SUR LA FORMALISATION DE L'ARITHMETIQUE ELEMENTAIRE

Francis M. Boxho
Aspirant du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique

L'arithmétique formelle est née des travaux de Frege [1] visant à donner une construction formalisée de l'arithmétique. On peut déjà trouver une axiomatisation non formelle de l'arithmétique chez Dedekind [2] en 1888, mais la première formalisation de l'arithmétique date de 1889 et est due à Peano [3]. Elle compte neuf axiomes:

1. $1 \epsilon \mathrm{N}$.
2. $a \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a = a$.
3. $a, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, = .\, b = a$.
4. $a, b, c \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset \therefore a = b \,.\, b = c : \supset .\, a = c$.
5. $a = b \,.\, b \epsilon \mathrm{N} : \supset .\, a \epsilon \mathrm{N}$.
6. $a \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a + 1 \epsilon \mathrm{N}$.
7. $a, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, = .\, a + 1 = b + 1$.
8. $a \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a + 1 \,-\!= 1$.
9. $k \epsilon \mathrm{K} \therefore 1 \epsilon k \therefore x \epsilon \mathrm{N} \,.\, x \epsilon k : \supset_x .\, x + 1 \epsilon k :: \supset .\, \mathrm{N} \supset k$.

auxquels Peano ajoute la série de définitions:

10. $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$; etc.

où "$-$" est le signe de la négation, "$\supset$" est le signe de l'implication matérielle ou de l'inclusion, "$=$" est le signe de l'équivalence matérielle ou de l'égalité, "ϵ" signifie "est", "K" signifie "classe", "N" signifie "nombre (entier positief)", "1" désigne l'unité et "$a + 1$" désigne le successeur de a, soit a plus 1.

La formalisation peanienne de l'arithmétique a gardé toute son importance, et l'arithmétique formelle est toujours dérivée des axiomes de Peano, à quelques modifications près. ([1]).

Cette formalisation n'est cependant pas exempte de faiblesses. D'une part, elle ne peut rendre compte de l'écriture des nombres dans notre système de numération de position sans la suite infinie de définitions:

$2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$; etc.

D'autre part, une caractéristique essentielle des nombres naturels, leur ordre linéaire, n'apparaît pas explicitement dans les axiomes, mais n'est définie que plus loin ([2]).

Le but de cet article ([3]) est d'esquisser une formalisation de l'arithmétique qui ne présente pas ces faiblesses. Dans une telle formalisation, l'opérateur “successeur (immédiat) de”, noté “$^{\to}$”, n'est pas primitif, mais est défini à partir de la relation “précède (immédiatement)”. Cette relation de dominance, notée “$\lhd$”, et une relation d'ordre, notée “$\leqslant$”, sont elles-mêmes définies à partir d'une relation d'ordre strict, notée “$<$”, que nous considérons comme primitive.

Nous supposons acquis un système formel pour une logique du premier ordre avec égalité. Les axiomes, définitions et théorèmes seront présentés sans leur clôture universelle, celle-ci étant néanmoins sous-entendue. Les démonstrations, généralement simples mais longues, ne seront pas construites, mais simplement indiquées.

La relation d'ordre strict “$<$”

Cette relation étant primitive, elle est définie par les axiomes:

Axiome 1 $\Sigma x \varphi x \to :: \Sigma x :. \varphi x \wedge : \Pi y . \varphi y \to \overline{y < x}$

Axiome 2 $x < y \to . \; y < z \to x < z$

Axiome 3 $\overline{x = y} \leftrightarrow . \; x < y \vee y < x$

où “φ” représente n'importe quel prédicat du premier ordre.

Théorème 1 $\overline{x < x}$ (irréflexivité: de ax1[$< / \varphi$], par réduction à l'absurde)

Théorème 2 $x < y \to \overline{y < x}$ (asymétrie: de ax2 et th1)

Théorème 3 $x < y \wedge y < z . \to x < z$ (transitivité: de ax2)

Théorème 4 $\overline{x = y} \to . \; x < y \vee y < x$ (connexité: de ax3)

La relation d'ordre (large) "$\leqslant$"

Cette relation est définie par:

Définition 1 $x \leqslant y \leftrightarrow \overline{y < x}$

ce qui est équivalent à:

Théorème 5 $x \leqslant y \leftrightarrow . \; x < y \vee x = y$ (de ax3, th2, et df1)

On a les théorèmes suivants:

Théorème 6 $x \leqslant x$ (réflexivité: de th1 et df1)

Théorème 7 $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \; . \! \rightarrow x = y$ (antisymétrie: de th4 et df1)

Théorème 8 $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \; . \! \rightarrow x \leqslant z$ (transitivité: de th3 et th5)

Théorème 9 $x \leqslant y \vee y \leqslant x$ (forte connexité: de th4 et th5)

La relation de dominance "$\lhd$"

Cette relation est définie par:

Définition 2 $x \lhd y \leftrightarrow :. \; x < y \wedge : \Pi z. \; z \leqslant x \vee y \leqslant z$

On a:

Théorème 10 $\overline{x \lhd x}$ (irréflexivité: de th1 et df2)

Théorème 11 $x \lhd y \rightarrow \overline{y \lhd x}$ (asymétrie: de th2 et df2)

Théorème 12 $x \lhd y \wedge y \lhd z \; . \! \rightarrow \overline{x \lhd z}$ (intransitivité: de df1 et df2)

Théorème 13 $x \lhd y \wedge x \lhd z \; . \! \rightarrow y = z$ (univocité: de th4, df1 et df2)

Théorème 14 $y \lhd x \wedge z \lhd x \; . \! \rightarrow y = z$ (co-univocité: de th4, df1 et df2)

L'opérateur "$\rightarrow$"

Pour définir cet opérateur, nous utilisons un abstracteur "λ" qui opère selon la formule:

$$\iota(\lambda x \varphi x) = y \leftrightarrow :.\ \varphi y\ \wedge :\ \Pi x.\ \varphi x \rightarrow x = y$$

où "φ" représente n'importe quel prédicat du premier ordre.

L'opérateur "successeur (immédiat) de" est défini par:

Définition 3 $\vec{x} = \iota(\lambda y\ x \lhd y)$

On a:

Théorème 15 $x \lhd \vec{x}$ (de df3)

Théorème 16 $\vec{x} = y \leftrightarrow x \lhd y$ (de df3 et th15)

Théorème 17 $x = y \leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (de th13, th14, et th15)

Théorème 18 $x < y \leftrightarrow \vec{x} < \vec{y}$ (de th3, df1, th5, df2 et th15)

Théorème 19 $x \leqslant y \leftrightarrow \vec{x} \leqslant \vec{y}$ (de th5, th17 et th18)

Théorème 20 $x \lhd y \leftrightarrow \vec{x} \lhd \vec{y}$ (de th13, th14, et th15)

Les nombres naturels

Zéro est un nombre, le successeur immédiat de tout nombre est un nombre, et tout nombre a un successeur immédiat. Le prédicat "**N**" (est un nombre) peut dès lors être défini récursivement par:

Axiome 4 $\mathbf{N}0$

Axiome 5 $\mathbf{N}x \rightarrow \mathbf{N}\vec{x}$

Axiome 6 $\mathbf{N}x \rightarrow .\ \Sigma y\ y = \vec{x}$

La constante "0" (zéro), base de la récursion, est elle-même définie par :

Définition 4 $0 = \iota(\lambda x \Pi y \; x \leqslant y)$

Le successeur immédiat de tout nombre étant unique (th13 et th15), notre système de numération de position en base dix s'obtient simplement en posant :

Axiome 7 $0x = x$

Axiome 8 $x0 \lhd x1$

Axiome 9 $x1 \lhd x2$

Axiome 10 $x2 \lhd x3$

Axiome 11 $x3 \lhd x4$

Axiome 12 $x4 \lhd x5$

Axiome 13 $x5 \lhd x6$

Axiome 14 $x6 \lhd x7$

Axiome 15 $x7 \lhd x8$

Axiome 16 $x8 \lhd x9$

Axiome 17 $x \lhd y \rightarrow x9 \lhd y0$

L'induction mathématique

Dans la formalisation de l'arithmétique présentée ici, on peut énoncer deux principes généraux d'induction : un principe général de l'induction ascendante (axiome 18) et un principe général de l'induction descendante (théorème 21). La principe classique de l'induction mathématique est alors un cas particulier du principe général de l'induction ascendante.

Axiome 18 $\Pi x \Pi y : x \lhd y \rightarrow . \varphi x \rightarrow \varphi y \; .:\rightarrow:. \; \Pi x \Pi y : x < y \rightarrow . \varphi x \rightarrow \varphi y$

Théorème 21 $\Pi x \Pi y : x \lhd y \rightarrow . \varphi y \rightarrow \varphi x \; .:\rightarrow:. \; \Pi x \Pi y : x < y \rightarrow . \varphi y \rightarrow \varphi x$
(de ax18)

Théorème 22 $\varphi 0 \wedge : \Pi x . \varphi x \rightarrow \varphi \vec{x} \; .:\rightarrow: \; \Pi x . \mathbf{N} x \rightarrow \varphi x$
(de th5, th15, df4 et ax18)

Théorème 23 $\varphi 1 \wedge : \Pi x . \varphi x \rightarrow \varphi \vec{x} \; .:\rightarrow:. \; \Pi x : \mathbf{N} x \rightarrow . \overline{x = 0} \rightarrow \varphi x$
(de th2, df1, th5, df2, th15, df4, ax7, ax8, et ax18)

où "φ" représente n'importe quel prédicat du premier ordre.

Francis M. BOXHO
Aspirant F.N.R.S. – Université de l'État à Liège

2 route de l'État
5461 ÉREZÉE

REFERENCES

[1] FREGE, G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884.
[2] DEDEKIND, R.J.W., *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Braunschweig, 1888.
[3] PEANO, G., *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, Torino, 1889.

NOTES

(1) Outre l'adoption de notations différentes, les modifications les plus courantes sont la transformation des classes en prédicats; l'introduction du zéro (0) et la modification des axiomes 1, 8 et 9 en conséquence (modification effectuée par Peano par ailleurs); et la suppression des axiomes 2 à 5, théorèmes de la logique du premier ordre avec égalité.

(2) Peano définit les relations "est plus petit que" ($<$) et "est plus grand que" ($>$) à partir de la soustraction ($-$), elle-même définie à partir de l'addition ($+$):

1. $a, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset : b - a = \mathrm{N}\, [x \epsilon]\, (x + a = b)$.
2. $a, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset : a < b \,.\, = \,.\, b - a - = \Lambda$.
3. $a, b \epsilon \mathrm{N} \,.\, \supset : b > a \,.\, = \,.\, a < b$.

(3) Qu'il me soit permis d'exprimer ici toute ma gratitude au Professeur H. Hubien, dont le séminaire et les nombreuses suggestions sont à l'origine de cet article.