît l'existence de la "totalité des propriétés" indépendamment de leur caractérisation par une définition.

"Une telle conception ne me semble pas très éloignée de la croyance dans un domaine platonicien d'idées existant en elles-mêmes, indépendamment de la question de savoir *si* des êtres humains peuvent les penser et *comment* ils y parviennent. Nous devons à mon sens nous en tenir à la thèse de Frege selon laquelle on ne doit en mathématique tenir pour existant que ce dont l'existence a été démontrée (et il voulait dire : démontrée en un nombre fini d'étapes)" (Carnap 1931, p. 39).

Si l'on se réfère aux textes ultérieurs où Gödel expose sa philosophie des mathématiques, et en particulier au manuscrit dans lequel il critique l'identification des mathématiques à la syntaxe logique (que nous analysons brièvement *in fine*), l'allusion contenue dans la note citée à un "point de vue platonicien" a toutes les apparences d'une dénégation. C'est en effet précisément la nécessité incontournable de faire référence à des entités qui ne sont pas désignées dans un langage donné lorsqu'il s'agit de démontrer des propriétés "syntaxiques" comme la consistance ou la validité qui constitue, dans la perspective du manuscrit sur la syntaxe logique, la meilleure preuve de l'existence en mathématiques de contenus irréductibles. Il faut donc croire que la présente note a pour fonction de rassurer Carnap sur la neutralité philosophique d'une technique qui, néanmoins, apparaîtra rétrospectivement à Gödel comme une justification du réalisme des objets mathématiques ⁽⁷⁾. La technique considérée consiste à choisir une quantification "objectuelle" et non "substitutionnelle pour définir l'analy-

⁽⁷⁾ Il est intéressant d'observer que Carnap reproduit l'argument rassurant de Gödel dans *L.S.*, p. 114, et que Gödel critique ultérieurement, dans l'article inédit destiné à l'ouvrage de Schilpp, cette même prise de position en l'attribuant à Carnap, en disant qu'elle substitue le "knowing how" au "knowing that" : "A l'objection selon laquelle les règles transfinites impliquent le platonisme, Carnap répond qu'on peut savoir utiliser les concepts transfinis (dans les inférences, les définitions, etc.) sans faire une quelconque supposition sur l'existence objective des entités abstraites concernées. Ceci est évidemment vrai... Néanmoins, avant de pouvoir les utiliser rationnellement dans la science, on doit leur assigner une existence au moins en quelque sens immanent (kantien)..." (p. 26, note 14).

ticité, ce qui, comme on va le voir, constitue un pas sur la voie d'une approche sémantique (au sens de Tarski) de la validité.

Ce décalage entre les moyens d'expression de la langue-objet et ceux de la métalangue qui énonce l'analyticité de la première est en fait un point que la méthode utilisée dans la démonstration du premier théorème d'incomplétude *permet d'anticiper* ⁽⁸⁾ (cf. sur ce point la remarque de Gödel dans sa lettre ultérieure du 28 Novembre 1932). C'est précisément ce qu'indique Carnap dans sa réponse : Cela ne fait pas problème parce que la définition d'"analytique dans le langage S" ne peut pas être donnée dans une sémantique formalisée dans S, mais ne peut l'être que dans une sémantique formalisée dans un langage plus étendue que S". Reste pourtant à trouver une définition d'analytique dans S qui 1) s'applique à toutes les propriétés possibles et non seulement à celles qui sont définissables dans la langue objet considérée et qui 2) puisse s'exprimer de manière "syntaxique" (sans impliquer par là qu'elle puisse se décider à tout coup d'une manière syntaxique au sens d'une règle ne faisant intervenir que des expressions finies).

Le critère d'analytique dans L II dans la lettre de Carnap du 25 Septembre 1932.

La seule indication que Gödel donne à Carnap dans sa lettre du 11 Septembre est donc assez mince : il faut outrepasser les données proprement syntaxiques si l'on veut obtenir une définition d'"analytique dans L II". Il fait allusion à la définition que lui-même se propose de présenter "dans la seconde partie de (son) travail". Notons en passant que cette seconde partie ne fut jamais publiée. Rosser (1939, note 1) attribue cette omission au mauvais état de santé de Gödel. De son côté, Hao Wang (1987, 280) indique que, en plus de la "raison officielle" donnée par Gödel en note de la publication de ses théorèmes dans Van Heijenoort (1967, 616, 68a) — la rapide acceptation de ses résultats rendant superflue une présentation plus générale et plus complète de la démonstration — Gödel hésita à consacrer beaucoup de temps à la rédaction des détails de la preuve qui

⁽⁸⁾ Cf. Gödel, (1931), p. 191, note 48a. *Collected Works*, vol. 1, p. 181.

ne présentait plus l'attrait de la nouveauté ⁽⁹⁾. On peut aussi conjecturer que la définition de l'analyticité publiée par Carnap, assortie de sa référence à Gödel, bientôt complétée par l'analyse tarskienne, avait pris de vitesse l'effort de Gödel vers une définition "sémantique" (au sens de Tarski) de "vrai".

Car Carnap s'oriente immédiatement vers ce que l'on peut juger rétrospectivement comme la "bonne" solution. Elle consiste *au fond*, sinon, comme on va le voir, littéralement, à abandonner le point de vue étroitement syntaxique, et à proposer une définition proprement sémantique de la validité. On trouve dans la lettre de Carnap à Gödel du 25 Septembre 1932 les principaux éléments de la solution qu'expose la version définitive qu'on peut lire au paragraphe 34c de la *Syntaxe logique*.

La définition d'analytique dans L II présentée dans la *S.L.* fait appel à deux concepts solidaires, ceux de *Bewertung* – valuation – et d'*Auswertung* – évaluation. Cette procédure en deux étapes s'applique aux formules "réduites" du langage considéré. Une valuation (désignée syntaxiquement par B) est un ensemble d'expressions représentant la "valeur" que peut prendre une certaine expression de la langue objet une fois que l'on instancie chacune de ses variables. Par exemple, une valuation de type 0 est un nombre; la valuation d'un prédicat de type 1 à un argument est un ensemble de nombres.

L'évaluation intervient une fois que l'ensemble des valuations de chaque variable contenue dans la phrase considérée S1 sont obtenues: elle consiste à remplacer dans S1 toute sous-formule (que nous dirions intuitivement) "vraie" dans une valuation par $0=0$, et toute sous-formule fautive par $0 \neq 0$, c'est-à-dire des sous-formules qui sont respectivement analytiques et contradictoires.

Nous disposons donc en ce point d'un critère récursif d'analyticité reposant sur le caractère analytique ou contradictoire des formules $0=0$ et $0 \neq 0$. *Une formule S1 est analytique si et seulement si toute formule obtenue à partir de S1 pour une évaluation effectuée sur la base de toute valua-*

⁽⁹⁾ Ajoutons que l'esquisse gödelienne de la démonstration du second théorème d'incomplétude contient une légère erreur qui n'a été rectifiée que dans la démonstration détaillée qu'en donne Hilbert-Bernays (1939, § 5.2); cette erreur est à l'origine du mythe selon lequel la démonstration de la non-contradiction d'une théorie incomplète (que donne le premier théorème) ne pourrait jamais être donnée par des moyens *finis*. Schoenfield (1967, 51) a indiqué une théorie incomplète pour laquelle cette preuve pouvait être donnée par des moyens finis. Cf. Lorenzen (1962, 132) et Stegmüller (1984, 342 sq.).

tion des variables individuelles, de fonction et de prédicat intervenant dans S_I est analytique.

Revenons à la lettre du 25 Septembre 1932. Carnap y évoque pour la première fois les concepts de valuation et d'évaluation, en définissant toutefois la valuation de manière à y inclure en partie ce qu'il appellera ultérieurement l'évaluation. Il décrit en effet la valuation d'un prédicat (de type 1) comme une règle qui fait correspondre à chaque expression numérique (ou n-uple d'expressions numériques) soit " $0=0$ ", soit " $0 \neq 0$ ". S'il s'agit d'un foncteur (de type 1), la règle de valuation fait correspondre à un n-uple d'expressions numériques une expression numérique et une seule. (La notion de "règle" ne doit pas ici faire illusion : les règles dont il s'agit ne sont pas astreintes à faire l'objet d'une formulation effective dans la langue-objet). L'évaluation est alors restreinte au moment où l'on applique la règle précédente, ce qui implique d'ailleurs éventuellement un nouveau recours à des règles de réduction (*L.S.*, p. 110). Ainsi la solution ébauchée dans la lettre contient tous les ingrédients de la solution définitive : elle consiste à introduire le concept d'un ensemble de valeurs possibles (numériques, fonctionnelles, prédicatives) pour les variables de tout type sans limiter ces valeurs à celles d'entre elles qui sont définissables dans *L II*, et à tirer de l'évaluation d'une formule un critère d'analyticité.

Carnap n'est pourtant pas satisfait de son premier essai de définition sur deux points. D'une part, il ne voit pas encore dans quelle langue formelle exprimer l'ensemble des valuations — représentables ou non dans la langue-objet — d'une expression donnée : "le fait de se servir d'un concept pour lequel il n'existe pas de langage dans lequel on puisse le définir paraît tout de même assez discutable". D'autre part, il ne sait pas comment définir l'imbrication d'une valuation quand il s'agit de prédicats d'ordre supérieur. Mais ces problèmes vont être rapidement vaincus. Deux jours plus tard, Carnap écrit en hâte à Gödel pour lui épargner des "efforts inutiles".

La notion définitive d'"analyticité dans $L II$ "

La solution finale que Carnap annonce triomphalement avoir enfin obtenue peut sembler décevante au regard de ce que la lettre précédente avait déjà réussi à établir. Elle consiste simplement à reconnaître le caractère "sémantique" (c'est-à-dire, dans les termes finalement retenus pour

la publication, authentiquement "syntaxique", mais dont l'inspiration en fin de compte sémantique nous paraît rétrospectivement indubitable) des notions de valuation et d'évaluation. On peut, en d'autres termes, exprimer formellement l'ensemble des valuations afférentes à une expression de la langue-objet dans une langue syntaxique formalisée à condition d'avoir à sa disposition "les moyens adéquats pour le faire", comme l'écrira Carnap dans la *Syntaxe logique*, c'est-à-dire à la condition de disposer de variables de prédicat et de foncteur qui ne sont pas présentes dans le langage objet L II. L'expression "toutes les propriétés syntaxiques" sera représentée en langage syntaxique par un symbole gothique de prédicat, recouvrant "toutes les propriétés syntaxiques" sera représentée en langage syntaxique par un symbole gothique de prédicat, recouvrant "toutes les propriétés syntaxiques quelles qu'elles soient" et non seulement "toutes les propriétés syntaxiques définissables dans la langue syntaxique" (cf. *L.S.* p. 114). C'est à la même idée que Gödel fait référence dans sa lettre du 28 Novembre 1932, lorsqu'il évoque la nécessité de faire appel à des variables de type ω , parcourant tous les types finis. On la trouve déjà évoquée dans la note 48a de son travail de 1931.

À la vérité, l'effort que fait Carnap pour justifier le caractère parfaitement "syntaxique" de cette solution n'emporte pas la conviction ⁽¹⁰⁾. Carnap se donne beaucoup de peine pour n'avoir pas à utiliser le terme de "vrai", en exprimant le fait qu'un argument numérique donné rend vraie une phrase pour une certaine interprétation (ou valuation) d'une variable de prédicat, au moyen du remplacement de la sous-formule considérée par $0=0$. Cette sous-formule est bien, Carnap le reconnaît, "d'une certaine façon, vraie sur la base de la valuation considérée" (*S.L.*, § 34c, p. 107), mais il se refuse à retenir le terme de "vrai" pour désigner l'"analytique". Déjà la lettre à Gödel du 25 Septembre 1932 donnait les raisons de ce refus: "Le terme 'vrai' me semble très peu adéquat: son usage ne cadrerait pas avec l'usage courant. Car d'après cet usage, la phrase 'Vienne a tant d'habitants' est vraie, tandis que la définition que vous proposez ne s'y applique pas". Ce que Carnap objecte ici, c'est que le prédicat "vrai" n'ait pas d'application *générale*: une proposition empiriquement vraie ne peut être dite vraie conformément à une règle "syntaxique".

⁽¹⁰⁾ On trouvera dans l'article déjà cité de Coffa (1987) un examen détaillé de ce qui sépare la syntaxe de Carnap de 1934 de la sémantique de Tarski de 1933. L'article de Coffa, paru alors que le présent travail était en cours, présente un extrait d'une des lettres que nous publions.

Il est assez étonnant de constater que Carnap reprend le même argument pour écarter une théorie de la vérité très proche de celle que Tarski allait bientôt exposer. Il expose les grandes lignes de cette théorie au paragraphe 60b de la *Syntaxe* afin de montrer comment on peut résoudre le paradoxe du menteur au moyen du prédicat de "vrai dans S1" formulable non dans S1, mais dans un autre langage S2. Mais il rejette immédiatement cette théorie parce qu'"une théorie de ce type formulée à la manière d'une syntaxe ne serait pas une véritable syntaxe. Car la vérité et la fausseté ne sont pas des propriétés proprement syntaxiques; on ne peut en général pas savoir si une phrase est vraie ou fausse d'après sa forme, c'est-à-dire, d'après le type et l'ordre de succession de ses symboles" (L.S., § 60b, p. 216). Selon les termes d'Alberto Coffa, Carnap couche ses propres résultats sur un véritable "lit de Procuste" nominaliste, s'interdisant ainsi de saisir le lien potentiel de sa notion d'évaluation avec la notion plus générale de réalisabilité dans un modèle que Tarski allait présenter quelques mois seulement après la publication de la *Syntaxe logique*.

* *
*

En fournissant une définition purement "syntaxique" du concept d'analyticité (ou, dans les termes de la lettre du 27 Septembre 1932, "sémantique"), Carnap peut estimer qu'il est parvenu à fournir un critère de validité qui s'applique à tous les énoncés mathématiques vrais, y compris les énoncés vrais indécidables, et, de manière plus générale, qu'il a réussi à justifier formellement l'idée que les propositions logico-mathématiques sont sans contenu, étant dans leur ensemble des propositions L-vraies.

Tout en collaborant dans les lettres ci-jointes à la construction du concept de validité ainsi élargi, Gödel perçoit tout autrement que Carnap l'importance philosophique de l'élaboration de ce critère. Il écrit par exemple dans la lettre du 28 Novembre que ce n'est pas l'explication du concept d'"analytique" qui constitue dans son propre travail la motivation d'une définition d'"analytique", "car on y applique les concepts tout aussi problématiques d'ensemble quelconque' etc".

Pour prendre la pleine mesure du désaccord entre les deux hommes, lequel ne transparaît que fugitivement dans ces lettres — par exemple encore dans la note ambiguë du 11 Septembre 1932 —, il faut lire le manuscrit d'un article que Gödel avait projeté de publier dans l'ouvrage édité par Schilpp sur la Philosophie de Rudolf Carnap. Après avoir successi-

vement rédigé *six* versions de cet article, (intitulé dans la version VI "Is mathematics syntax of language?"), Gödel renonce finalement à le publier, en expliquant à Schilpp que, quoiqu'il dispose d'arguments "puissants et frappants" pour défendre sa conception des mathématiques, il n'est pas parvenu à achever un travail qui touche à l'un des problèmes philosophiques les plus fondamentaux et les plus épineux, à savoir la question de la "réalité objective des concepts et de leur relations".

Il vaut néanmoins la peine de consulter ce manuscrit, dont la troisième version est la plus explicite et présente une forme cohérente en dépit de nombreux amendements. Gödel y reconnaît d'emblée que, quel que soit l'enjeu *philosophique* que l'on accorde au projet consistant à identifier les mathématiques à un système de conventions syntaxiques réglant l'usage des symboles, et à définir la validité des théorèmes mathématiques comme la propriété d'être la conséquence de ce système de conventions, sa mise en œuvre a indéniablement un intérêt *technique* et "contribue beaucoup à clarifier quelques concepts fondamentaux". Mais, si on les examine de plus près, ces résultats techniques devraient conduire, suivant Gödel, à tirer une morale toute différente de celle qu'en tire Carnap, particulièrement en ce qui concerne la réduction des mathématiques à la syntaxe et en ce qui concerne la question du contenu (ou de l'absence de contenu) des mathématiques.

La principale confusion qui, du point de vue de Gödel, grève le projet logiciste réside dans une attention insuffisante aux exigences qui s'attachent à la perspective syntaxique. D'une part, des exigences concernant le caractère finitaire du langage utilisé : ses énoncés doivent être composés d'un nombre fini de symboles; les règles syntaxiques doivent elles aussi être finitistes au sens où "elles ne doivent pas contenir d'expressions du type 's'il existe un ensemble infini d'expressions ayant une certaine propriété', ni même 'si toutes les expressions d'un certain ensemble infini ont une certaine propriété'. Car ces expressions n'ont de sens que si l'on s'appuie sur une certaine intuition des objets mathématiques, comme la totalité de toutes les expressions possibles" (Manuscrit 40436, p. 4). Tout recours à des suites infinies de symboles implique du point de vue de Gödel un appel à des objets "purements mathématiques", par opposition au domaine strictement fini des suites de symboles relevant de la syntaxe. C'est dire, en d'autres termes, que Gödel restreint explicitement, contre l'intention de Carnap, le domaine de la syntaxe à la manipulation de symboles physiques. Il définit le terme de "langage" comme "symbolisme productible

dans le monde empirique" (*Ibid.*, 3). Contrairement à ce que soutient Gödel, Carnap vise à exhiber non pas les propriétés syntaxiques physiques, mais les propriétés syntaxiques "pures" des systèmes symboliques : la syntaxe se présente comme la science des structures d'organisation d'éléments quelconques (*L.S.*, 7).

L'exigence en vertu de laquelle la syntaxe doit rester finitiste se trouve transgressée dans la *Syntaxe logique* du fait que Carnap y fait appel à des "C-concepts". En dépit de leur mode d'introduction "syntaxique", Gödel nie qu'il s'agisse là de concepts syntaxiques admissibles : ils ne peuvent être compris ou utilisés sans intuition mathématique ou sans que l'on admette (sans preuve *a priori*) certaines de leurs propriétés. Dès lors, on entre dans une circularité vicieuse : "au lieu de justifier les axiomes mathématiques en les réduisant à des règles syntaxiques, ces axiomes (ou au moins certains d'entre eux) sont nécessaires pour justifier les règles syntaxiques (leur consistance)" (*ibid.*, p. 8a).

Une seconde exigence de la réduction syntaxique consiste à éliminer tout recours à des faits extra-linguistiques dans la preuve de la L-validité des énoncés mathématiques. Or un tel énoncé de fait, objecte Gödel, doit finalement intervenir pour garantir l'*applicabilité* des règles syntaxiques. Sur quoi en effet peut-on tabler pour s'assurer de la consistance des règles syntaxiques ? On peut seulement dire qu'aucune contradiction ne s'est encore présentée : il s'agit là d'un fait empiriquement vérifiable. Cependant, si l'on fait fond sur cette "consistance empirique", on doit admettre que les conventions mathématiques ne sont pas dépourvues de tout contenu factuel. Une preuve de consistance est nécessaire pour démontrer qu'une convention "n'implique pas de proposition réfutable par l'observation" (*ibid.*, p. 13). Mais si on ne peut démontrer cette consistance, la convention change de nature, et devient une assomption.

Ainsi Gödel tire-t-il de ses théorèmes d'incomplétude un enseignement autrement plus pessimiste que Carnap : si l'on considère que la syntaxe logique met en jeu un "raisonnement combinatoire finitaire", étant donné qu'on a de bonnes raisons de supposer qu'il est possible d'exprimer ce type de raisonnement dans le formalisme de la théorie classique des nombres (Gödel cite ici les travaux de Gentzen qui, dans sa démonstration de la consistance de cette théorie, indique un nombre ordinal limite au dessous duquel les démonstrations finies sont en un certain sens représentables en tant qu'inductions transfinies), il suit du second théorème qu'"une démonstration de consistance pour un système contenant la théo-

rie récursive primitive des nombres ne peut jamais être exprimée dans ce système, et par conséquent qu'aucune démonstration de consistance ne peut être donnée à l'aide d'un raisonnement finitaire ni pour la théorie classique des nombres, ni *a fortiori* pour un système plus étendu" (*ibid.*, 9) Gödel s'écarte sur deux points de Carnap quant à la signification à donner à ces résultats. D'une part, il voit dans le fait que les axiomes utilisés dans la preuve de consistance doivent être plus forts que ceux de la théorie dont la consistance est à établir la marque de la *résurgence inéliminable du contenu mathématique* (en tant qu'il reste toujours un résidu irréductible à l'interprétation syntaxique). Carnap s'acharne en revanche à dissoudre ce résidu en renforçant comme on l'a vu les concepts inférentiels utilisés. Le fait que la propriété de L-validité puisse s'appliquer à des propositions contenant ces concepts — ainsi d'ailleurs qu'à l'énoncé de Gödel — lui permet d'estimer que ces concepts sont eux-mêmes sans contenu, et qu'aucune hypothèse ontologique — ni "fait extra-linguistique" — ne vient peser sur la syntaxe.

D'autre part, Gödel estime que les limitations impliquées par les théorèmes d'incomplétude indiquent la nécessité incontournable du recours à l'intuition mathématique; la seule raison que nous ayons de supposer consistantes les mathématiques réside en dernière analyse, aux yeux de Gödel, dans leur objectivité, et toute théorie qui prétend se passer de cette intuition soit ne peut rendre compte que d'une infime partie des mathématiques, soit intègre en contrebande les concepts supplémentaires (non-finitaires) requis après les avoir maquillés en concepts syntaxiques.

Que la consistance soit simplement présumée au niveau de l'énoncé des conventions syntaxiques ne revêt pas aux yeux de Carnap la même menace de circularité: l'étagement des langages et le caractère rétro-actif de la validation logique sont à ses yeux des caractéristiques nécessaires de tout système formel qui ne menacent nullement l'objectivité des mathématiques.

Quant au fond, le désaccord entre Carnap et Gödel tourne autour de deux thèses cruciales. Il est faux du point de vue de Gödel que les mathématiques puissent être interprétées comme la syntaxe du langage, sauf à prendre le terme d'"interprétation" en un sens vague ou général, principalement en raison du caractère fini de l'une et infini de l'autre. Mais si l'on prend suffisamment au sérieux le projet "syntaxique", on doit finalement, de l'avis de Gödel, reconnaître qu'"il existe bel et bien des objets et des faits mathématiques qui sont aussi objectifs (c'est-à-dire indépen-

dants de nos conventions et de nos constructions) que les objets et les faits physiques ou psychologiques, quoiqu'il s'agisse bien entendu d'objets et de faits d'une nature entièrement différente" (*ibid.*, 2).

On peut conjecturer que la difficulté qu'a représentée pour Gödel la réfutation du point de vue logiciste réside dans l'ampleur des thèses qui sont, de part et d'autre, présupposées dans l'évaluation de l'impact des théorèmes d'incomplétude. Il ne fait pas de doute qu'on ne peut "sérieusement" reprocher à Carnap de n'avoir pas assez "prix au sérieux" le projet syntaxique. Où réside alors le point de divergence radical à partir duquel ce que l'un apprécie comme une solution se réduit pour l'autre à une reconduction de la difficulté? On peut faire l'hypothèse que la divergence est radicale, et touche la façon même dont l'un et l'autre concevaient la *nature* de l'entreprise fondationnelle, et les conditions de son succès — conditions elles-mêmes profondément modifiées par les travaux de 1931.

* *
*

Correspondance de Carnap et Gödel
11 Avril 1932 — 28 Novembre 1932
version allemande et traduction française

Wien, 11/.IV.1932

Lieber Herr Carnap!

Anbei sende ich Ihnen das Separatum und Manuskript von Chwistek mit bestem Dank zurück. Eine Erläuterung über das letzere kann ich leider nicht schreiben, denn das meiste darin (und gerade das wichtigste z.B. Typenlehre u. reelle Zahlen) ist in so vager Form behandelt, daß man ohne Kenntnis der Originalarbeiten daraus nichts entnehmen kann. Das einzige was etwas ausführlicher dargestellt ist, nämlich die "elementare" Semantik, finde ich ganz verständlich. Die Symbole *, $\subset$ und . muß man,

* Dies involviert nicht etwa einen platonistischen Standpunkt, denn ich behaupte, daß sich diese Df. für "analyt." nur innerhalb einer bestimmten Sprache, in der man die Begriffe "Menge" u. "Rel." schon hat, durchführen läßt.

glaube ich, als für sich allein sinnlose Teilzeichen auffassen, welche erst in gewissen Verbindungen eine Bedeutung bekommen, ebenso wie etwa Indices an Variablen oder der i-Punkt der gewöhnlichen Schrift. Ich würde es für sehr wünschenswert halten, wenn Chwistek auch den weiteren Ausbau seines formalen Systems für die "Erkenntnis" in analoger Weise skizzieren würde, wie die elementare Semantik, womöglich mit erläuternden Beispielen, damit die Sache doch irgendwo in genießbarer Form steht.

Ihr Manuskript über Metalogik habe ich an Kaufmann geschickt. Falls der II. Teil schon fertiggestellt ist, wäre ich Ihnen für dessen Zusendung sehr dankbar.

Mit herzlichen Grüßen
Ihr Kurt Gödel

Vienne, 11/IV.1932

Cher Monsieur,

Je vous renvoie ci-joint le tiré à part et le manuscrit de Chwistek avec tous mes remerciements. Je ne peux malheureusement pas vous offrir d'explications à propos du manuscrit, du fait que presque tout – et en particulier le plus important, par exemple la théorie des types et les nombres réels – y est traité de façon *si vague* qu'on ne peut rien en faire sans connaître le travail initial. La seule chose qui soit présentée de façon quelque peu développée, c'est-à-dire la sémantique "élémentaire", me paraît assez clair. Les symboles $*$, $\subset$ et $\cdot$ doivent à mon avis être en tant que tels compris comme des signes incomplets (*Teilzeichen*) qui ne reçoivent de dénotation qu'en liaison avec d'autres, exactement de même que par exemple des indices de variables ou le point sur le *i* de l'écriture ordinaire. Il serait très souhaitable à mon sens que Chwistek esquisse pour *Erkenntnis* la suite du développement ultérieur de son *système formel* comme il l'a fait pour la sémantique élémentaire, si possible avec des exemples explicatifs, afin que la chose soit mise quelque part sous une forme digeste.

J'ai envoyé votre manuscrit sur la *Métalogique* à Kaufmann. Au cas où la seconde partie serait achevée, je vous serais reconnaissant de me l'envoyer.

Avec mes cordiales salutations
Votre Kurt Gödel

Wien 11./IX 1932

Lieber Herr Carnap!

Besten Dank für Ihre Karte aus Burgstein. Ich war diesen Sommer nur für kurze Zeit fort (eine Woche am Semmering). Das M.S. "Semantik" habe ich Ende August an Behmann geschickt. Leider bin ich nicht dazu gekommen, es bis in alle Details zu lesen u. muß daher in meinen Bemerkungen auf die Hauptpunkte beschränken.

Zunächst glaube ich, daß die Def. von "analytisch" für die erweiterte Sprache u. daher auch der W-Beweis ⁽¹⁾ fehlerhaft sind. Sie geben Regeln an, durch welche die Frage, ob eine Formel analytisch ist, zurückgeführt wird auf dieselbe Frage für andere Formeln. Dadurch würde ein Begriff "analyt." nur dann definiert sein, wenn dieses Verfahren schließlich immer zu Formeln führen würde, von denen anderweitig feststeht, ob sie analyt. sind (z.B. $0=0$). Dies ist aber, wie mir scheint, nicht immer der Fall. Denn nehmen wir z.B. die Formel (F) $F(0) \vee \neg F(0)$; um festzustellen, ob sie analyt. ist, muß man dies für alle Formeln der Gestalt $P(0) \vee \neg P(0)$ tun. Zu diesem Zweck muß man jedes konstante Prädikat P durch sein Definiens ersetzen; in diesem können aber wieder gebundene Prädik.-Variable vorkommen u.s.w., so daß man auf einen regressus in inf. kommt. Am deutlichsten wird dies dadurch, daß unter Umständen dieselbe Formel immer wiederkehren kann. Setzt man z.B. in der Formel (F) $F(0) \vee 0=0$ für F das konst. Präd (F) $F(x)$ ein und bringt < sie > auf die Normalform, so erhält man wieder die ursprüngliche Formel.

⁽¹⁾ NdT.: "W-démonstration" veut dire "Démonstration de non-contradiction". Pour le lien entre le concept d'analyticité et la démonstration de non-contradiction de L II, cf. L.S. § 34 i.

Dieser Fehler läßt sich m.E. nur dadurch vermeiden, daß man als Laufbereich der Funktionsvariablen nicht die Präd. einer bestimmten Sprache, sondern alle Mengen u. Relationen überhaupt ansieht.* Ich werde auf Grund dieses Gedankens im II. Teil meiner Arbeit eine Df. für "wahr"⁽¹²⁾ geben u. bin der Meinung, daß sich die Sache anders nicht machen läßt u. daß man den höheren Funktionenkalkül nicht semantisch auffassen kann. ⁽¹³⁾ D.h. man kann natürlich auf semantischer Basis einen höheren Funkt.-K. aufbauen, es sind dann aber gerade die Gesetze, welche man für die klass. Theorie der reellen Zahlen braucht, nicht erfüllt, weil man notwendig zur verzweigten Typentheorie (ohne Red. Ax.) geführt wird.

Einen Einwand habe ich auch gegen die deskriptive Nachbildung des Unentscheid.-Beweises p. 308 ff. Die Zahl e und die Formel G_6 scheinen mir zirkelhaft definiert zu sein. Denn e ist definiert als "Reihenanzahl der Menge der Atomformeln, welche aussagen, daß an den Stellen a bis $a+16$ die Formel G_6 steht". (p. 309). In der Df. von e kommt also G_6 vor, während umgekehrt in der Df. von G_6 e vorkommt. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß eine Zahl e und eine Formel G_6 mit den durch die beiden Df. ausgesprochenen Eigenschaften nicht existieren kann. Aber ihre Existenz müßte eigens bewiesen werden, wozu man wahrscheinlich wieder irgend eine Art Diagonalschluß brauchen wird.

Nicht ganz klar war mir, wozu Sie 2 Arten von Funktionsvariablen (a^n u. p^n) brauchen. Man muß doch wohl mit einer auskommen können.

Ich möchte jetzt noch eine Frage anschließen. Ist Ihnen vielleicht bekannt, ob Frege außer dem Nachwort zu den "Grundgesetzen" noch etwas über die Antinomien publiziert hat? Soviel ich weiß, hat er doch das Jahr 1903 ziemlich lange überlebt, u. es wäre doch merkwürdig, wenn er darauf nicht mehr zurückgekommen wäre. Sind Ihnen überhaupt Publikationen nach dem Erscheinen der Grundgesetze bekannt?

Haben Sie schon Zermelos unsinnige Kritik an meiner Arbeit im letz-

⁽¹²⁾ NdT. La deuxième partie de Gödel, 1931, n'est jamais parue (Cf. notre introduction).

⁽¹³⁾ NdT. Gödel utilise ici le mot de "sémantique" au sens où l'on emploie aujourd'hui le terme "syntaxique". Cf. note 6.

ten Bd. des Jahresberichtes 2. Abt. p. 87 gelesen? ⁽¹⁴⁾

Es hat mir sehr leid getan, daß Ihre Sommerreise sie nicht über Wien geführt hat. Hoffentlich kommen sie nächstens doch wieder einmal her.

Mit den besten Grüßen
Ihr ergebener Kurt Gödel

Vienne, 11/IX.1932

Cher Monsieur,

Je vous remercie de votre carte de Burgstein. Je ne suis parti cet été que pour une brève période (une semaine au col de Semmering). J'ai envoyé à la fin Août le manuscrit "Semantik" à Behmann. Je n'ai malheureusement pas eu le temps de le lire dans le détail, et dois donc me limiter dans mes remarques aux points principaux.

⁽¹⁴⁾ NdT. Cf. Zermelo, 1932, p. 87. Il s'agit d'un rapport de Zermelo sur la conférence de Gödel "Über die Existenz unentscheidbarer arithmetischer Sätze in den formalen Systemen der Mathematik" et de sa propre conférence "Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen" présentées l'une et l'autre l'après-midi du 15 Septembre 1931 lors de l'assemblée annuelle de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung à Bad Elster. Le rapport de Zermelo a été précédé par un échange de lettres entre les deux savants (cf. Grattan Guinness, 1979). La première lettre de Zermelo, récemment retrouvée et publiée par Dawson (cf. Dawson 1985) a été recopiée par Carnap, figure dans les Archives Rudolf Carnap. Il vaut la peine de remarquer que Carnap corrige à cette occasion une erreur d'écriture de Zermelo maintenue dans Dawson (1985): $A^* = R(q^*; q^*)$ doit être lu: $A^* = R(q^*); q^*$)

La "critique insensée de Zermelo" (pour une discussion, cf. Grattan-Guinness, 1979 et Moore, 1980; pp. 124-130) concerne la question de l'indécidabilité relative. Sans avoir vraiment développé sa nouvelle logique infinie, Zermelo affirme qu'il n'existe pas de propositions "objectivement indécidables" — dans son système, toutes les propositions semblent être décidables — que Gödel aurait prétendu prouver le contraire — affirmation sur laquelle il paraît revenir quelques lignes plus loin — et qu'enfin le théorème d'incomplétude de Gödel a pour seul intérêt de manifester l'insuffisance d'une conception finitiste des schèmes de démonstration. Il est difficile de savoir si le ton polémique du rapport de Zermelo est suscité par une mauvaise compréhension des intentions de Gödel ou s'il exprime un désaccord de fond sur les idées de celui-ci. Ce n'est qu'en 1946 que Gödel propose que des recherches soient consacrées aux langages infinis (cf. Gödel 1946, pp. 85-6). Il suggérera par la suite (cf. Gödel 1931, p. 195, Note added 28 August 1963, note 70) de ne pas étendre le terme de "système formel" aux systèmes utilisant un langage infini.

Je crois tout d'abord que la définition d'"analytique" pour la langue élargie ainsi par conséquent que celle de la W-démonstration ⁽¹¹⁾ sont erronées. Vous indiquez des règles par lesquelles la question de savoir si une formule est analytique se réduit à la même question concernant d'autres formules. De ce fait le concept d'"analytique" n'est défini que si ce procédé reconduit toujours à des formules dont il est par ailleurs établi qu'elles sont analytiques (par exemple $0=0$). Mais ceci, me semble-t-il, n'est pas toujours le cas. Car prenons par exemple la formule (F) $F(0) \vee \neg F(0)$; afin de déterminer si elle est analytique, il faut le déterminer pour toutes les formules de la forme $P(0) \vee \neg P(0)$. A cette fin, il faut remplacer chaque constante de prédicat P par sa définition; mais dans celle-ci peuvent figurer de nouveau des variables de prédicats liées et ainsi de suite, de sorte que l'on tombe dans un *regressus in infinitum*. Cela devient particulièrement manifeste par le fait que, dans certaines circonstances, la même formule peut revenir sans arrêt. Si par exemple, dans la formule (F) $\cdot (F(0) \vee 0=0)$, on prend pour F la constante de prédicat (F) $F(x)$ et si on développe la forme normale, on obtient toujours de nouveau la formule de départ. On ne peut à mon avis éviter cette erreur que si l'on admet comme domaine des variables de fonction non pas les prédicats d'un langage particulier, mais tous les ensembles et relations *en général**. C'est en me fondant sur cette idée que je proposerai une définition de "vrai" dans la seconde partie de mon travail; ⁽¹²⁾ je crois qu'on ne peut pas faire autrement et que le calcul des fonctions d'ordre supérieur ne peut *pas* être conçu de manière sémantique. ⁽¹³⁾ En d'autres termes, on peut naturellement construire un calcul des fonctions d'ordre supérieur sur une base sémantique, mais les lois dont on a besoin pour la théorie classique des nombres réels ne sont dans ce cas pas satisfaites parce qu'on sera nécessairement ramené à la théorie des types ramifiés (sans axiome de réductibilité).

J'ai aussi une objection à l'encontre de la transposition descriptive de la preuve d'indécidabilité p. 308 sqq. Le nombre e et la formule G_6 me semblent être définis circulairement. Car e est défini comme "le nombre de série de l'ensemble des formules atomiques qui énoncent que la formule G_6 va des places a à $a+16$ " (p. 309). Ainsi G_6 intervient dans la

* Ceci ne met pas en jeu quelque chose comme un point de vue platonicien, car je dis que cette définition d'"analytique" ne peut être construite qu'à l'intérieur d'une langue dans laquelle on dispose déjà des concepts d'"ensemble" et de "relation".

définition de e , tandis que réciproquement e intervient dans la définition de G_6 . Cela ne veut naturellement pas dire qu'il ne peut exister un nombre e et une formule G_6 ayant les propriétés énoncées par les deux définitions. Mais il faudrait démontrer spécialement leur existence, ce qui nécessitera probablement de nouveau une forme de l'argument diagonal.

Je n'ai pas bien compris pourquoi vous utilisez deux sortes de variables de fonctions (a^n et p^n). Une seule doit pouvoir suffire.

J'aimerais encore vous poser une question. Sauriez-vous si Frege a publié en dehors de l'Appendice aux *Grundgesetze* d'autres écrits concernant les antinomies? Il a pourtant vécu encore de longues années, autant que je sache, après 1903; il serait étonnant qu'il n'y soit plus revenu par la suite. De façon générale, connaissez-vous des publications postérieures à la parution des *Grundgesetze*?

Avez-vous déjà lu la critique insensée qu'a publiée Zermelo de mon travail dans le dernier numéro du *Jahresbericht*, 2ème partie, p. 87? ⁽¹⁴⁾

J'ai beaucoup regretté que votre voyage d'été ne vous ait pas fait passer par Vienne. Espérons que vous y reviendrez bientôt.

Avec mes meilleures salutations,
Votre dévoué Kurt Gödel

Prag, den 25. Sept. 1932

Lieber Herr Gödel!

Haben Sie besten Dank für Ihren Brief. Ich bin Ihnen sehr dankbar, dass Sie mich auf die Fehlerhaftigkeit der Def. für "analytisch" aufmerksam gemacht haben. Ich habe inzwischen versucht, eine bessere Def. aufzustellen, etwa in der Richtung Ihrer Andeutungen (falls ich diese richtig verstanden habe). Aber da treten gewisse Schwierigkeiten auf, die ich noch nicht überwinden kann. Jedenfalls sehe ich ein, dass man nicht zu den Formeln der klass. Math. über reelle Zahlen gelangt, wenn man den All-operator mit Prädikatsvariable(n) (od. Funktorvar.) nur auf die in einem bestimmten begrenzten System definierbaren Prädikate bezieht. Sie sagen: man muss ihn auf "alle Mengen" beziehen; aber was heisst das: Ich

habe so versucht: unter einer Prädikatsbewertung verstehe ich eine Regel, die jedem Zahlenausdruck (z.B. " $0''''$ ") bzw. jedem n-tupel von solchen entweder " $0=0$ " oder " $0\neq 0$ " zuordnet; eine Funktorbewertung ist eine Regel, die jedem n-tupel von Zahlausdr. einen Zahlausdr. zuordnet. Mit Hilfe dieses Begriffs wird "Auswertung" definiert: in der betr. Formel wird anstelle von " $F(\dots)$ " die zugeordnete Formel gesetzt und anstelle von " $f(\dots)$ " der zugeordnete Ausdruck. " $\langle F \rangle(\dots)$ " ist analytisch, wenn " $\dots$ " in bezug auf jede Bewertung für F analytisch ist. Im Ganzen wird die Def. ziemlich kompliziert, lässt sich aber machen. Nun aber das Bedenken. Will man wirklich das Erstrebte mit der Def. erreichen, so darf man für die Regel, die ja in der Sprache der Semantik formuliert werden muss, nicht eine begrenzte Sprache der Sem. nehmen, sondern: die Regel darf mit beliebigen semantischen Begriffen gebildet werden. (Denn sonst bleiben ja wieder gewisse Zahlmengen draussen, die man zwar plausibel machen, aber nicht im System erfassen kann). Aber ist das nicht bedenklich? Es scheint mir nicht bedenklich, wenn die Def. für "analytisch in der Sprache S " nicht definiert werden kann in einer Sem., die in S transformiert ist, sondern nur in einer Sem., die in einer weiteren Sprache S_2 formalisiert ist. Aber mit einem Begriff zu operieren, für den es überhaupt keine Sprache gibt, in der er definiert werden kann, ist doch wohl ziemlich bedenklich.

Aber vielleicht sehen Sie einen Weg, den Begriff in einer bestimmten Sprache zu definieren? Oder wie ist Ihre Bemerkung zu verstehen: "... dass sich diese Def. für 'Anal.' innerhalb einer bestimmten Sprache, in der man die Begriffe 'Menge' und 'Rel.' schon hat, durchführen lässt"? Können Sie den Begriff "Menge" innerhalb einer bestimmten, formalisierten Semantik definieren?

Eine weitere Schwierigkeit betrifft die höherstufigen Prädikate; ein solches müsste dargestellt werden durch eine Zuordnung zu Bewertungen niedriger Stufe (oder durch eine semantische Menge von Mengen usw. von Ausdrücken).

Werden Sie vielleicht bald schon einen ersten Entwurf Ihrer Arbeit niedergeschrieben haben, so dass ich sie lesen und verwerten könnte? Das wäre mit ausserordentlich wertvoll. Oder können Sie mir wenigstens brieflich jetzt schon Näheres angeben über die Def. von "Menge" und "anal."? Für den Zusammenhang meines Buches ist der Begriff "anal." sehr wichtig, weil ich die übrigen Begriffe (besonders "Gehalt" usw.) daran anknüpfen will. Falls Ihre Def. für meine Zwecke brauchbar ist (was doch

sicher zu vermuten ist), wäre es für mich am praktischsten, sie von Ihnen zu übernehmen (selbstverständl. unter Hinweis auf Ihre Urheberschaft), anstatt erst selbst eine zu suchen, die sich dann womöglich nachträgl. als schlechter erweist als Ihre. Jedenfalls wäre es für mich höchst wertvoll, zu sehen, in welchem Sinne Ihre Def. überhaupt zu einem formalisierbaren Begriff führt.

Zur Terminologie: der Terminus "wahr" scheint mir sehr unzuverlässig; jedenfalls wäre sein Gebrauch nicht im Einklang mit dem allg. Sprachgebrauch. Denn hiernach heisst der Satz "Wien hat so und so viel Einwohner" doch wahr, während die von Ihnen beabsichtigte Def. doch wohl auf ihn nicht zutrifft. Man müsste also doch wohl "logisch-wahr" sagen, oder "logisch-gültig" oder "tautologisch" oder "analytisch"; und von diesen Ausdrücken scheint mir der letzte der zweckmässigste.

Ja, Zermelos Bemerkungen im Jahresber. über Sie habe ich mit Erstaunen gelesen; trotz seines Scharfsinns greift er manchmal so erstaunlich daneben. ⁽¹⁵⁾

Frege hat, soviel ich weiss, nichts mehr über die Antinomien geschrieben, obwohl er erst 1925 gestorben ist. Er hat noch veröffentlicht: Der Gedanke; eine log. Untersuchung. In: Beiträge z. Philos. d.dt. Idealismus (das sind die späteren "Bl.f.dt. Phil.") I, 1918. Ferner in ders. ZS et was später, ich glaube über die Negation. Eben finde ich in Jørgensen, Treatise, I 174 Anm. 84 einen Hinweis auf eine Note von Frege in: Quart. Journ. of Math. 43, p. 251, 1912; diese Note dürfte viell. wichtiges enthalten. Lewis, Survey 393, nennt noch: Translated portions, Monist 25 (1915)-27 (1917); viell. sind das aber nur übersetzte Stücke aus den "Grundgesetzen". Sonst ist mir nichts bekannt.

Was macht man in Wien? Wird Hahn das Seminar über Grundl. fortsetzen oder Schlick den Zirkel wieder aufmachen? Wann wird Ihre Arbeit fertig und wann erscheint sie? Denken Sie ja daran, ausführlicher und leichter verständlich zu schreiben!

Mit den besten Grüssen

Ihr R.C.

⁽¹⁵⁾ NdT. Il est étonnant de constater que, dans la réponse à Gödel du 25 Septembre 1932, Carnap prend franchement position contre Zermelo, bien qu'il utilise lui-même le résultat de Gödel en un sens analogue à l'interprétation de Zermelo, pour introduire le c-concept de *conséquence infinie*.

Prague, le 25 Sept. 1932.

Cher Monsieur,

Recevez tous mes remerciements pour votre lettre. Je vous suis très reconnaissant de m'avoir signalé l'erreur contenue dans ma définition d'"analytique". J'ai entre temps tenté de mettre sur pied une meilleure définition, un peu dans le sens de vos indications (si je les ai bien comprises). Mais ici entrent en jeu certaines difficultés que je ne suis pas encore parvenu à surmonter. En tous cas, je comprends qu'on n'obtient pas les formules des mathématiques classiques sur les nombres réels quand on n'applique le quantificateur universel avec variables de prédicats (ou variables de foncteurs) qu'à des prédicats définissables dans les limites d'un certain système déterminé. Vous dites: il faut l'appliquer à "tous les ensembles"; mais qu'est-ce que cela veut dire? Voici ce que j'ai tenté: j'entends par valuation d'un prédicat (*Prädikatsbewertung*) une règle qui à chaque expression numérique (par ex. " $0''''$ ") ou à chaque n-uple d'expressions numériques fait correspondre soit " $0=0$ " soit $0 \neq 0$; la valuation d'un foncteur est une règle qui à chaque n-uple d'expressions numériques fait correspondre une expression numérique. À l'aide de ce concept de valuation on peut définir le concept d'"évaluation" (*Auswertung*): dans la formule considérée on substitue à " $F(\dots)$ " la formule correspondante et à " $f(\dots)$ " l'expression correspondante. " $F(\dots)$ " est analytique si " $\dots$ " est analytique pour toute valuation de F . Prise dans son ensemble, la définition devient assez compliquée, mais elle est faisable. Venons en pourtant au problème. Si l'on veut vraiment obtenir de la définition ce que l'on en attend, ce n'est pas dans un langage limité de la sémantique qu'il faut exprimer la règle qui doit être formulée dans la langue de la sémantique, mais on a le droit de la construire à l'aide de concepts sémantiques quelconques. (Car sinon certains ensembles de nombres restent de nouveau exclus, qui peuvent être rendus plausibles, mais ne peuvent pas être conçus dans le système). Mais cela ne fait-il pas problème? Cela ne me paraît pas faire problème si la définition d'"analytique dans le langage S " ne peut pas être donnée dans une sémantique formalisée dans S , mais ne peut l'être que dans une sémantique formalisée dans un autre langage S_2 . Mais le fait de se servir d'un concept pour lequel il n'existe pas de langage dans lequel on puisse le définir, paraît tout de même assez discutable.

Mais peut-être voyez-vous un moyen de définir le concept dans une langue déterminée ? Ou bien comment faut-il comprendre votre remarque : "cette définition d'analytique ne peut être donnée que dans une langue où l'on dispose déjà des concepts d'ensemble et de relation" ? Pouvez-vous définir le concept d'ensemble dans une sémantique formalisée particulière ?

Une autre difficulté concerne les prédicats d'ordre supérieur ; un tel prédicat devrait être représentée par une mise en correspondance à des évaluations d'ordre inférieur (ou par un ensemble sémantique d'ensembles etc. d'expressions).

Aurez-vous bientôt fini d'écrire la première ébauche de votre travail, en sorte que je puisse la lire et en tirer profit ? Cela me serait d'un grand secours. Ou bien pouvez-vous au moins me donner dès maintenant par lettre de plus amples renseignements sur la définition d'ensemble et d'analytique ? Le concept d'analytique est très important pour la cohésion de mon livre, parce que je veux mettre les autres concepts (en particulier celui de contenu (*Gehalt*) etc.) en rapport avec lui. Au cas où votre définition peut servir mon propos (ce qu'on peut certainement présumer), il vaudrait mieux à mon avis la reprendre (bien entendu en mentionnant que vous en êtes l'auteur) que d'en chercher une moi-même qui s'avèrera probablement par la suite moins bonne que la vôtre. De toutes manières, il me serait au plus haut point utile de voir en quel sens votre définition conduit à un concept formalisable.

Un point de terminologie : le terme "vrai" me semble très peu adéquat ; son usage en tous cas ne cadrerait pas avec l'usage linguistique courant. Car d'après cet usage, la phrase "Vienne a tant d'habitants" est vraie, tandis que la définition que vous proposez ne s'y applique pas. Il faudrait donc plutôt parler de "logiquement vrai", ou de "logiquement valide", ou de "tautologique", ou d'analytique ; parmi ces expressions, c'est la dernière qui me semble la plus adéquate.

Oui, j'ai lu avec étonnement les remarques de Zermelo sur vous dans le *Jahresbericht* ; en dépit de sa subtilité, il tombe parfois incroyablement à côté. ⁽¹⁵⁾

Frege n'a à ma connaissance rien écrit d'autre sur les antinomies, quoiqu'il soit mort seulement en 1925. Il a publié par ailleurs : *Der Gedanke* ; une recherche logique. Dans *Beiträge z. Philos. d.dt. Idealismus* (qui sont devenus plus tard *Blätter für deutscher Philosophie* I, 1918). Et puis il a publié un peu plus tard dans le même périodique, sur la négation je

crois. Je trouve à l'instant dans le *Treatise* de Jørgensen I 174 Rem. 84 une référence à une note de Frege dans *Quart. Journ. of Math.* 43, p. 251, 1912; cette note pourrait peut-être contenir quelque chose d'important. Lewis, *Survey* 393 cite encore : Choix de textes, *Monist* 25 (1915)-27 (1917); ce ne sont peut-être là que la traduction d'extraits des *Grundgesetze*. Sinon je ne vois rien d'autre.

Que fait-on à Vienne? Est-ce que Hahn continue le séminaire sur les fondements et Schlick recommence-t-il le cercle? Quand votre travail sera-t-il fini et quand paraîtra-t-il? Pensez surtout à écrire de façon plus détaillée et plus facilement compréhensible!

Avec mes meilleures salutations
Votre R.C.

Prag, den 27. Sept. 1932.

Lieber Herr Gödel!

Vorgestern schrieb ich Ihnen über eine Schwierigkeit, bei der Def. für "analytisch". Gestern fand ich die Lösung: die in der Def. vorkommende Wendung "für jede Bewertung..." kann doch in einer in bestimmter Sprache formulierten Sem. ausgedrückt werden, nämlich durch " $\langle F \rangle (...)$ ", da ja eine Bewertung ein sem. Prädikat ist. Dies ist möglich, obwohl in der betr. Sem. nicht alle möglichen Bewertungen, d.h. Prädikate, definiert werden können. Bei der Anwendung auf Prädikate und Funktoren höherer Stufe und gemischten Typus wird die Sache allerdings doch recht kompliziert.

Ich schreibe Ihnen gleich, damit Sie sich keine unnötige Mühe bei der Beantwortung mehr zu machen brauchen. Trotzdem würde mich natürlich Ihre Auffassung hierzu und eine Andeutung über den von Ihnen eingeschlagenen Weg lebhaft interessieren.

Noch eine Frage: kann man ohne Einbusse an definierbaren Präd. u. Funktoren auf rekursive Def. verzichten, wenn man in der Sprache Präd.- und Funktorvariable in Operatoren zulässt?

Mit den besten Grüßen
Ihr R.C.

Prague, le 27 Sept. 1932

Cher Monsieur,

Je vous ai écrit avant-hier au sujet d'une difficulté rencontrée dans la définition d'"analytique". J'ai trouvé hier la solution : la tournure intervenant dans la définition "pour toute valuation..." peut effectivement être exprimée dans une sémantique formulée dans une langue donnée, à savoir par "(F)(...)" parce qu'une valuation est bel et bien un prédicat sémantique. Cela est possible même si toutes les valuations possibles, c'est-à-dire tous les prédicats, ne sont pas définissables dans la sémantique considérée. Quand on en vient aux prédicats et aux foncteurs d'ordre supérieur et de type mixte, la chose devient toutefois très compliquée.

Je vous écris immédiatement pour que vous ne vous fassiez plus d'efforts inutiles en me répondant. Toutefois il m'intéresserait bien entendu au plus haut point que vous me donniez votre point de vue sur ce problème et que vous m'indiquiez en gros la voie que vous proposez.

Encore une question : peut-on sans perte pour les prédicats et les foncteurs définissables renoncer aux définitions récursives si l'on admet dans le langage des variables de prédicats et de foncteurs dans les opérateurs ?

Avec mes salutations les meilleures
Votre R.C.

Wien, 28.XI.1932

Lieber Herr Carnap!

Besten Dank für Ihre beiden Briefe und die Karte. Ich habe jetzt leider mit dem Bericht über die Grundlagenforschung viel zu tun gehabt u. bin daher bis heute nicht dazu gekommen, Ihnen zu schreiben. Auch der II. Teil meiner Arbeit existiert erst im Reiche der Ideen. Meine Andeutungen über die Df. von "analytisch" haben Sie, wie ich aus Ihrem zweiten Brief entnehme, ganz in meinem Sinn verstanden. Um die Sache allgemein d.h. für Funktionen beliebigen endlichen Typs durchführen zu können, braucht man eine Variable nächst höheren Typs (Typus w) d.h. eine solche, die alle endlichen Typen durchläuft, was a priori vorauszu-sehen ist, da man eben niemals "anal." in demselben System definieren

kann, sonst würden sich Widersprüche ergeben. Ich glaube übrigens, das Interesse dieser Df. liegt nicht in einer Klärung des Begriffs "analyt.", weil man in ihr die ebenso problematischen Begriffe "beliebige Menge" etc. verwendet, sondern ich stelle sie mit aus dem Grunde auf, weil man mit ihrer Hilfe zeigen kann, daß die unentsch. Sätze in Systemen, welche in der Reihe der Typen weiter hinaufsteigen, entscheidbar werden.

Übrigens hat Tarski, wie Sie vielleicht wissen, eine ähnliche Df. für "anal." in einer in poln. Sprache erscheinenden Abhandlung gegeben, worüber er im Anzeiger der Wiener Akad. d. Wiss. 1932 N° 2 berichtet. ⁽¹⁶⁾ – Die Frage, die Sie am Schluß Ihres Briefes vom 27./IX. stellen, ist mit ja zu beantworten, wenn das Red. Ax. oder ein Äquivalent (z.B. Ihre Df.-Regel für Funktionen) im System enthalten ist. – Wie hat Ihnen die Reise nach Schweden gefallen? Haben Sie Skolem kennengelernt? Hat Chwistek sein Manuskript für die Erkenntnis abgeändert? Wenn ja, würde ich es gerne lesen. Der Schlickzirkel wurde zwar wieder aufgenommen, aber die Diskussion mit Waismann wird nicht fortgesetzt, sondern Referate über Ramsey u.a. gehalten. Wie ich hörte, beabsichtigen Sie Mitte Dezember nach Wien zu kommen. Ich würde mich dan sehr freuen ausführlich über die logischen Fragen mit Ihnen zu sprechen, was brieflich schwer möglich ist.

Mit den besten Grüßen

Ihr Kurt Gödel

Vienne, le 28/XI. 1932

Cher Monsieur,

Merci beaucoup de votre lettre et de votre carte. J'ai malheureusement été très pris jusqu'à maintenant par mon rapport sur la recherche des fon-

⁽¹⁶⁾ NdT. Cf. Tarski, 1932, qui donne les résultats de Tarski, 1933. Cf. aussi Tarski, 1935, Post-scriptum, où Tarski mentionne que, pour les langages logiques, sa définition devient "la définition du terme 'analytique' employé par Carnap". Carnap ne prendra connaissance des travaux en question qu'au cours du Congrès International de Philosophie Scientifique tenu à Paris pendant l'été 1935. Sous le titre "Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik", Tarski y expose les rudiments de sa théorie de la vérité. L'exposé technique, "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" ne paraîtra qu'en 1936 (*Studia Philosophica*, vol. I).

dements et je n'ai pu, de ce fait, vous écrire plus tôt. La seconde partie de mon travail n'existe elle-même que dans le domaine des idées. Vous avez compris mes indications sur la définition d'"analytique" exactement dans le sens que je leur donnais, si j'en juge par votre seconde lettre. Pour pouvoir faire la chose de façon générale, c'est-à-dire pour les fonctions d'un type fini quelconque, on doit avoir une variable du type immédiatement plus élevé (le type Ω) c'est-à-dire une variable qui parcourt *tous* les types finis; ce qui est *a priori* prévisible, du fait qu'"analytique" ne peut jamais être défini dans le même système sans que des contradictions ne se produisent. Je crois par ailleurs que l'intérêt de cette définition ne réside pas dans l'explication du concept "analytique", car on y applique les concepts tout aussi problématiques d'"ensemble quelconque" etc., mais je la présente seulement pour la bonne raison qu'elle permet de montrer que les propositions indécidables deviennent décidables dans des systèmes qui s'élèvent dans la série des types. Par ailleurs Tarski, que vous connaissez peut-être, a proposé une définition d'analytique semblable dans un traité publié en polonais, qu'il évoque dans l'*Anzeiger der Wiener Akademie d. Wiss.* 1932 n° 2 (¹⁶) — Il faut répondre par l'affirmative à la question que vous posez à la fin de votre lettre du 27/IX, si l'axiome de réductibilité ou un équivalent (par exemple votre règle de définition pour les fonctions) est contenu dans le système.

Comment avez-vous trouvé votre voyage en Suède? Avez-vous fait la connaissance de Skolem? Chwistek a-t-il modifié son manuscrit pour *Erkenntnis*? Si c'est le cas, j'aimerais le lire. Le Cercle de Schlick a repris, mais la discussion avec Waismann n'est pas poursuivie; on fait maintenant des exposés sur Ramsey. J'ai entendu dire que vous projetiez de venir à Vienne à la mi-Décembre. Je serais très heureux de pouvoir parler avec vous longuement de ces questions de logique, ce qui est difficilement faisable par lettre.

Avec mes meilleures salutations,
Votre Kurt Gödel

Joëlle PROUST
C.N.R.S.
Université de Provence

Gerhard HEINZMANN
Université de la Sarre

BIBLIOGRAPHIE

- CARNAP, Rudolf, *Die logizistische Grundlegung der Mathematik*, *Erkenntnis* 2, 1931; nous renvoyons à la traduction anglaise, in P. Benacerraf et H. Putnam, *Philosophy of mathematics. Selected Readings*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1964, 31-41.
- CARNAP, Rudolf, *The logical syntax of language*, London, Routledge and Kegan Paul, 1937 (première version en allemand, Vienna, Julius Springer Verlag, 1934).
- COFFA, Alberto, "Carnap, Tarski and the Search for Truth", *Noûs*, XXI, 4, 1987, 547-572.
- DAWSON, John W., "Completing the Gödel-Zermelo Correspondence", *Historia Mathematica*, 12 (1985), 66-70.
- FREGE, Gottlob, "Anmerkungen zu Philip Jourdain: The development of the theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics: Gottlob Frege. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 43 (1912), 237-269.
- FREGE, Gottlob, "Der Gedanke. Eine logische Untersuchung". *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 1 (1918), 58-77. Trad. française par Cl. Imbert: *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Le Seuil, 1971.
- FREGE, Gottlob, "Die Verneinung. Eine logische Untersuchung". *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1 (1918), 143-157. Trad. française par Cl. Imbert: *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Le Seuil, 1971.
- FREGE, Gottlob, "The Fundamental Laws of Arithmetic", *The Monist*, 25 (1915), 27 (1917) (traduction partielle de *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, 2 vol., Hermann Pohle, Iena, 1893 et 1903. Olms, Hildesheim, 1962.
- GÖDEL, Kurt, *Collected Works*, vol. I, édités par S. Feferman, J. Dawson, J. Kleene, Stephen et alii, Oxford University Press, 1986.
- GÖDEL, Kurt, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme" I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), 173-198. Reproduit in Gödel 1986, 144-195.
- GÖDEL, Kurt, "Besprechung von Carnap 1931", *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, 2 (1932), 321. Reproduit in Gödel 1986, 242-4.
- GÖDEL, Kurt, "Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics" in M. Davies (ed.), *The Undecidable*, New York, Raven Press, 1965, 84-88.
- GRATTAN-GUINNESS, Ivor, "In memoriam Kurt Gödel: his 1931 Correspondence with Zermelo on his Incompleteness Theorem", *Historia Mathematica*, 6 (1979), 294-304.
- HILBERT, David/BERNAYS, Paul, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 2, Berlin, Springer, 1939.
- LORENZEN, Paul, *Metamathematik*, Mannheim, B.I., 1962.
- MOORE, Gregory H., "Beyond First-order Logic: the historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory", *History and Philosophy of Logic*, 1 (1980), 95-137.
- PROUST, Joëlle, *Questions de forme. Logique et proposition analytique de Kant à Carnap*, Paris, Fayard, 1986.
- PROUST, Joëlle, "Formal logic as Transcendental in Wittgenstein and Carnap", *Noûs*, XXI, 4, 1987.
- ROSSER, Barkley, "An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorem and Church's Theorem", *The Journal of Symbolic Logic*, 4 (1939), 53-60.

- SCHLICK, Moritz, "Über das Fundament der Erkenntnis", *Erkenntnis*, 4, 1934.
- SCHOENFIELD, Joseph R., *Mathematical Logic*, Reading/Mass., Addison-Wesley, 1967.
- STEGMÜLLER, Wolfgang, *Strukturtypen der Logik*, Bd. 3, Teil B, Heidelberg/New York/Tokyo, Springer, 1984.
- TARSKI, Alfred, "Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen", *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, 69 (1932), 23-25.
- TARSKI, Alfred, "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", in *Logique, sémantique, métamathématique*, 1924-1944, t. 1; édité par G. Granger; Paris, Armand-Colin, 1972, 157-269.
- WANG, Hao, *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, MIT Press, 1987.
- ZERMELO, Ernst, "Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2 (1932), 2 Abt., 85-88.