Une nouvelle méthode de décision

IDENTIFICATION ET ANALYSE DES CLASSES D'EQUIVALENCE DE LA LOGIQUE MODALE PAR DES INVARIANTS NUMERIQUES

Miguel SANCHEZ-MAZAS

Introduction

Nous avons trouvé une méthode qui permet d'associer à chaque formule bien formée d'un système de logique modale un nombre naturel invariant pour toutes les formules qui appartiennent à la même classe d'équivalence que la première.

En particulier, étant donné que la méthode associe à toutes les tautologies du système le nombre 0(1) et à toutes les contradictions du système un certain nombre Φ(2), il suffit de calculer le nombre qui, en vertu des associations fondamentales, reste associé à n'importe quelle formule, pour décider si cette dernière est tautologique ou contradictoire.

D'autre part, toute les relations logiques reliant deux formules quelconques du système – par exemple, des implications, des incompatibilités, des oppositions contradictoires ou des disjonctions – sont immédiatement révélées par un simple examen oculaire des nombres asso-

(1) Etant donné que l'opérateur arithmétique qui traduit la *disjonction* de plusieurs formules est *l'infimum binaire* de leurs nombres caractéristiques (voir le paragraphe 2.2), le nombre associé à la disjonction de deux formules contradictoires (ou de *toutes* les formules) est l'infimum binaire de deux nombres complémentaires (ou de *tous* les nombres), c'est-à-dire le 0.

(2) Etant donné que l'opération arithmétique qui traduit la *conjonction* de plusieurs formules est le *supremum binaire* de leurs nombres caractéristiques (voir le paragraphe 2.2), le nombre associé à la conjonction de deux formules contradictoires (ou de *toutes* les formules) est le supremum binaire de deux nombres complémentaires (ou de *tous* les nombres), c'est-à-dire, le nombre Φ. La valeur de Φ dans notre cadre actuel, limité à la considération des formules formées de 2 variables propositionnelles au plus (p et q) est le nombre hexadécimal F.FFF.FFF. (Sur la nécessité d'éviter la variation de Φ en fonction du nombre des variables voir nos observations dans la *Conclusion*).

ciés aux formules données et une rapide vérification manuelle(3) fondée sur la comparaison des chiffres du même rang de ces nombres, écrits en hexadécimal(4).

En effet, comme nous allons le constater par la suite, la comparaison précitée peut nous conduire de façon immédiate à des résultats logiques, en vertu de conditions arithmétiques du type suivant:

a) une formule g(p, q)(5) du système *implique* une autre formule h(p, q) de ce dernier si et seulement si chaque chiffre du nombre N(g(p, q)) associé à la première *absorbe binairement*(6) le chiffre du même rang du nombre N(h(p, q)) associé à la deuxième;

b) deux formules g(p, q) et h(p, q) du système *sont incompatibles* si et seulement si pour chaque couple de chiffres du même rang de leurs nombres caractéristiques respectifs N(g(p, q)) et N(h(p, q)), le *supremum binaire*(7) des deux chiffres est *égal à F* (le plus grand chiffre hexadécimal(8));

c) deux formules g(p, q) et h(p, q) du système sont *contradictoirement opposées* si et seulement si pour chaque couple de chiffres du même rang de leurs nombres caractéristiques respectifs N(g(p, q)) et N(h(p, q)), la *somme* des deux chiffres est *égal à F*;

d) la *disjonction* de deux formules g(p, q) et h(p, q) du système est *tautologique* si et seulement si pour chaque couple de chiffres du même rang de leurs nombres caractéristiques respectifs N(g(p, q)) et N(h(p,q)) le *infimum binaire*(9) des deux chiffres est égal à 0.

Si maintenant nous supposons que les deux nombres caractéristiques N(g(p, q)) et N(h(p, q)) respectivement associés aux deux formules g(p, q) et h(p, q) du système s'écrivent en hexadécimal de la façon suivante:

(3) La vérification peut être effectuée automatiquement, même avec des tres petites calculatrices portatives du type HP-16C, comme nous l'indiquons dans le paragraphe 2.3 par l'application des opérations "AND", "OR" ou "NOT" à des nombres écrits en hexadécimal.

(4) Voir le début du paragraphe 2.3.

(5) Nous nous limitons dans cette étude à la considération des formules qui contiennent un nombre quelconque d'occurrences des deux variables propositionnelles p et q.

(6) Le *Tableau IV* donne la table des valeurs de la relation arithmétique X : Y (X *absorbe* Y) pour chaque couple ordonné des valeurs des nombres à un chiffre hexadécimal X et Y.

(7) Le *Tableau III* donne les valeurs du *supremum binaire* [X, Y] pour chaque couple de valeurs des nombres à un chiffre hexadécimal X et Y.

(8) $F_{16} = 15_{10}$ (F en base 16 = 15 en base 10).

(9) Le *Tableau II* donne les valeurs de l'*infimum binaire* (X, Y) pour chaque couple de valeurs des nombres à un chiffre hexadécimal X et Y.

$N(g(p, q)) = G = G_7G_6G_5G_4G_3G_2G_1$ (G_i = 0, 1, 2, ..., A, B, C, D, E, F)

et

$N(h(p, q)) = H = H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$,

nous pourrons écrire ces conditions arithmétiques nécessaires et suffisantes pour décider des relations logiques précitées entre deux formules du système de la façon suivante:

a) $g(p, q) \rightarrow h(p, q)$ ssi $\forall_i$ $G_i : H_i$ (G_i *absorbe* H_i);
b) $g(p, q) \mid h(p, q)$ ssi $\forall_i$ $[G_i, H_i] = F$ (*supremum* de G_i et H_i égal à F);
c) $g(p, q)$ w $h(p, q)$ ssi $\forall_i$ $G_i + H_i = F$ (*somme* de G_i et H_i égal à F);
d) $g(p, q)$ v $h(p, q)$ ssi $\forall_i$ $(G_i, H_i) = 0$ (*infimum* de G_i et H_i égal à 0).

Finalement, l'analyse de la *composition binaire*([10]) du nombre associé à une formule donnée – analyse dont la réalisation manuelle est extrêmement simple lorsque le nombre est écrit en hexadécimal – permet d'obtenir de façon immédiate l'expression de la première sous sa *forme normale conjonctive*, fournissant en conséquence, pour ainsi dire, la véritable carte d'identité logique de chaque formule du système modal.

La méthode ici décrite constitue donc une nouvelle *méthode de décision*, de nature entièrement *arithmétique*, pour la logique modale.

Pour exemplifier convenablement cette méthode, il nous paraît logique et naturel de choisir comme système initial de référence – à partir duquel il sera possible d'examiner des applications plus spécifiques – le noyau d'équivalences commun à tous les systèmes classiques de logique modale – par exemple, aux système T, S_4 et S_5([11]) –.

([10]) La *composition binaire* d'un nombre X, exprimée par la somme des puissances de 2 (deux à deux différentes) égale à X, peut être écrite de la façon suivante:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \times 2^i = (X_0 \times 2^0) + (X_1 \times 2^1) + (X_2 \times 2^2) + \ldots + (X_{n-1} \times 2^{n-1}) \qquad (X_i = 0, 1)$$

([11]) Nous donnerons pour ces trois systèmes "*classiques*" ou "*normaux*" de la logique modale, les références précises suivantes:

Le système T de Feys est exposé pour la première fois par le logicien belge dans son article "Les logiques nouvelles des modalités", *Revue Néoscholastique de Philosophie*, Vol.

Ce système – dont les axiomes (*tous sous forme d'équivalences*), les définitions et les règles seront énumérées plus loin – sera appelé "*système équivalentiel commun de logique modale*" et désigné de façon abregée par les initiales de ce nom, dans l'ordre anglais ("CESML")([12]).

Il est clair qu'à partir de ce système initial d'équivalences communes à tous les systèmes classiques de logique modale, l'introduction ultérieure de certains *axiomes de réduction* – comme ceux de S_4 et de S_5([13]) –, se

40 (1937), pp. 517-553 et Vol. 41 (1938), pp. 217-252. Ses postulats – axiomes, règles et définitions – sont synthétisés par Robert Feys lui-même dans [1], § 81.1, pp. 123-124 et présentés également, avec les principaux théorèmes qui en découlent, par Hughes et Cresswell dans [3], pp. 30-42.

Le système fut ainsi désigné par Boleslaw Sobocinski en 1953, dans son article "Note on a modal system of Feys-Von Wright", *The Journal of Computing Systems*, Vol. 1 (1953), pp. 171-178, où le logicien polonais montra que T est déductivement équivalent au système M de Georg Henrik Von Wright.

Le système M de Von Wright est exposé pour la première fois par le philosophe finlandais dans son livre *An Essay in Modal Logic*, [1951], Appendice II, pp. 84-90. Ses postulats – axiomes, règles et définitions – sont synthétisés aussi par Feys dans [1], § 81.2, p. 124.

Le système S_4 fut ainsi désigné par Lewis et Langford dans le cadre des systèmes modaux successifs étudiés par ces auteurs. Les fondements du système ont été exposés dans leur grand ouvrage classique *Symbolic Logic* [5], Appendice II, pp. 492-502. Dans [19], Appendice II, p. 90, Von Wright signala que S_4 est équivalent à son *système M'*, dont les fondements sont établis dans le même ouvrage, pp. 84-85. Sobocinski, dans l'article ci-dessus mentionné, démontra cette équivalence. S_4 est aussi synthétisé dans [1], Section VI, pp. 92-114 et dans [3], pp. 46-49.

Le système S_5 fut aussi désigné de cette manière par Lewis et Langford. Les fondements de ce système sont exposés également dans [5], à côté de ceux de S_4. S_5 est synthétisé aussi dans [1], Section 7, pp. 115-121 et dans [3], pp. 49-60. Dans [19], Appendice II, p. 90, Von Wright signala l'équivalence entre S_5 et son *système M"*, dont le fondements sont établis dans le même ouvrage, pp. 84-85. Sobocinski, dans l'article ci-dessus mentionné, démontra cette équivalence.

([12]) *Common Equivalential System of Modal Logic.*

([13]) *L'axiome de réduction* qui caractérise le *système S_4* est formulé de la façon suivante:

1. par Lewis et Langford, dans [5], Appendice II, p. 497:

C10. $\sim M \sim p \;⥽\; \sim M \sim \; \sim M \sim p$

que nous pourrions écrire de la façon suivante:

$$Lp \;⥽\; LLp \qquad (*)$$

Or, comme l'implication stricte de sens inverse à l'implication (*) appartient aussi au système S_4, ce dernier admet l'équivalence stricte suivante:

reflétant par un *accroissement* du *nombre des équivalences* et par une *réduction* corrélative du *nombre des classes d'équivalence*, devra se répercuter sur l'association entre les formules et leurs nombres caractéristiques, afin que, lors de l'arithmétisation des systèmes S_4, S_5, etc., *l'invariance* de chaque nombre caractéristique par rapport à toutes les formules de la même classe d'équivalence – invariance qui est la clef de la méthode – soit préservée.

$$Lp = LLp \tag{**}$$

2. par Von Wright dans [19], Appendice II, p. 84:

C.1. MMP → Mp. The First Axiom of Reduction.

3. par Hughes et Cresswell, dans [3], p. 46:
A7. Lp → LLp
4. par Feys dans [1], section 6, p. 92:
60.01. MMp ⥽ Mp
alternativement avec l'axiome dual du précédent:
60.02. Lp ⥽ LLp
L'axiome de réduction qui caractérise le *système S_5* est formulé, lui, de la façon suivante:
1. par Lewis et Langford, dans [5], Appendice II, p. 497:
C11. Mp ⥽ ~ M ~ Mp
que nous pourrions écrire de la façon suivante:

$$Mp ⥽ LMp \tag{***}$$

Or, comme l'implication stricte de sens inverse à l'implication (***) appartient aussi au système S_5, ce dernier admt l'équivalence stricte suivante:

$$Mp = LMp \tag{****}$$

2. par Von Wright dans [19], Appendice II, p. 84:
C.2. M ~ Mp → ~ Mp. The Second Axiom of Reduction.
3. par Hughes et Cresswell, dans [3], p. 49:
A8. Mp → LMp
4. par Feys dans [1], Section 7, p. 115:
70.01. Mp ⥽ LMp
d'où il déduit l'équivalence stricte suivante:
70.11 LMp = Mp
ainsi que l'équivalence stricte, duale de la précédente:
70.12. MLp = Lp
En 1956, A. N. Prior affirma dans [8], p. 60, qu'il est possible d'obtenir *un système équivalent à S_5* en ajoutant à n'importe quelle base complète pour le calcul propositionnel classique les trois axiomes suivants:

La recherche des procédés les plus simples et les plus pratiques pour arriver à ces nouveaux résultats constituera la deuxième phase de notre travail.

1. Le système équivalentiel commun de logique modale CESML

Dans le but de délimiter avant tout l'ensemble des classes d'équivalence commun à tous les systèmes classiques de logique modale, notre première

G1. $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$
G2. $Lp \rightarrow p$
G3. $\sim Lp \rightarrow L \sim Lp$

Prior signale que l'équivalence entre le système mentionné et S_5 a été prouvée par Gödel dans "Einer Interpretation des intuitionistischen Aussangenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 4 (1933), pp. 39-41.

D'autre part, Kripke, dans [4], p. 1, reprend sous la forme suivante les trois axiomes de Gödel:

	A1: $Lp \rightarrow p$	(égal à G2.)
	A2: $\sim Lp \rightarrow L \sim Lp$	(égal à G3.)
et	A3: $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$	(égal à G1.)

pour sa formalisation du *système* S_5.

Lewis et Langford signalent aussi dans [5], Appendice II, p. 501 que *le système* S_5 peut être obtenu en ajoutant au *système* S_4 l'axiome suivant:

C12. $p \strictif \sim M \sim Mp$

que nous pourrions écrire de la façon suivante:

$$p \strictif LMp$$

et que Becker avait appelé *l'axiome de Brouwer.*

Rappelons que, par l'application réitérée des quatre équivalences suivantes (vor [3], p. 44):

R1. $Mp = LMp$
R2. $Lp = MLp$
R3. $Mp = MMp$
R4. $Lp = LLp$

obtenues des axiomes de réduction, *toute formule bien formée de* S_5 peut être réduite *à une formule de degré modal non supérieur à 1* (c'est-à-dire, de *degré modal 0* ou de *degré modal 1).*

Voici, à ce propos, la définition précise de *degré modal*, donnée par W. T. Parry, "Modalities in the *Survey* system of strict implication", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 4 (1939), pp. 131-154, à la page 144:

tâche doit être, à notre avis, essayer de fonder tout le système des thèses partagées par les diffèrentes doctrines modales généralement acceptées exclusivement sur des formules – axiomes ou définitions – ayant la forme d'*équivalences.*

Dans cette perspective, il nous faudra:

a) d'une part, *choisir* parmi les formules fondamentales universellement acceptées en logique modale *qui ont déjà la forme d'une équivalence*, celles qui sont les plus appropriées à notre but;

b) d'autre part, *remplacer* les formules fondamentales universellement acceptées aussi en logique modale mais *qui n'ont pas la forme d'une équivalence* mais une autre forme – par exemple, celle d'une *implication* ou d'une *disjonction* – par des *équivalences* pouvant exprimer dans leur ensemble les mêmes lois ou contenus logiques que l'ensemble des formules remplacées.

1. une variable propositionnelle est de *degré 0*;
2. Si α est de *degré n*, alors $\sim \alpha$ est de *degré n*;
3. Si α est de *degré n* et β est de *degré m*, alors,
   si $n \geqq m$, $(\alpha \vee \beta)$ est de *degré n*;
   si $m \geqq n$, $(\alpha \vee \beta)$ est de *degré m*;
4. Si α est de *degré n*, alors $L\alpha$ est de *degré n+1*.

La possibilité de réduction ci-dessus énoncée est généralement désignée et formulée de la façon suivante (voir [3], p. 51):

Théorème de réduction de S_5:

Toute formule de degré superieur à 1 peut être réduite dans S_5 à une formule de premier degré.

Avec ce théorème, nous arrivons à une conclusion importante pour l'utilisation de notre *méthode d'arithmétisation* comme *méthode de décision*, en conjonction avec les *quatre équivalences R1, R2, R3 et R4*, de *toutes les formules bien formées dans le système S_5.*

Nous décrirons ci-dessous la manière d'appliquer cette méthode:

Soit une formule quelconque g, bien formée dans S_5.

Nous procédérons de la façon suivante:

a) *Si g est de degré modal 0 ou 1*, on calcule son *nombre caractéristique N(g)* par l'application des associations établies sous 2.1 et 2.2 et on applique, *sur la base de ce nombre N(g)*, la méthode arithmétique de décision décrite sous 2.3.

b) *Si g est de degré modal supérieur à 1:*

b_1) On trouve, par *l'aplication réitérée des équivalences R1, R2, R3 et R4*, une *formule g^1 de premier degré équivalence à g*;

b_2) On *applique à g^1 la méthode décrite sous a) ci-dessus;*

b_3) *On applique à la formule g initialement donnée* les conclusions obtenues par a) *pour sa formule équivalente de premier degré g^1.*

Ainsi, par exemple, si nous exprimons les principes classiques qui règlent le comportement logique de l'opérateur modal "*il est possible que*" (M) par rapport à la *disjonction*, d'abord, et à la *conjonction*, ensuite, respectivement par *l'assertion* suivante d'une *équivalence:*

$$\vdash M(p \vee q) \leftrightarrow Mp \vee Mq \text{([14])} \qquad (1)$$

(*assertion* de la *loi de distributivité* de M par rapport à la *disjonction*) et par la couple d'expressions suivantes (dont la première est *l'assertion* d'une *implication* et la dernière *le rejet de l'assertion de l'implication inverse*):

$$\vdash M(p \& q) \rightarrow Mp \& Mq \text{([15])} \qquad (2a)$$

$$\text{et } non \vdash (Mp \& Mq) \rightarrow M(p \& q) \qquad (2b)$$

(donc, *non assertion* de la *distributivité* de M par rapport à la *conjonction*), nous *assumerons*, d'une part, *l'équivalence* dont l'assertion constitue l'expression (1) parmi nos *équivalences de base* et nous *remplacerons*, d'autre part, (2a) et (2b) par une *équivalence* du type suivant:

$$M(p \& q) \leftrightarrow Mp \& Mq \& m(p, q) \qquad (2^*)$$

dont le troisième membre de la partie de la formule à droite du symbole d'équivalence est une *fonction modale de p et q* qu'il nous faudra interpréter et exprimer convenablement.

Nous admettrons pour l'instant que m(p, q) exprime une certaine *compatibilité logique*([16]) de p et q *indépendante* de la possibilité de p (Mp)

([14]) Voir [19], p. 17, ii, 2.

([15]) Voir [19], p. 17, ii, 1.

([16]) Nous considérons cette *compatibilité* Comp(p, q) de deux propositions p et q comme une condition *nécessaire* mais *non suffisante* pour la *possibilité M(p& q) de leur conjonction.*

Il est clair que cette acception du terme 'compatibilité' est différente de l'acception généralement acceptée par plusieurs logiciens d'après laquelle *compatibilité de p et q* et *possibilité de la conjonction de p et q* sont des notions *équivalentes.* La *compatibilité de p et q* impliquerait, donc, a la fois, *que p soit possible* et que *q soit possible.* (Voir, par exemple, Von Wright [19], p. 8: "Two propositions are incompatible, if their conjonction is impossible (and compatible if it is possible)" et p. 9: "The proposition that the propositions expressed by a and by b are compatible can be expressed by M(a&b)").

Or, si dans des travaux précédents (voir, par exemple, [14]), nous avons utilisé cette acception *forte* du terme '*compatibilité*', nous constatons aujourd'hui que, dans notre but actuel, il est indispensable de considérer, à côté d'elle (exprimée par nous aussi sous la forme 'M(p&q)',

et de la possibilité de q (Mq) et nous écrirons ainsi l'équivalence cherchée de la façon suivante:

$$M(p\&q) \leftrightarrow Mp\&Mq\&Comp(p, q) \qquad (2)$$

Nous exprimerons également par des équivalences analogues $M(p\& \sim q)$, $M(\sim p\&q)$ et $M(\sim p\& \sim q)$.

une acception *plus faible* dont les valeurs de vérité puissent être *indépendantes des valeurs de vérité de Mp et Mq.*

Cette acception *faible* de la *compatibilité* peut satisfaire pleinement les conditions initiales établies par Lewis et Langford lorsq'ils introduisent leur *relation de consistance poq* à la page 153 et suivantes de leur ouvrage *Symbolic Logic* [5]:

"When we speak of two propositions as 'consistent', we mean that it is not possible, with either one of them as premise, to deduce the falsity of the other. Thus if $p \strictif q$ has the intended meaning "q is deducible from p", then "p is consistent with q" may be defined as follows:

17.01. $poq = \sim(p \strictif \sim q)$

...

17.1. $p\&q \strictif poq$

...

Any two propositions, both of which are true, must be consistent. The implication is not reversible: two propositions may be consistent though one is false and the other true, or *though both are false*." ([5], pp. 153-154).

Dans notre cadre actuel, la vérité de chacune des propositions Mp, Mq et Comp(p, q) est *nécessaire* pour la vérité de M(p&q) mais aucune de ces trois vérités n'est, à elle seule, *suffisante* pour la vérité de M(p&q). Chacune des trois propositions peut prendre ses valeurs de vérité indépendamment des autres. Est il est indéniable que ces conditions formelles admettent des interprétations assez acceptables du point de vue intuitif. Voyons un exemple:

Soient les huit propositions suivantes:

A = j'écris un article dans ma bibliothèque à Genève;
F = j'écoute les noces de Figaro;
G = Je rencontre M. Grize à Neuchâtel;
K = M. Kalinowksi retourne au jour de son jugement, au sein d'un jury à Neuchâtel, de ma thèse "Calcul des Normes";
T = Je retourne au jour de la présentation de ma thèse "Calcul des Normes" devant un jury à Neuchâtel;
M_1 = je retourne au jour de mon mariage;
N = je retourne au jour de ma naissance;
M_2 = ma femme retourne au jour de son mariage.

Nous pouvons maintenant supposer que les variables propositionnelles p et q peuvent prendre leurs valeurs dans l'ensemble $\{A, F, G, K, T, M_1, N, M_2\}$ et essayer de construire, pour certains couples de valeurs de p et q, une table des valeurs de Mp, Mq, Comp(p, q) et M(p&q), de telle sorte que ces valeurs harmonisent avec notre intuition concernant la notion de *compatibilité* (ou de *consistance*, d'après la terminologie de Lewis et Langford).

Considérons maintenant l'équivalence suivante du calcul propositionnel CP:

$$p \leftrightarrow (p \vee q) \;\&\; (p \vee \sim q) \qquad \text{(PM, 4.43)([17])}$$

Cette équivalence nous permettra de *substituer*, dans les expressions (2a) et (2b), respectivement:

Voici, dans ce cadre, un exemple de table de valeurs qu'à notre avis, ne choque pas cette intuition.

Valeurs	*Valeurs*	*Valeurs de vérité de*			
de p	*de q*	*Mp*	*Mq*	*Comp(p, q)*	*M(p&q)*
A	*F*	1	1	1	1
A	*G*	1	1	0	0
K	*T*	0	0	1	0
A	*N*	1	0	0	0
M_1	M_2	0	0	1	0
M_1	*N*	0	0	0	0

Commentaires:

Deuxième ligne: *A* est bien possible et *G* l'est aussi, mais Comp(*A, K*) est faux, parce que je ne peut pas me trouver à la fois à Genève pour écrire mon article et à Neuchâtel pour avoir l'agréable surprise d'y rencontrer M. Grize.

Troisième ligne. *K* et *T* sont impossibles l'un et l'autre; or, non seulement Comp(*K, T*) n'est pas faux, mais encore M*T* impliquerait M*K* dans la mesure où si, dans un monde possible, je pouvais retourner au jour de la présentation de ma thèse "C. des N.", M. Kalinowski devrait pouvoir retourner, lui aussi, à ce jour, pour juger la thèse mentionnée.

Cinquième ligne. M_1 et M_2 sont impossibles l'un et l'autre; or, non seulement Comp(M_1, M_2) n'est pas faux, mais encore il est légitime de prétendre que si, dans un monde quelconque, je pouvais retourner au jour de mon mariage, ma femme devrait pouvoir retourner au jour de son mariage (qui fut le mien), puisque si je retourne là-bas, il serait nécessaire de la rencontrer.

etc., etc., etc.

Or, cette acception de la *compatibilité* (ou de la *consistance*) pourrait peut-être se distinguer de la *compatibilité forte* de la façon suivante:

Compatibilité forte de p et q $=_{\mathrm{Df}}$ M(p&q)

Compatibilité faible de p et q $=_{\mathrm{Df}}$ MM(p&q)

Cette distinction des deux acceptions de '*compatibilité*' faciliterait peut-être, à notre avis, une formalisation cohérente de situations avec différents *mondes possibles* et/ou différents *niveaux de possibilité*.

([17]) PM, suivi de 4.43 ou d'un autre numéro indique que la formule se trouvant dans la même ligne, à gauche, correspond à la thèse de *Principia Mathematica* [18] désigné de cette manière par MM. Whitehead et Russell.

	p	à	p & q
	p ∨ q	à	p
et	p ∨ ~ q	à	q

afin d'obtenir les expressions suivantes, qui doivent être acceptées par les systèmes modaux qui acceptent les principes exprimés par (2a) et (2b), au même titre que ces derniers:

$$\vdash Mp \rightarrow M(p \vee q) \ \& \ M(p \vee \sim q) \qquad (2a^*)$$

et *non* $\vdash (M(p \vee q) \ \& \ M(p \vee \sim q) \rightarrow Mp)$ (2b*)

Maintenant, pour remplacer (2a*) et (2b*), dans notre système par une *équivalence* exprimant Mp sous forme d'une *conjonction* des *disjonctions* appropriées, *substituons* d'abord dans la tautologie (PM, 4.43) ci-dessus du calcul propositionnel, respectivement:

	MP	à	p
	Cont q	à	q
et	~ Cont q	à	~ q

afin d'obtenir *l'équivalence* suivante:

$$Mp \leftrightarrow (Mp \vee \text{Cont } q) \ \& \ (Mp \vee \sim \text{Cont } q) \qquad (3)$$

Or, étant donné que l'opérateur "*il est contingent que*" (Cont) est défini de la façon suivante:

$$\text{Cont } p \leftrightarrow Mp \& M \sim p(^{18}), \qquad (4)$$

le premier membre de la partie à droite du symbole d'équivalence, dans la formule (3) ci-dessus, peut être transformé en vertu des équivalences suivantes:

$$Mp \vee \text{Cont } q \leftrightarrow Mp \vee (Mq \& M \sim q) \quad \text{(par (4) après q/p)}$$

$$Mp \vee (Mq \& M \sim q) \leftrightarrow (Mp \vee Mq) \ \& \ (Mp \vee M \sim q) \quad \text{(par PM, 4.41)}$$

$$(Mp \vee Mq) \ \& \ (Mp \vee M \sim q) \leftrightarrow M(p \vee q) \ \& \ M(p \vee \sim q) \quad \text{(par (1))}$$

(18) Voir [19], p. 8: "If a proposition and its negation are both possible, the proposition is called contingent"; ibid., p. 9: "The proposition that the proposition expressed by a is contingent can be expressed by Ma & M ~ a".

Si nous remplaçons maintenant dans la formule (3):

$$(Mp \vee \mathrm{Cont}\ q)$$

par son équivalent d'après la chaîne d'équivalences ci-dessus:

$$M(p \vee q)\ \&\ M(p \vee \sim q)$$

la formule (3) pourra être remplacée par la formule équivalente (5) ci-dessous:

$$Mp \leftrightarrow M(p \vee q)\ \&\ M(p \vee \sim q)\ \&\ (Mp \vee \sim \mathrm{Cont}\ q) \quad (5)$$

Nous exprimerons également par des équivalences analogues $M \sim p$, Mq et $M \sim q$.

Considérons maintenant une autre formule classique, la formule suivante dérivée du *principe spécial de possibilité* de Von Wright([19]):

$$Mp \vee M \sim p \quad (6)$$

([20])

Etant donné que (6) est une tautologie (*t*) de la logique modale, nous pouvons la remplacer dans notre système d'axiomes par l'équivalence suivante:

$$Mp \vee M \sim p \leftrightarrow t \quad (7)$$

Soit maintenant l'*axiome de possibilité* suivant, dérivé du *principe général de possibilité* de Von Wright([21]):

$$p \rightarrow Mp \quad (8)$$

([22])

Nous pouvons remplacer (8) par l'équivalence suivante:

$$p \leftrightarrow Mp\ \&\ p \quad (9)$$

([19]) Voir [19], p. 13.

([20]) Voir [19], p. 13: "Since a ∨ ~ a expresses the tautology of the proposition expressed by a, it cannot be the case that both Ma and M ~ a express false propositions. The above restrictioncan be laid down as a (Special) Principle of Possibility:

Any given proposition either is itself possible or has a negation that is possible".

([21]) Voir [19], p. 21: "*(General) Principle of Possibility*:

If a proposition is true, then it is also possible".

([22]) Voir [19], p. 84:

"*Axioms*:

...

Group B. 1. a → Ma. The Axiom of Possibility."

puisque nous avons l'équivalence suivante de (8) et (9):

$$(p \rightarrow Mp) \leftrightarrow ((Mp \& p) \leftrightarrow p) \qquad \text{(en vertu de PM, 4.71)}$$

Or, les formules (8) et (9) ont leurs *duales*, reliant Lp (*"il est necessaire que p"*) et p, si nous admettons une autre formule classique universellement admise par les systèmes modaux, *la définition* suivante de l'opérateur *"il est nécessaire que"* (L) en fonction de l'opérateur *"il est possible que"* (M) et de la négation:

$$Lp \leftrightarrow \sim M \sim p \text{([23])} \qquad (10)$$

Nous avons, en effet, la chaîne d'équivalences suivante:

$$(p \rightarrow Mp) \leftrightarrow (\sim Mp \rightarrow \sim p) \qquad \text{(par PM, 4.1)}$$
$$(\sim Mp \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (\sim M \sim p \rightarrow p) \qquad \text{(par } \sim p/p \text{ et PM, 4.13)}$$
$$(\sim M \sim p \rightarrow p) \leftrightarrow (Lp \rightarrow p) \qquad \text{(par (10))}$$

De (8) nous déduisons donc, par la chaîne d'équivalences précédente, la duale (11) ci-dessous:

$$LP \rightarrow p \qquad (11)$$

Or, nous pouvons remplacer (11) par la formule équivalente (12) cidessous:

$$p \leftrightarrow (Lp \vee p) \qquad \text{(12)(par PM, 4.72)}$$

Finalement, nous déduirons des équivalences (9) et (12) l'équivalence (13) suivante:

$$p \leftrightarrow Mp \;\&\; (Lp \vee p) \qquad (13)$$

que nous assumerons dans notre système d'axiomes parce qu'elle relie possibilité, vérité et nécessité dans une seule équivalence.

Nous compléterons notre système par l'inclusion de la définition classique de l'implication stricte:

([23]) Voir [1], Ch. II, Sect. 3, p. 44:
30.36. 'Lp' for '$\sim M \sim p$'.
Voir aussi [19], p. 9: "The proposition that the proposition expressed by a is necessary, is the negation of the proposition that its negation is possible. It can thus be expressed by $\sim M \sim a$. We shall alsu use the shorter expression Na".

$$p \strictif q \qquad =_{\mathrm{Df}} L(p \rightarrow q) \tag{14}$$

parmi les définitions de ce dernier.

Nous fonderons donc notre *système équivalentiel commun de logique modale CESML* sur 8 équivalences spécifiques de cette logique. Nous les distribuerons en deux groupes: le premier, formé de *5 axiomes* et le deuxième de *3 définitions*, de la façon suivante:

Axiomes	*Numéro de la formule dans le texte*
A1	(1)
A2	(5)
A3	(7)
A4	(2)
A5	(13)
Définitions	
[Def L]	(10)
[Def Cont]	(4)
[Def $\strictif$]	(14)

Le système équivalentiel commun de logique modale CESML.

Axiomes

A0.	Toutes les tautologies du calcul propositionnel CP.		
A1.	$M(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$Mp \vee Mq$
A2.	Mp	$\leftrightarrow$	$M(p \vee q) \,\&\, M(p \vee \sim q) \,\&\, (Mp \vee \sim \mathrm{Cont}\, q)$
A3.	$Mp \vee M \sim p$	$\leftrightarrow$	t
A4.	$M(p \& q)$	$\leftrightarrow$	$Mp \,\&\, Mq \,\&\, \mathrm{Comp}(p, q)$
A5.	p	$\leftrightarrow$	$Mp \,\&\, (Lp \vee p)$

Définitions

[Def L]	Lp	$=_{\mathrm{Df}}$	$\sim M \sim p$
[Def Cont]	$\mathrm{Cont}\, p$	$=_{\mathrm{Df}}$	$Mp \,\&\, M \sim p$
[Def $\strictif$]	$p \strictif q$	$=_{\mathrm{Df}}$	$L(p \rightarrow q)$

Règles de formation

RF1. Une *formule du calcul propositionnel CP* seule ou précédée de M, L ou Cont est une *formule bien formée*;

RF2. Une *formule bien formée* précédée de $\sim$ est une *formule bien formée*;

RF3. Deux *formules bien formées* reliées par ∨, &, →, ↔, | ou w constituent une *formule bien formée*;
RF4. Une *formule bien formée* contenant au moins une occurrence de M, L ou Cont et précédée de M, L ou Cont est une *formule bien formée de degré modal supérieur à 1.*

Règles de transformation
RT1. Règle de substitution uniforme;
RT2. Règle de dérivation ou modus ponens:
$g(p, q) \rightarrow h(p, q), g(p, q) \vdash h(p, q)$;
RT3. Règle de nécessitation:
Si $\vdash g(p, q)$, alors $\vdash Lg(p, q)$.

Note

Dans cette étude, nous associons *initialement* un nombre caractéristique à toute formule de *degré modal non supérieur à 1* (construite donc *sans l'application de la règle RF4*).

Pour l'application de la *méthode arithmétique de décision* (voir le paragraphe 2.3 ci-dessous) aux formules *de degré modal supérieur à 1* (construites *en appliquant RF4*), il faudra procédér de la façon suivante:

1. Dans le cas du *système* S_5, on suivra les indications données à la fin de la *note 13* de cette étude;

2. Dans le cas des systèmes moins forts que S_5, on simplifiera la formule donnée remplaçant d'abord chacune des *parties maximales de degré modal 0 ou 1* par son *nombre caractéristique*, entre parenthèses et en appliquant ensuite *les réductions autorisées* par le système considéré.

Pour une arithmétisation directe exhaustive de chaque système de logique modale, il faudra suivre, à notre avis, les critères suggérés dans la *Conclusion* et la *Note 39.*

2. *Fondements de l'arithmétisation du système modal CESML*([24])

2.0. *Système de numération hexadécimal (de base 16)*

Nous associerons initialement a toute *formule bien formée* de degré modal 0 ou 1 (voir la Note à la fin du paragraphe 1) un *nombre naturel*

([24]) Il nous paraît instructif de comparer cette arithmétisation de la *logique modale* à celle que nous avons proposé récemment dans [16] pour la *logique déontique*, afin de constater les analogies et les contrastes formels des deux types de systèmes.

(positif ou zéro) de 7 chiffres hexadécimaux 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A ($=10_{10}$), B ($=11_{10}$), C ($=12_{10}$), D ($=13_{10}$), E ($=14_{10}$), F ($=15_{10}$), en omettant d'écrire, lorsque le nombre a moins de sept chiffres significatifs, les zéros à gauche de ces chiffres.

2.1. Nombres associés aux composants conjonctifs initiaux des formules du système.

$N(M(p \vee q))$	$=2^0=\mathit{1}$	$N(Mp \vee \sim \text{Cont } q)$	$=2^4+2^9=\mathit{210}$
$N(M(p \vee \sim q))$	$=2^1=\mathit{2}$	$N(M \sim p \vee \sim \text{Cont } q)$	$=2^7+2^{10}=\mathit{480}$
$N(M(\sim p \vee q))$	$=2^2=\mathit{4}$	$N(Mq \vee \sim \text{Cont } p)$	$=2^6+2^8=\mathit{140}$
$N(M(\sim p \vee \sim q))$	$=2^3=\mathit{8}$	$N(M \sim q \vee \sim \text{Cont } p)$	$=2^5+2^{11}=\mathit{820}$

$N(\text{Comp}(p, q)$	$=2^{12}+2^{17}+2^{22}=\mathit{421.000}$
$N(\text{Comp}(p, \sim q))$	$=2^{15}+2^{16}+2^{21}=\mathit{218.000}$
$N(\text{Comp}(\sim p, q))$	$=2^{14}+2^{19}+2^{20}=\mathit{184.000}$
$N(\text{Comp}(\sim p, \sim q))$	$=2^{13}+2^{18}+2^{23}=\mathit{842.000}$

2.2. Opérations, relations et constantes arithmétiques respectivement associées aux opérations, relations et constantes logiques

Formules logiques	g, h, ...	N(g), N(h), ... $\leqq$ F.FFF.FFF([25])	*Entiers en hexadécimal*
Opérations logiques		*Opérations arithmétiques*	
Négation	$\sim g$	F.FFF.FFF-N(g)	Complément binaire([26]) (*Tableau I*)
Disjonction	$g \vee h$	(N(g), N(h))	*Infimum* binaire([27]) (*Tableau II*)
Conjonction	g & h	[N(g), N(h)]	*Supremum* binaire([28]) (*Tableau III*)
Relations logiques		*Relations arithmétiques*	
Implication	$g \rightarrow h$	N(g) : N(h)	Absorption binaire([29]) (*Tableau IV*)

([25]) Voir nos observations dans la *Conclusion* sur l'utilité d'une expression du nombre Φ (associé à toute *contradiction*) invariante par rapport au nombre des variables propositionnelles prises en considération, ainsi que notre suggestion dans ce sens à la note 39.

([26]) Le *complément binaire* d'un nombre N, écrit en hexadécimal, est le nombre dont chaque chiffre est égal au complément à F (F-N_i) du chiffre N_i du même rang du nombre donné N.

([27]) L'*infimum* (N(g), N(h)) (respectivement *supremum* [N(g), N(h)]) *binaire* de deux nombres N(g), N(h) est le nombre dont le chiffre de rang i est l'*infimum* (respectivement *supremum*) *binaire* des chiffres du même rang des deux nombres donnés.

([28]) Voir la note 27.

([29]) Un nombre N(g) *absorbe* un autre nombre N(h) si et seulement si chaque chiffre de N(g) absorbe le chiffre du même rang de N(h).

Equivalence	$g \leftrightarrow h$	$N(g) = N(h)$	Egalité
Contradiction	g w h	[N(g), N(h)] = F.FFF.FFF([30])	
Incompatibilité	$g \mid h$	N(g) + N(h) = F.FFF.FFF([31])	
Constantes logiques		*Constantes arithmétiques*	
Tautologie	*t*	0	Zéro
Contradiction	*f*	2^{28}-1 = F.FFF.FFF([32])	*Supremum* de l'ensemble([33]) des nombres caractéristiques

2.3 Méthode arithmétique de décision pour le système CESML

Une formule bien formée g(p, q) de degré modal 0 ou 1 est

1. prouvée
2. refutée

dans le système CESML si et seulement si *on prouve* que son *nombre caractériqtique* N(g(p, q)) est, respectivement:

1. égal à 0;
2. égal à F.FFF.FFF.

Pour deux formules bien formées de degré 1 ou 0 arbitrairement choisies g(p, q) et h(p, q), on aura *prouvé* que:

3. g(p, q) implique h(p, q);
4. g(p, q) est équivalente à h(p, q);
5. g(p, q) est incompatible avec h(p, q);
6. g(p, q) est contradictoirement opposée à h(p, q);
ou *7. g(p, q) est alternativement opposée à h(p, q)*

si et seulement si *on prouve* que, pour chaque couple G_i, H_i de chiffres du même rang des nombres G et H associés aux deux formules g(p, q) et h(p, q), respectivement:

([30]) Voir les notes 25 et 26.
([31]) Voir les notes 25 et 26.
([32]) Voir les notes 25 et 26.
([33]) Il s'agit de l'ensemble des 2^{28} nombres associés aux formules du CESML pour deux variables propositionnelles p, q.

3. G_i *absorbe* H_i;
4. G_i *est égal* à H_i;
5. *le supremum* $[G_i, H_i]$ *est égal à F;*
6. la *somme* $G_i + H_i$ *est égale à F;*
ou *7.* le *infimum* (G_i, H_i) *est égal à 0.*

Il nous suffit donc de définir nos opérations et notre relation pour des nombres d'un seul chiffre hexadécimal. Nous le faisons ci-dessous.

Le complément $\bar{X}$ d'un nombre X est égal à F-X, comme l'indique sa table de valeurs du Tableau I.

TABLEAU I

Table des valeurs du complément $\bar{X}$ d'un nombre X à un seul chiffre hexadécimal.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
											10	11	12	13	14	15
$\bar{X}$	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	15	14	13	12	11	10										

Le infimum (X, Y) de deux nombres X et Y est égal à la somme de toutes les puissances de 2 qui font partie de l'expression binaire de X et de l'expression binaire de Y.

L'opération (X, Y) s'effectue ainsi dans les calculatrices qui utilisent l'hexadécimal, comme la petite calculatrice portable HP-16C de 120 grammes, par la fonction *AND* appliquée à X et Y.

Les valeurs de (X, Y) pour deux nombres d'un seul chiffre hexadécimal sont indiquées dans la table de valeurs du Tableau II.

TABLEAU II

Table des valeurs de l'infimum (X, Y) des nombres X,Y à un seul chiffre hexadécimal

Y / X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8
9	0	1	0	1	0	1	0	1	8	9	8	9	8	9	8	9
A 10	0	0	2	2	0	0	2	2	8	8	A	A	8	8	A	A
B 11	0	1	2	3	0	1	2	3	8	9	A	B	8	9	A	B
C 12	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	C	C	C	C
D 13	0	1	0	1	4	5	4	5	8	9	8	9	C	D	C	D
E 14	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	A	A	C	C	E	E
F 15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Le supremum [X, Y] de deux nombres X et Y est égal à la somme de toutes les puissances de 2 qui font partie de l'expression binaire de X ou de l'expression binaire de Y.

L'opération [X, Y] s'effectue ainsi dans les calculatrices qui utilisent l'hexadécimal, comme la petite calculatrice portable HP-16C déjà mentionnée, par la fonction *OR* appliquée à X et Y.

Les valeurs de [X, Y] pour deux nombres d'un seul chiffre hexadécimal sont indiquées dans la table de valeurs du Tableau II.

TABLEAU III

Table des valeurs du supremum [X, Y] des nombres X,Y à un seul chiffre hexadécimal

Y / X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	B	B	D	D	F	F
2	2	3	2	3	6	7	6	7	A	B	A	B	E	F	E	F
3	3	3	3	3	7	7	7	7	B	B	B	B	F	F	F	F
4	4	5	6	7	4	5	6	7	C	D	E	F	C	D	E	F
5	5	5	7	7	5	5	7	7	D	D	F	F	D	D	F	F
6	6	7	6	7	6	7	6	7	E	F	E	F	E	F	E	F
7	7	7	7	7	7	7	7	7	F	F	F	F	F	F	F	F
8	8	9	A	B	C	D	E	F	8	9	A	B	C	D	E	F
9	9	9	B	B	D	D	F	F	9	9	B	B	D	D	F	F
A 10	A	B	A	B	E	F	E	F	A	B	A	B	E	F	E	F
B 11	B	B	B	B	F	F	F	F	B	B	B	B	F	F	F	F
C 12	C	D	E	F	C	D	E	F	C	D	E	F	C	D	E	F
D 13	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F
E 14	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F
F 15	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

TABLEAU IV

Table indicatrice des couples <X, Y> de valeurs de X,Y pour lesquels X : Y est vraie

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Y											10	11	12	13	14	15
X																
0	V															
1	V	V														
2	V		V													
3	V	V	V	V												
4	V				V											
5	V	V			V	V										
6	V		V		V		V									
7	V	V	V	V	V	V	V	V								
8	V								V							
9	V	V							V	V						
A 10	V		V						V		V					
B 11	V	V	V	V					V	V	V	V				
C 12	V				V				V				V			
D 13	V	V			V	V			V	V			V	V		
E 14	V		V		V		V		V		V		V		V	
F 15	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

La relation arithmétique X : Y (x absorbe Y) entre deux nombres X et Y est vraie (V) si et seulement si toute puissance de 2 qui fait partie de l'expression binaire de Y fait aussi partie de l'expression binaire de X.

Les couples ordonnés $<X, Y>$ de valeurs X et Y pour lesquels la relation $X : Y$ (X absorbe Y) est *vraie* sont indiqués par la lettre "V" dans la table des valeurs de vérité de la relation mentionnée du Tableau IV. (On a omis d'écrire les lettres "F" pour les couples correspondants pour faire plus visible la symétrie particulière de la figure dessinée par les "V").

3. Traduction des équivalences logiques fondamentales (axiomes spécifiques[34]) et définitions) de CESML par les égalités arithmétiques correspondantes dans le modèle arithmétique du système

TABLEAU V

Equivalences logiques fondamentales du CESML

A1.	$M(p \vee q)$	$\leftrightarrow Mp \vee Mq$
A2.	Mp	$\leftrightarrow M(p \vee q) \& M(p \vee \sim q) \& (Mp \vee \sim \mathrm{Cont}\, q)$
A3.	$Mp \vee M \sim p$	$\leftrightarrow t$
A4.	$M(p \& q)$	$\leftrightarrow Mp \& Mq \& \mathrm{Comp}(p,q)$
A5.	p	$\leftrightarrow Mp \& (Lp \vee p)$
[Def L]	Lp	$=_{\mathrm{Df}} \sim M \sim p$
[Def Cont]	$\mathrm{Cont}\, p$	$=_{\mathrm{Df}} Mp \& M \sim p$
[Def $\prec$]	$p \prec q$	$=_{\mathrm{Df}} L(p \rightarrow q)$

E1. $N(M(p \vee q)) = (N(Mp), N(Mq))$
E2. $N(Mp) = [N(M(p \vee q)), N(M(p \vee \sim q)), N(Mp \vee \sim \mathrm{Cont}\, q)]$
E3. $(N(Mp), N(M \sim p)) = 0$
E4. $N(M(p \& q)) = [N(Mp), N(Mq), N(\mathrm{Comp}(p,q))]$

([34]) Les axiomes *spécifiques* (non empruntés au *calcul propositionnel classique*) sont les axiomes A1, A2, A3, A4 et A5 ci-dessus mentionnés. Quant à A0, il peut être exprimé par n'importe quelle *base complète* pour le calcul propositionnel, par exemple, le *sistème des quatre axiomes de Hilbert-Ackermann* (Voir [2], § 10. *Die Axiome des Aussagenkalküls*, p. 23), que nous avons démontré arithmétiquement dans [9], p. 378:

a) $(p \vee p) \rightarrow p$
b) $p \rightarrow (p \vee q)$
c) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
d) $(p \rightarrow) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$
...

E5. N(p) = [N(Mp),(N(Lp),N(p))]
E6. N(Lp) = F.FFF.FFF-N(M ~ p)
E7. N(Cont p) = [N(Mp),N(M ~ p)]
E8. N(p ⥽ q) = N(L(p → q))

4. Calcul des nombres qui doivent rester associés aux différents types de formules du systèmes CESML en vertu des 12 associations initiales de 2.1 et des égalités arithmétiques ci-dessus, exigées par les axiomes et définitions fondamentales du système

4.1. Nombres associés aux formules qui expriment des possibilités pures

Les nombres associés aux quatre formules exprimant les possibilités des quatre *disjonctions* non tautologiques des variables p, ~ p, q et ~ q figurent dans la première colonne de 2.1. Ces quatre nombres et les quatre nombres associés, d'après la deuxième colonne de 2.1, aus formules du type Mp ∨ ~ Cont q, etc. sont nécessaires et suffisants pour obtenir, par l'application de l'égalité arithmétique E2, imposée par l'axiome A2, et des égalités analogues imposées par les thèses obtenues de A2 en substituant successivement ~ p, q et ~ q à p, les nombres associés, respectivement à Mp, M ~ p, Mq et M ~ q. Nous aurons ainsi les valeurs suivantes:

N(Mp)	=	[1, 2, 210]	=	213
N(M ~ p)	=	[4, 8, 480]	=	48C
N(Mq)	=	[1, 4, 140]	=	145
N(M ~ q)	=	[2, 8, 820]	=	82A

On peut vérifier d'une manière immédiate que les quatre associations ci-dessus satisfont l'axiome A1 et les thèses derivées de celui-ci par des substitutions, puisque les valeurs des *infimes* (213, 145) = 1, (213, 82A) = 2, (48C, 154) = 4 et (48C, 82A) = 8 correspondent bien aux nombres associés aux disjonctions de départ d'après la première colonne de 2.1, tandis que l'annulation des *infimes* associés respectivement, aux disjonctions Mp ∨ M ~ p et Mq ∨ M ~ q – puisqu'on a effectivement (213, 48C) = 0 et (145, 82A) = 0 – assure, por sa part, la satisfaction du *principe spécial de possibilité*, exprimé par notre axiome A3 et par la condition arithmétique correspondante E3.

D'une manière entièrement analogue à la précédente, nous utiliserons l'égalité arithmétique E4, exigée par notre axiome A4, ainsi que les égalités analogues exigées par les thèses obtenues de A4 en substituant ~ p, q et ~ q à p, pour calculer, en fonction des quatre nombres caractéristiques que nous venons d'obtenir et des quatre nombres associés, d'après la troisième colonne de 2.1, aux formules du type Comp(p,q) etc., les nombres qui doivent rester associer aux formules M(p&q), M(p& ~ q), M(~ p&q) et M(~ p& ~ q). Voici ces calculs:

N(M(p&q)) = [213, 145, 421.000] = 421.357
N(M(p& ~ q)) = [213, 82A, 218.000] = 218.A3B
N(M(~ p&q)) = [48C, 145, 184.000] = 184.5CD
N(M(~ p& ~ q)) = [48C, 82A, 842.000] = 842.CAE

Ces dernières associations:

1. *satisfont*, elles aussi, *l'axiome A1* et ses thèses dérivées par substitution. En effet:

(421.357, 218.A3B) = 213 = N(Mp) *q.e.d.*
(184.5CD, 842.CAE) = 48C = N(M ~ p) *q.e.d.*
(421.357, 184.5CD) = 145 = N(Mq) *q.e.d.*
(218.A3B, 842,CAE) = 82A = N(M ~ q) *q.e.d.*

2. *satisfont* également le *principe spécial de possibilité*, exprimé par l'axiome A2 et ses thèses dérivées par substitution, puisque les *disjonctions* entre les possibilités du type M(p&q), etc. et les possibilités du type M(~ p∨ ~ q), etc. – dont les *arguments* sont les contradictoires respectifs – sont *tautologiques*. En effet, les conditions requises (voir, à cet effet, sous *2.3. Methode arithmétique de décision pour le système CESML*, cas *7.*) sont *satisfaites*:

(421.357, 8) = 0 *q.e.d.*
(218.A3B, 4) = 0 *q.e.d.*
(184.5CD, 2) = 0 *q.e.d.*
(842.CAE, 1) = 0 *q.e.d.*

Quant aux nombres associés aux formules exprimant des *contingences*, ils pourront être calculés immédiatement en utilisant *l'égalité E7.* qui traduit la définition même de *la contingence de p*, ainsi que par les égalités obtenues de E7. par les substitutions appropriées. Nous obtiendrons ce cette manière:

N(Cont p) = N(Cont ~ p) = [213, 48C] = 69F
N(Cont q) = N(Cont ~ q) = [145, 82A] = 96F

$N(Cont(p\&q)) = N(Cont(\sim p \vee \sim q)) = [421.357, 8] = 421.35F$
$N(Cont(p\& \sim q)) = N(Cont(\sim p \vee q)) = [218.A3B, 4] = 218.A3F$
etc. etc.

4.2. Nombres associés aux formules qui expriment des nécessités pures

On peut calculer immédiatement tous les nombres associés aux formules exprimant des nécessités pures en utilisant exclusivement, d'une part *l'égalité E6* qui traduit la définition classique de *la nécessité de p,* ainsi que les égalités obtenues de E6 par les substitutions appropriées et, d'autre part, *les nombres associées aux formules exprimant les possibilités des arguments contradictoires respectifs.* On aura ainsi :

$N(L(p \vee q))$	=	F.FFF.FFF-842.CAE = F.7BD.351
$N(L(p \vee \sim q))$	=	F.FFF.FFF-184.5CD = F.E7B.A32
$N(L(\sim p \vee q))$	=	F.FFF.FFF-218.A3B = F.DE7.5C4
$N(L(\sim p \vee \sim q))$	=	F.FFF.FFF-421.357 = F.BDE.CA8
$N(Lp)$	=	F.FFF.FFF-48C = F.FFF.B73
$N(L \sim p)$	=	F.FFF.FFF-213 = F.FFF.DEC
$N(Lq)$	=	F.FFF.FFF-82A = F.FFF.7D5
$N(L \sim q)$	=	F.FFF.FFF-145 = F.FFF.EBA
$N(L(p\&q))$	=	F.FFF.FFF-8 = F.FFF.FF7
$N(L(p\& \sim q))$	=	F.FFF.FFF-4 = F.FFF.FFB
$N(L(\sim p\&q))$	=	F.FFF.FFF-2 = F.FFF.FFD
$N(L(\sim p\& \sim q))$	=	F.FFF.FFF-1 = F.FFF.FFE

Il va sans dire que toutes ces nouvelles associations, entre formules exprimant des nécessités pures et les nombres caractéristiques qui leur correspondent, *satisfont* la *loi classique* (duale de la loi exprimant la distributivité de la possibilité par rapport à la disjonction) qui exprime, elle, *la distributivité de la nécessité par rapport à la conjonction*:

$$L(p\&q) \leftrightarrow Lp\&Lq$$

De ce fait, nous aurions pu calculer aussi le nombre associé à la nécessité de p&q comme le *supremum* des nombres associés, respectivement, à la nécessité de p et à la nécessité de q. En effet :

$N(L(p\&q)) = [N(Lp), N(Lq)] = [F.FFF.B73, F.FFF.7D5] =$ *F.FFF.FF7* *q.e.d.*
etc. etc. etc.

4.3 Nombres associés aux formules du calcul propositionnel

L'assignation de nombres caractéristiques appropriés à toutes les formules du calcul propositionnel, *dans le cadre d'une arithmétisation de la logique modale*, de telle sorte que ces nombres soient *invariants* pour toutes les formules qui appartiennent à la même *classe d'équivalence*, constitue le véritable *point crucial* de notre recherche et nous croyons que la solution, heureuse ou malheureuse, de ce problème devra confirmer ou infirmer la validité de notre méthode de décision.

En effet:

1. L'assignation de tels *invariants numériques* aux formules du calcul propositionnel d'une même classe d'équivalence pour n'importe quel nombre de variables mais *en dehors du cadre modal*, n'offre aucune difficulté. Dans des travaux précédents([35]), nous avons montré à plusieurs reprises que l'ensemble des 2^n nombres naturels (positifs ou zéro) compris entre 0 et 2^n-1 (pour n'importe quelle valeur de $n > 1$), muni de nos opérations *complément binaire, infimum binaire* et *supremum binaire*, constitue un *treillis distributif et complémenté* (ou *treillis de Boole*), ayant donc la même structure que le *calcul propositionnel* et pouvant ainsi être utilisé (comme nous l'avons fait régulièrement) comme *modèle arithmétique* de ce calcul. Dans un tel modèle, aux formules du calcul propositionnel.

limités à	*seront associés des nombres à*		
2 variables	1 chiffre hexadécimal	$0 \leqq N(g(p,q)) \leqq$	F
3 variables	2 chiffres hexadécimaux	$0 \leqq N(g(p,q,r)) \leqq$	FF
4 variables	4 chiffres hexadécimaux	$0 \leqq N(g(p,q,r,s)) \leqq$	F.FFF
etc. etc.			

2. L'assignation de tels *invariants numériques* aux formules d'un *calcul modal (non aléthique)* n'admettant des formules du calcul propositionnel que lorsque ces dernières sont les *arguments de foncteurs modaux* (non aléthiques) – par exemple, aux formules d'un *calcul déontique* comme celui du premier Von Wright([36]) – peut être réalisée également sans trop

([35]) Voir, par exemple, [10], § 3 et § 4, pp. 185-195.

([36]) Voir Georg H. Von Wright, "Deontic Logic", *Mind*, Vol. 60 (1951), n. 37, pp. 1-15, ainsi que [19] et Georg H. Von Wright, "Norms, Truth, and Logic" *in* A.A. Martino (éd.), *Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems*, Amsterdam, North-Holland, 1982, pp. 3-20 (système formulé aux pp. 17-18).

de difficulté, et nous l'avons fait dans un travail publié en 1987 à Genève([37]).

3. Il est bien plus difficile, par contre, d'assigner de tels *invariants numériques* aux formules du calcul propositionnel qui appartiennent à la même classe d'équivalence lorsque ces dernières doivent être *insérées* dans le cadre d'un *système modal aléthique*, comportant donc, à côté des formules du calcul propositionnel, des formules exprimant des *possibilités pures*, des formules exprimant des *nécessités pures* (*duales* des précédentes) et des *formules mixtes*, construites par l'application de toutes les combinaisons possibles aux formules des trois groupes précités.

Dans un tel cadre, en effet, les nombres assignés aux formules du calcul propositionnel devront satisfaire, à la fois,
a) les conditions aritmétiques associées aux conditions logiques – que nous appellerons *verticales* – concernant les relations de ces formules avec les *formules modales pures* – exprimant soit des *possibilités pures*, soit des *nécessités pures*. Ces conditions logiques auront les formes suivantes.

$$L(p \vee q) \quad \rightarrow p \vee q \rightarrow M(p \vee q) \tag{15}$$
$$Lp \quad \rightarrow p \quad \rightarrow Mp \tag{16}$$
$$L(p \& q) \quad \rightarrow p \& q \rightarrow M(p \& q) \tag{17}$$

ou, si on veut (voir *l'axiome A.5),*

$$p \vee q \quad \leftrightarrow M(p \vee q) \ \& \ (L(p \vee q) \vee (p \vee q)) \tag{15*}$$
$$p \quad \leftrightarrow \quad Mp \ \& \ (L(p \vee p) \tag{16*}$$
$$p \& q \quad \leftrightarrow M(p \& q) \ \& \ (L(p \& q) \vee (p \& q)) \tag{17*}$$

et b) les conditions arithmétiques associées aux conditions logiques – que nous appellerons *horizontales* – concernant les relations réciproques entre les formules du calcul propositionnel elles-mêmes. Ces relations sont exprimées par les *lois* du calcul propositionnel (notamment, les lois de la *distributivité réciproque de la disjonction et la conjonction*, la loi de la *double négation* et les lois *de De Morgan*).

Dans cette perspective nous avons trouvé que les assignation suivantes:

$$N(p \& q) \quad = 7.777.777$$
$$N(p \& \sim q) \quad = B.BBB.BBB$$

([37]) Voir [16]

$N(\sim p \& q) \quad = \text{D.DDD.DDD}$
$N(\sim p \& \sim q) = \text{E.EEE.EEE}$

nous donnent la solution du problème mentionné, parce que:

a) ces assignations *satisfont* les quatre conditions arithmétiques qui traduisent les conditions logiques *verticales* du type (17), à savoir:

F.FFF.FF7 : 7.777.777 : 421.357
F.FFF.FFB : B.BBB.BBB : 218.A3B
F.FFF.FFD : D.DDD.DDD : 184.5CD
F.FFF.FFE : E.EEE.EEE : 842.CAE

Vérifier, en effet, dans le *Tableau IV*, que les 7 du premier nombre de la deuxième colonne absorbent les chiffres du même rang (4, 2, 1, 3, 5, 7) du premier nombre de la dernière colonne, que les B du deuxième nombre de la deuxième colonne absorbent les chiffres du même rang (2, 1, 8, A, 3, B) du deuxième nombre de la dernière colonne, et ainsi de suite...

b) les nombres qui restent associés aux autres formules du calcul propositionnel, obtenus des 4 précédents par l'application des égalités exigées par les *lois précités* du calcul propositionnel (conditions *horizontales*), *satisfont* aussi, de leur côté, les conditions arithmétiques *verticales* les concernant, et plus précisément:

b_1) les nombres qui restent associés, en vertu des calculs mentionnés, à p, $\sim$ p, q et $\sim$ q, à savoir:

$N(p) \quad = 3.333.333$
$N(\sim p) = \text{C.CCC.CCC}$
$N(q) \quad = 5.555.555$
$N(\sim q) = \text{A.AAA.AAA}$

satisfont les conditions arithmétiques qui traduisent les conditions logiques du type (16), à savoir;

F.FFF.B73 : 3.333.333 : 213
F.FFF.DEC : C.CCC.CCC : 48C
F.FFF.7D5 : 5.555.555 : 145
F.FFF.EBA : A.AAA.AAA : 82A

Vérifier les absorptions, chiffre par chiffre, dans le *Tableau IV.*

b_2) les nombres qui restent associés, en vertu des calculs mentionnés, à $(p \vee q)$, $(p \vee \sim q)$, $(\sim p \vee q)$ et $(\sim p \vee \sim q)$, à savoir:

$N(p \vee q) = 1.111.111$
$N(p \vee \sim q) = 2.222.222$
$N(\sim p \vee q) = 4.444.444$
$N(\sim p \vee \sim q) = 8.888.888$

satisfont, à leur tour, les conditions arithmétiques qui traduisent les conditions logiques du type (15), à savoir:

F.7BD.351	:	1.111.111	:	1
F.E78.A32	:	2.222.222	:	2
F.DE7.5C4	:	4.444.444	:	4
F.BDE.CA8	:	8.888.888	:	8

Pour arriver à ces résultats, nous avons dû, naturellement, choisir de façon appropriée les sommes de 2 (respectivement, de 3) puissances de 2 à assigner aux formules du type $Mp \vee \sim$ Cont q (respectivement, Comp(p,q)), d'après les deux dernières colonnes de 2.1.

Nous résumons dans le *Tableau VI* ci-dessous les nombres associés aux formules fondamentales de notre système CESML.

TABLEAU VI

Nombres associés aux formules fondamentales du système modal CESML

Formules	*Nombres*	*Formules*	*Nombres*	*Formules*	*Nombres*
		Formules exprimant des possibilités pures			
M(p ∨ q)	*1*	Mp	*213*	M(p&q)	*421.357*
M(p ∨ ~ q)	*2*	M ~ p	*48C*	M(p& ~ q)	*218.A3B*
M(~ p ∨ q)	*4*	Mq	*145*	M(~ p&q)	*184.5CD*
M(~ p ∨ ~ q)	*8*	M ~ q	*82A*	M(~ p& ~ q)	*842.CAE*
		Formules du calcul propositionnel			
p ∨ q	*1.111.111*	p	*3.333.333*	p&q	*7.777.777*
p ∨ ~ q)	*2.222.222*	~ p	*C.CCC.CCC*	p& ~ q	*B.BBB.BBB*
~ p ∨ q	*4.444.444*	q	*5.555.555*	~ p&q	*D.DDD.DDD*
~ p ∨ ~ q	*8.888.888*	~ q	*A.AAA.AAA*	~ p& ~ q	*E.EEE.EEE*
		Formumes exprimant des nécessités pures			
L(p ∨ q)	*F.7BD.351*	Lp	*F.FFF.B73*	L(p&q)	*F.FFF.FF7*
L(p ∨ ~ q)	*F.E7B.A32*	L ~ p	*F.FFF.DEC*	L(p& ~ q)	*F.FFF.FFB*
L(~ p ∨ q)	*F.DE7.5C4*	Lq	*F.FFF.7D5*	L(~ p&q)	*F.FFF.FFD*
L(~ p ∨ ~ q)	*F.BDE.CA8*	L ~ q	*F.FFF.EBA*	L(~ p& ~ q)	*F.FFF.FFE*

Nombres associés à d'autres formules, définies par des équivalences:

Formules données	*Formules équivalentes*	*Nombres associés*
Cont p	↔ Mp&M ~ p	*69F*
p&Cont p	↔ p&M ~ p	*3.333.7BF*
~ p&Cont p	↔ ~ p&Mp	*C.CCC.EDF*
~ Cont p	↔ Lp ∨ L ~ p	*F.FFF.960*
Cont q	↔ Mq&M ~ q	*96F*
q&Cont q	↔ q&M ~ q	*5.555.D7F*
~ q&Cont q	↔ ~ q&Mq	*A.AAA.BEF*
~ Cont q	↔ Lq ∨ L ~ q	*F.FFF.690*

Nombres associés à d'autres formules mixtes importantes:

Formules logiques	*Nombres associés*	*Formules logiques*	*Nombres associés*
Lp & q	F.FFF.F77	Mq & q	5.555.757
Lq & p	F.FFF.7F7	Mq & p	3.333.377
Lp & Mq	F.FFF.B77	Mp ∨ q	11
Lq & Mp	F.FFF.7D7	Mq ∨ p	101

TABLEAU VII

Traduction des relations logiques qui relient des fonctions de p par des relations arithmétiques entre leurs nombres associés

F.FFF.960
~ Cont p
Lp ∨ L ~ p

F.FFF.B73 Lp L ~ p *F.FFF.DEC*

3.333.333 *C.CCC.CCC*

p ~ p

3.333.120 C.CCC.840
p ∨ L ~ p ~ p ∨ Lp

3.333.7BF *C.CCC.EDF*
p & M ~ p ~ p & Mp

213 Mp M ~ p *48C*

Mp & M ~ p
Cont p
69F

Relation logique entre deux formules g et h:		*Relation arithmétique entre leurs nombres associés N(g) et N(h):*
g → h	si et seulement si	N(g) : N(h)
g | h	si et seulement si	[N(g), N(h)] = F.FFF.FFF
g w h	si et seulement si	N(g) + N(h) = F.FFF.FFF
g ∨ h	si et seulement si	(N(g), N(h)) = 0

TABLEAU VIII

Traduction des relations logiques qui relient des fonctions de q par des relations arithmétiques entre leurs nombres associés

F.FFF.690
~ Cont q
Lq ∨ L ~ q

F.FFF.7D5 Lq	L ~ q *F.FFF.EBA*
5.555.555	*A.AAA.AAA*
q	~ q
5.555.410 q ∨ L ~ q	*A.AAA.280* ~ q ∨ Lq
5.555.D7F q & M ~ q	*A.AAA.BEF* ~ q & Mq
145 Mq	M ~ q *82A*

Mq & M ~ q
Cont q
96F

Relation logique entre deux formules g et h:		*Relation arithmétique entre leurs nombres associés N(g) et N(h):*
g → h	si et seulement si	N(g) : N(h)
g | h	si et seulement si	[N(g), N(h)] = F.FFF.FFF
g w h	si et seulement si	N(g) + N(h) = F.FFF.FFF
g ∨ h	si et seulement si	(N(g), N(h)) = 0

TABLEAU IX

Traduction des relations logique qui relient des fonctions de p&q par des relations arithmétiques entre leurs nombres associés

F.BDE.CA0
~ Cont (p&q)
L(p&q) ∨ L~ (p&q)

F.FFF.FF7 L(p&q) L ~ (p&q) *F.BDE.CA8*

7.777.777 *7.356.420*
(p&q) ∨ L ~ (p&q)
(p&q)

8.888.880 *8.888.888*
~ (p&q) ∨ L(p&q)
~ (p&q)

7.777.77F *8.CA9.BDF*
(p&q) & M ~ (p&q) ~ (p&q) & M(p&q)

421.357 M(p&q) M ~ (p&q) *8*

M(p&q) & M ~ (p&q)
Cont (p&q)
421.35F

Relation logique entre deux formules g et h:		*Relation arithmétique entre leurs nombres associés N(g) et N(h):*
g → h	si et seulement si	N(g) : N(h)
g | h	si et seulement si	[N(g), N(h)] = F.FFF.FFF
g w h	si et seulement si	N(g) + N(h) = F.FFF.FFF
g ∨ h	si et seulement si	(N(g), N(h)) = 0

TABLEAU X

Traduction des relations logiques qui relient des fonctions de $p\& \sim q$
par des relations arithmétiques entre leurs nombres associées

F.DE7.5C0
$\sim$Cont $(p\& \sim q)$
$L(p\& \sim q) \vee L \sim (p\& \sim q)$

$p \prec q$
$L(p \to q)$
$L \sim (p\& \sim q)$ *F.DE7.5C4*

F.FFF.FFB $L(p\& \sim q)$
$\sim M(p \to q)$

B.BBB.BBB

8.9A3.180
$(p\& \sim q) \vee L \sim (p\& \sim q)$

$(p\& \sim q)$
$\sim (p \to q)$

4.444.440
$\sim (p\& \sim q) \vee L(p\& \sim q)$

4.444.444
$\sim (p\& \sim q)$
$p \to q$

B.BBB.BBF
$(p\& \sim q)\ \&\ M \sim (p\& \sim q)$

4.65C.E7F
$\sim (p\& \sim q)\ \&\ M(p\& \sim q)$

218.A3B $M(p\& \sim q)$
$\sim (p \prec q)$

$M \sim (p\& \sim q)$ *4*
$M(p \to q)$

$M(p\& \sim q)\ \&\ M \sim (p\& \sim q)$
Cont $(p\& \sim q)$
218.A3F

Relation logique entre deux formules g et h:		*Relation arithmétique entre leurs nombres associés N(g) et N(h):*
$g \to h$	si et seulement si	$N(g) : N(h)$
$g \mid h$	si et seulement si	$[N(g), N(h)] = F.FFF.FFF$
$g\ w\ h$	si et seulement si	$N(g) + N(h) = F.FFF.FFF$
$g \vee h$	si et seulement si	$(N(g), N(h)) = 0$

TABLEAU XI

Chaînes d'implications entre formules et d'absorption entre leurs nombres associés

F.FFF.351
Lp ∨ Lq

F.FFF.FF7
Lp & Lq

F.FFF.F77
Lp & q

F.FFF.7F7
Lq & p

F.FFF.B73
Lp

F.FFF.7D5
Lq

3.333.333
p

7.777.777
p&q

5.555.555
q

5.555.757
Mp & q

3.333.377
Mq & p

213
Mp

421.357
Mp & Mq

145
Mq

11
Mp ∨ q

101
Mq ∨ p

1
Mp ∨ Mq

1.111.111
p ∨ q

Conclusion

En présentant cette étude à l'examen des logiciens, nous n'avons pas la prétention de leur offrir un point d'arrivée à un stade de plus grande facilité et certitude dans la manipulation des formules de n'importe quel système particulier de logique modale mais, bien plus modestement, l'intention de proposer à ces logiciens, ainsi qu'aux spécialistes des différentes branches des sciences formelles, naturelles ou humaines pouvant profiter dans leurs recherches d'un mécanisme modal plus efficace, un nouveau point de réflexion et de départ pour atteindre un but qui peut intéresser les uns et les autres: une arithmétisation suffisante, simple et cohérente des différents systèmes de logique modale, pour disposer d'une méthode de décision appropriée dans ce domaine.

Entre autres perfectionnements possibles et souhaitables de notre méthode actuelle – encore embryonnaire –, deux nous paraissent indispensables et même urgents. Nous les expliquerons ci-dessous:

1. Il est clair qu'une arithmétisation de la logique modale ne peut pas s'arrêter aux formules de degré modal 0 et 1 ni, bien entendu, aux formules de n'importe quel degré modal fixé d'avance, mais qu'elle doit assurer

l'assignation d'un invariant numérique à chaque classe d'équivalence, quelles que soient les réductions établies par chaque système particulier.

2. Il va sans dire aussi que la valeur de Φ, c'est-à-dire du nombre associé à toute formule contradictoire, devrait pouvoir rester toujours le même, quel que soit le nombre des variables propositionnelles prises en considération.

Or, nous avons l'impression que ces deux buts pourraient être atteints en même temps par des perfectionnements de notre méthode actuelle fondés avant tout sur une certaine modification de l'association entre composants logiques (conjonctifs) des formules et composants binaires de leurs nombres associés. Elle serait la suivante:

Les nombres associés aux formules de la logique modale ne seraient plus des nombres *entiers* – exprimés par des sommes de *puissances positives (ou nulle) de 2* (2^0, 2^1, 2^2, etc.), mais plutôt des nombres *rationnels inférieurs à 1*, exprimés par des sommes de n'importe quel nombre de *puissances négatives de 2* (2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, etc.).

Les répercussions d'une telle modification de l'association de base (composants logiques-composants numériques) sur les opérations et relations arithmétiques associées, respectivement, aux opérations et relations logiques seraient minimes, comme nous le montrons dans un travail qui vient d'être publié dans le premier numéro de la nouvelle revue *Argumentation*(38). Par contre, l'introduction des perfectionnement évoqués sous les points 1 et 2 ci-dessus serait, à notre avis, bien plus facile dans le nouveau cadre(39) que dans le cadre actuel.

Cette dernière nous a paru, néanmoins, la meilleur manière de commencer, aussi bien du point de vue génétique que dans la perspective pédagogique de notre recherche.

Université du Pays Basque Miguel SANCHEZ-MAZAS
Département de Logique et Philosophie de la Science
Saint-Sébastien, Espagne

(38) Voir [17]

(39) Dans ce cadre, tous les nombres auraient le même nombre total de chiffres (illimité), mais un nombre bien défini de chiffres *significatifs* (*prédédant* une suite illimitée de 0 ou de F). Le nombre associé à toute contradiction serait le 0,F... (0 suivi de F périodique). Le nombre associé à la négation d'un nombre donné N(g) serait O,F-N(g). Les lois de la *double négation*, de la *distributivité* et de *De Morgan* seraient toujours satisfaites dans ce nouveau cadre, qui peut fournir effectivement les moyens nécessaires pour une arithmétisation uniforme de tous les systèmes de logique modale.

REFERENCES

[1] Feys, Robert [1965]: *Modal Logics*, Edited with some complements by Joseph Dopp, Louvain, E. Nauwelaerts; Paris, Gauthier-Villars.

[2] Hilbert, D. und Ackermann, W. [1949]: *Grundzüge der theoretischen Logik*, dritte, verbesserte Auflage, Berlin, Springer.

[3] Hughes, G.E. & Cresswell, M.J. [1972]: *An Introduction to Modal Logic*, reprinted with corrections, Londres, Methuen.

[4] Kripke, Saul A. [1959]: "A Completeness Theorem in Modal Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 24, N. 1, pp. 1-14.

[5] Lewis, C.I. and Langford, C.H. [1959]: *Symbolic Logic*, Second Edition, New York-Londres, Dover.

[6] Piaget, Jean [1952]: *Essai sur les transformations des opérations logiques*, París, Presses Universitaires de France.

[7] Piaget, Jean [1972]: *Essai de logique opératoire*, deuxième édition du *Traité de logique: Essai de logistique opératoire* (1949), établie par Jean-Blaise Grize, Paris, Dunod.

[8] Prior, A.N. [1956]: "Modality and Quantification is S5", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 21, N. 1, pp. 60-62.

[9] Sánchez-Mazas, Miguel [1977]: "Un modèle arithmétique de la logique peut-il se fonder sur l'intension?", *Actes de la Société helvétique des sciences naturelles*, 1977, pp. 361-387.

[10] Sánchez-Mazas, Miguel [1978]: "Modelli aritmetici per l'informatica giuridica", *in* A.A. Martino, E. Maretti, C. Ciampi (ed.) *Logica, informatica diritto* (2 volumes), *Informatica e Diritto*, IV (avril-juin 1978) et V (janvier-mars 1979), I, pp. 163-215.

[11] Sánchez-Mazas, Miguel [1979]: "Simplification de l'arithmétisation leibnitienne de la syllogistique par l'expression arithmétique de la notion intensionnelle du 'Non Ens' ", *in* Albert Heinekamp und Franz Schupp (hersg.), *Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart*, Symposion der Leibniz-Gesellschaft Hannover, 10. und 11. November 1978, Wiesbaden, Steiner, pp. 46-58.

[12] Sánchez-Mazas, Miguel [1981]: "Un modelo aritmetico de la silogística" *in Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia*, Actas del Seminario del I.N.C.I.E. (1979), Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, pp. 35-53.

[13] Sánchez-Mazas, Miguel [1982]: "Algebraic and Arithmetical Translations of normative Systems and Applications in Legal Informatics" *in* A.A. Martino (ed.), *Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems*, Amsterdam, North-Holland, Vol. II, pp. 169-201.

[14] Sánchez-Mazas, Miguel [1984]: "An arithmetic model for modal logic (Feys' T system and Von Wright's M system)", Meeting of the Association for Symbolic Logic, Florence, Italy, 1982, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 49, N. 2, pp. 704-705 (abstract).

[15] Sánchez-Mazas, Miguel [1986]: "The 'Ars Judicandi' Programme" *in* A.A. Martino. F. Socci Natali (eds.), *Automated Analysis of Legal Texts: Logic, Informatics, Law*, Amsterdam, North-Holland, pp. 773-819.

[16] Sánchez-Mazas, Miguel [1987]: "Une nouvelle méthode arithmétique de décision immédiate pour la logique déontique", in *Pensée naturelle: logique et langage* (hommage au Professeur Jean-Blaise Grize), *Revue européenne des sciences sociales*, Genève, Droz, pp. 75-113.

[17] Sánchez-Mazas, Miguel [1989]: "Essai de représentation par des nombres réels d'une analyse infinie des notions individuaelles dans une infinité de mondes possibles", in *Argumentation* (Centre Européen pour l'Etude de l'Argumentation), 1, pp. 75-96.
[18] Whitehead, A.N. and Russell, B. [1970]: *Principia Mathematica* (to *56), Second Edition, reprinted, Cambridge University Press.
[19] Wright, Georg H. von [1951]: *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam, North-Holland.