COMPLETUDE DE CERTAINES LOGIQUES BIMODALES

Th. LUCAS et R. LAVENDHOMME

Introduction

Les sémantiques usuelles pour logiques modales comportent un ensemble d'indices souvent appelé, pour faire image, l'ensemble des mondes possibles. On peut structurer cet ensemble des mondes possibles de diverses manières. On peut, et c'est la sémantique de Kripke, le munir d'une relation, dite d'accessibilité. En modulant les conditions imposées à cette relation d'accessibilité on peut valider divers axiomes modaux. On peut aussi, et c'est la sémantique de D. Scott, munir l'ensemble des mondes possibles d'une sorte de structure de voisinage. Divers conditions sur cette structure la rapprochent ou l'éloignent de la situation topologique.

Nous nous intéressons ici à des sémantiques où l'ensemble des mondes possibles est structuré des deux manières à la fois en examinant les correspondants syntaxiques qui sont validés dans ces situations et en visant bien sûr une complétude correspondante. L'objectif est d'explorer ainsi e cas où l'ensemble des mondes possibles est l'ensemble des objets d'une catégorie (structure à la Kripke) munie d'une topologie de Grothendieck structure à la Scott).

Il semble naturel d'examiner, comme correspondant syntaxique, une ituation comportant deux modalités : $\Box$ à interpréter comme "vérité nécessaire" et L à interpréter comme "vérité locale". On rejoint donc une uggestion de F.W. LAWVERE qui dans [L] dit : "une topologie de Grohendieck apparaît le plus naturellement comme un opérateur modal du ype 'c'est localement le cas' ".

Cette suggestion de Lawvere est parfois rapprochée de la sémantique es faisceaux et donc, d'un point de vue syntaxique, de la logique intuionniste (cfr par exemple P.I. GOLDBLATT [G] où il s'agit d'une logique ntuitionniste propositionnelle enrichie d'une modalité interprétée comme érité locale). Notre point de vue est différent. Nous voulons voir la logiue modale (et bimodale) comme enrichissement du calcul des prédicats assique. Bien sûr dans de telles logiques, on peut interpréter la logique tuitionniste (nous nous sommes d'ailleurs intéressés à cet aspect des choses dans [LL]), mais un des intérêts des systèmes proposés ici pourrait bien être, au contraire, de permettre l'usage de la logique classique.

1. *Le système initial et sa complétude*

1.1. *Le système* $L\,\Box_{min}$

Le langage *L* est un langage du calcul des prédicats du premier ordre auquel on a adjoint deux opérateurs propositionnels, $\Box$ et L. Le système minimal, noté $L\,\Box_{\min}$, est alors donné par:

(1) Les axiomes et règles de déduction du calcul des prédicats classique;

(2) La règle, dite de nécessitation,

$$\frac{P}{\Box P}\ ;$$

(3) Les schémas d'axiomes:

A1 : $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$,

A′2: $\Box(P \leftrightarrow Q) \to (LP \leftrightarrow LQ)$.

Notons que l'on pourrait tout aussi bien partir du calcul des prédicats classique avec égalité. On ajouterait alors au système $L\,\Box_{\min}$ l'axiome:

$$x = y \to \Box(x = y).$$

Nous ne le ferons pas mais c'est uniquement pour simplifier l'écriture et parce qu'il n'y a là rien de fondamentalement neuf par rapport au cas classique.

1.2. *La sémantique*

Décrivons maintenant la notion de *L*-structure. On se donne d'abord un graphe *J* (i.e. un ensemble I d'objets et un ensemble I_1 de flèches, chaque flèche f ayant une source $\alpha(f)$ et un but $\beta(f)$ dans I; si $\alpha(f) = i$ et $\beta(f) = j$, on écrit généralement $i \xrightarrow{f} j$). On se donne une fonction *M* qui à chaque i de I associe un ensemble M_i et à chaque flèche $i \xrightarrow{f} j$ une application $M(f) = M_j \to M_i$ (on peut donc dire que l'on a un foncteur M contravariant du graphe *J* dans la catégorie des ensembles). A chaque symbole d'opération n-aire, F, de *L*, on associe une transformation naturelle $F_M : M^n \to M$. Enfin pour chaque symbole d'opération n-aire, R, de L on associe à chaque i de I une partie $M_R(i) \subseteq M_i^n$. On se donne enfin une famille $U = (U_i)_{i \in I}$ d'ensembles où chaque U_i est un ensemble de parties de $\beta^{-1}(i)$. Un tel triple $<J,M,U>$ est alors appelé une L-structure; on la notera souvent M.

Les termes et formules de L sont alors interprétés dans une L-structure M par la définition inductive classique pour chaque "monde" i de I, complétée par les clauses inductives spécifiques concernant $\Box$ et L. Par exemple la clause inductive concernant la négation est bien pour chaque i la clause classique

$$M \models_i \neg \varphi (\bar{x}) (\bar{a}) \text{ ssi } M \not\models_i \sigma (\bar{x}) [\bar{a}]$$

(où φ est une formule de L, $\bar{x}$ une suite finie de variables contenant les variables libres de φ et $\bar{a}$ une suite correspondante d'éléments de M_i). De même la clause classique pour le quantificateur universel est bien

$$M \models_i (\forall y \varphi) (\bar{x}) [\bar{a}] \text{ ssi pour tout } b \in M_i,\ M \models_i \varphi(y,\bar{x}) [b,\bar{a}]$$

La clause inductive spécifique concernant $\Box$ est:

$$M \models_i (\Box \varphi) (\bar{x}) [\bar{a}] \text{ ssi pour tout } j \xrightarrow{f} i,\ M \models_j \varphi(\bar{x}) [M(f) (\bar{a})]$$

et celle concernant L est:

$$M \models_i (L \varphi) (\bar{x}) [\bar{a}] \text{ ssi } \{j \xrightarrow{f} i \mid M \models_j \varphi(\bar{x}) [M(f) (\bar{a})]\} \in U(i).$$

Si φ est une formule de L et M est une L-structure, on dit que φ est vraie dans M, et on écrit $M \models \varphi$, si pour tout i de I, toute suite finie $\bar{x}$ contenant les variables libres de φ et toute suite correspondante d'éléments de M(i), on a $M \models_i \varphi(\bar{x}) [\bar{a}]$. On dit que φ est valide si elle est vraie dans toute interprétation.

La notion de L-structure qui vient d'être indiquée valide alors le système L $\Box_{\min}$. Plus précisément, on définit facilement les notions usuelles de démonstration et de théorème dans le système L $\Box_{\min}$ et on a:

PROPOSITION 1 (*Théorème de validité*). – *Si φ est un théorème, φ est valide.*

Démonstration. – C'est une induction triviale sur les démonstrations. Vérifions par exemple la correction de l'axiome

A_2': $\Box(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (LP \leftrightarrow LQ)$.

Si on suppose $M \models_i \Box(P \leftrightarrow Q)\,[\bar{a}]$, on a pour tout $j \xrightarrow{f} i$, $M \models_j P[M(f)\bar{a}]$ ssi $M \models_j Q[M(f)\bar{a}]$ et donc $\{j \xrightarrow{f} i \mid M \models_j P[M(f)\bar{a}]\} \in U(i)$ ssi $\{j \xrightarrow{f} i \mid M \models_j Q[M(f)(\bar{a})] \in U(i)$.$\boxtimes$

1.3. *Complétude*

On se propose de montrer maintenant que le système $L\,\Box_{min}$ est complet pour la sémantique proposée. On peut même se limiter à des *L*-structures (*J,M,U*) où *J* est un graphe simple (i.e. avec au plus une flèche entre deux objets). La technique utilisée pour démontrer cette complétude combine les idées de modèle canonique pour la sémantique de Kripke avec celle de modèle canonique pour la sémantique à la Scott. Nous allons donc commencer par décrire notre notion de modèle canonique.

a) Soit Γ un ensemble de formules de *L*. On dit qu'une formule P est une conséquence de Γ, et on note $\Gamma \vdash P$, si il existe une partie finie Γ_0 de Γ telle que $\Lambda\,\Gamma_0 \rightarrow P$ soit un théorème. Tout ensemble consistant d'énoncés est contenu dans un maximal consistant. Un ensemble Γ d'énoncés est dit riche pour *L* si pout tout énoncé de *L* de la forme $\exists x P(x)$, il existe une constante c du langage *L* tel que $\Gamma \vdash \exists x P(x) \rightarrow P(c)$. On montre, comme classiquement, que si Γ est un ensemble consistant d'énoncés de *L*, il existe une expansion $L + C$ de *L* par un ensemble C de constantes et un ensemble consistant Γ', riche pour $L + C$, et contenant Γ. Pour que le modèle canonique ne soit pas une classe propre, on se limitera, comme on peut le faire, à des ensembles C contenus dans un ensemble assez grand (i.e. de cardinal supérieur à celui de *L*).

On note Max_L l'ensemble des couples (Γ,C) où Γ est un ensemble maximal consistant d'énoncés de $L + C$, riche pour $L + C$.

DEFINITION. – *Soient* (Γ,C) *et* (Δ,D) *dans* Max_L. *On pose* $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$ *ssi* $C \subset D$ *et pour tout énoncé* P *de* $L + C$, *si* $\Box P \in \Gamma$ *alors* $P \in \Delta$

On a ainsi le graphe simple Max_L ayant Max_L comme ensemble d'objets et possédant une flèche de (Δ,D) vers (Γ,C) ssi $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$. (Notons que ce n'est qu'à partir de la section 2.1 que l'usage du signe "$\leqslant$" se justifiera, la relation devenant alors un préordre).

b) Définissons maintenant *M* en commençant par décrire le foncteur contravariant) M allant du graphe Max_L vers la catégorie des ensembles.

On définit $M(\Gamma,C)$ comme l'ensemble des termes clos du langage L + C. Si $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$, on a immédiatement $M(\Gamma,C) \subset M(\Delta,D)$ vu l'inclusion de C dans D. Notons que si on travaillait dans le cas égalitaire, il faudrait quotienter les ensembles de termes clos pour tenir compte des affirmations d'égalités présentes dans Γ; pour obtenir alors une application de $M(\Gamma,C)$ dans $M(\Delta,D)$ il faudrait utiliser l'axiome

$$x = y \rightarrow \Box(x = y).$$

Si F est un symbole d'opération n-aire de L on définit

$F_M: M^n \rightarrow M$ en posant

$$F_M(\Gamma,C): M(\Gamma,C)^n \rightarrow M(\Gamma,C): (t_1,...,t_n) \rightarrow F(t_1,...,t_n).$$

Si R est un symbole de relation n-aire de L, on définit

$R_M(\Gamma,C) \subseteq M(\Gamma,C)^n$ par

$$(t_1,...,t_n) \in R_M(\Gamma,C) \text{ ssi } R(t_1,...,t_n) \in \Gamma.$$

Notons ici que si on voulait que $R_M(\Gamma,C) \subseteq R_M(\Delta,D)$ pour $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$, il faudrait adjoindre à L $\Box_{min}$ les axioms $\alpha \rightarrow \Box\alpha$ pour toute formule atomique α.

On peut établir, en n'utilisant que la règle de nécessitation et l'axiome A1, la proposition suivante:

PROPOSITION 2 (Lemme du $\Box$). – *Soit* P *un énoncé du langage* L + C. *On a* $\Box P \in \Gamma$ *si et seulement si pout tout* $(\Delta,D) \leqslant \Gamma,C)$, $P \in \Delta$

Démonstration. – Si $\Box P \in \Gamma$ et $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$ on a bien $P \in \Delta$ par définition de la relation $\leqslant$. Inversement, supposons que P soit dans Δ pour tout $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$. Considérons l'ensemble X d'énoncés de L + C défini par

$$X = \{\neg P\} \cup \{Q \mid \Box Q \in \Gamma).$$

Je dis que X est inconsistant, sinon X se plongerait dans un maximal consistant Δ riche pour L + D avec $D \supseteq C$. Mais alors $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$ car si $\Box Q \in \Gamma$, $Q \in X \subseteq \Delta$ et donc, par hypothèse, $P \in \Delta$ ce qui est impossible car $\neg P \in \Delta$

Si X est inconsistant, il existe un nombre fini de $Q_1,...Q_n$ tels que $\Box Q_i \in \Gamma$ avec

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} Q_i \to P.$$

Par la règle de nécessitation et l'axiome A1, on a donc

$$\vdash \Box(\bigwedge_{i=1} Q_i) \to \Box P.$$

Comme on a facilement

$$\vdash \Box(\bigwedge_{i=1}^{n} Q_1) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1} \Box Q_i \text{ et comme } \Box Q_i \in \Gamma,$$

on a bien $\Box\ P \in \Gamma.$ ☒

c) Il reste à indiquer une famille

$$U = (U(\Gamma,C))_{(\Gamma,C)\in \mathrm{Max}_L}.$$

En fait, diverses familles U conviennent. Pour préciser cela, fixons d'abord une notation. Soit P un énoncé de L + C. On pose

$$[P]_{(\Gamma,C)} = \{(\Delta,D) \mid (\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C) \text{ et } P \in \Delta\}$$

et on identifie cet ensemble à une partie de $\beta^{-1}(\Gamma,C)$.

On pose alors

$$U_{\min}(\Gamma,C) = \{[P]_{(\Gamma,C)} \mid LP \in \Gamma\}$$

On va voir que c'est en fait là le plus petit des $U(\Gamma,C)$ qui convienne. A l'autre extrême, on pose

$$U_{\max}(\Gamma,C) = \{R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C) \mid \text{pour tout énoncé P de } L + C, \text{ si } R = [P]_{(\Gamma,C)} \text{ alors } LP \in \Gamma\}.$$

et on va voir aussi que c'est le plus grand $U(\Gamma,C)$ qui convienne. Définissons d'abord :

DEFINITION. – *Soit* $(\Gamma,C) \in \mathrm{Max}_L$ *et soit* $U_{(\Gamma,C)}$ *un ensemble de parties de* $\beta^{-1}(\Gamma,C)$. *On dit que* $U_{(\Gamma,C)}$ *convient (pour* L $\Box_{\min}$*) si pour tout énoncé* P *de* L + C, *on a*:

$$LP \in \Gamma \textit{ ssi } [P]_{(\Gamma,C)} \in U_{(\Gamma,C)}.$$

On dit que $U = (U_{(\Gamma,C)})_{(\Gamma,C)\in \mathrm{Max}_L}$ *convient si chaque* $U_{(\Gamma,C)}$ *convient.*

PROPOSITION 3. – *Pour tout* $(\Gamma,C) \in \mathrm{Max}_L$,

$$U_{\min}(\Gamma,C) \subseteq U_{\max}(\Gamma,C).$$

Démonstration. – Soit $[P]_{(\Gamma,C)} \in U_{\min}(\Gamma,C)$. On a donc $LP \in \Gamma$. Montrons que $[P]_{(\Gamma,C)} \in U_{\max}(\Gamma,C)$.
Soit donc Q un énoncé de $L + C$ tel que $[P]_{(\Gamma,C)} = [Q]_{(\Gamma,C)}$.
Il suffit de montrer que $LQ \in \Gamma$. Mais on a pour tout $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$ que $P \in \Delta$ ssi $Q \in \Delta$ et donc $P \leftrightarrow Q \in \Delta$. En vertu du lemme du $\Box$ on a donc $\Box(P\leftrightarrow Q) \in \Gamma$. Mais alors, par l'axiome A_2', $LP \leftrightarrow LQ \in \Gamma$ et comme $LP \in \Gamma$, $LQ \in \Gamma$. ☒

A partir des définitions, on obtient immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 4. – *Soit* $(\Gamma,C) \in \mathrm{Max}_L$ *et soit* $U_{(\Gamma,C)}$ *un ensemble de parties de* $\beta^{-1}(\Gamma,C)$. $U_{(\Gamma,C)}$ *convient pour* L $\Box_{min}$ *si et seulement si*

$$U_{\min}(\Gamma,C) \subseteq U_{(\Gamma,C)} \subseteq U_{\max}(\Gamma,C). \boxtimes$$

En vertu de la proposition 3, il existe donc au moins un *U* qui convient pour L $\Box_{\min}$ et on peut donc poser la définition suivante.

DEFINITION. – *Un modèle canonique pour* L $\Box_{\min}$ *est un triple* $M = \langle Max_L, M, U \rangle$ *où U convient.*

On a alors la proposition de base suivante dont le théorème de complétude est un simple corollaire.

PROPOSITION 5. – *Soit* $M = \langle Max_L, M, U \rangle$ *un modèle canonique. Soit* $P(\bar{x})$ *une formule de L. On a, pour tout* $\bar{a}$ *de C,*

$$M \models_{(\Gamma,C)} P(\bar{x})\,[\bar{a}] \text{ ssi } P(\bar{a}) \in \Gamma.$$

Démonstration. – On procède par induction sur la forme de $P(\bar{x})$. Le cas des formules atomiques est trivial. L'étape des connecteurs classiques résulte de la maximalité de Γ et celui des quantificateurs de la richesse de Γ dans $L + C$.

L'étape de l'opérateur $\Box$ résulte du lemme du $\Box$ (proposition 1). En effet,

$$M \models_{(\Gamma,C)} \Box P(\bar{x})\,[\bar{a}]$$

ssi pour tout $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$, $M \models_{(\Delta,D)} P(\bar{x})\,[\bar{a}]$ ce qui, par hypothèse inductive, a lieu si et seulement si, pour tout $(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C)$, $P(\bar{a}) \in \Delta$ et donc, par le lemme du $\Box$, ssi $\Box P(\bar{a}) \in \Gamma$.

L'étape de l'opérateur L résulte de ce que U convient. En effet,

$$M \models_{(\Gamma,C)} LP(\bar{x})\,[\bar{a}]$$

ssi

$$\{(\Delta,D) \leqslant (\Gamma,C) \mid M \models_{(\Delta,D)} P(\bar{x})\,[\bar{a}]\} \in U_{(\Gamma,C)}.$$

Par hypothèse inductive, $M \models_{(\Delta,D)} P(\bar{x})\,[\bar{a}]$ ssi $P(\bar{a}) \in \Delta$. On a donc $M \models_{(\Gamma,C)} LP(\bar{x})\,[\bar{a}]$ ssi $[P(\bar{a})]_{(\Gamma,C)} \in U_{(\Gamma,C)}$. Comme $U_{(\Gamma,C)}$ convient, ceci a lieu si et seulement si $LP(\bar{a}) \in \Gamma$. ⊠

De là résulte le théorème de complétude :

PROPOSITION 6 (Théorème de complétude). – *Tout ensemble consistant d'énoncés possède un modèle que l'on peut supposer contenu dans un modèle canonique.*

Démonstration. – Si X est un ensemble consistant d'énoncés, X est contenu dans un ensemble maximal consistant Γ riche pour une expansion $L + C$. En vertu de la proposition 5, on aura pour tout modèle canonique M, toute formule $P(\bar{x})$ de L et tout $\bar{a}$ de C :

$$M \models_{(\Gamma,C)} P(\bar{x})\,[\bar{a}] \text{ ssi } P(\bar{a}) \in \Gamma.$$

En particulier pour tout énoncé Q de X, $Q \in \Gamma$ et $M \models_{(\Gamma,C)} Q$. ⊠

On remarquera que dans la preuve précédente, et comme on le souhaite généralement en logique modale, on peut se restreindre à la partie "engendrée" au moyen de $\leqslant$ par (Γ,C) dans le modèle canonique (voir par exemple [C] p. 95) : l'avantage en est que le modèle possède un "sommet".

De ce théorème on déduit comme d'habitude le théorème de complétude simple :

$$\vdash P \text{ ssi } P \text{ est valide.}$$

2. *Quelques extensions de L $\Box_{min}$.*

Nous nous proposons d'indiquer ici quelques extensions du système L $\Box_{\min}$ et leur correspondant sémantique. Dans chaque cas nous indiquons aussi les adaptations de la notion de modèle canonique permettant d'obtenir la complétude. Nous explorerons ce faisant les différentes facettes de la notion de site au sens de Grothendieck.

2.1. . Soit (J,M,U) une L-structure. La première condition simple à examiner est celle qui demande que le graphe J soit en fait une catégorie, M étant alors un foncteur de cette catégorie vers la catégorie des ensembles. Il suffit en fait d'adjoindre au système L $\square_{\min}$ les deux schémas d'axiomes :

$$A_3: \square P \to P$$
$$A_4: \square P \to \square\square P$$

L'adéquation dans les L-structures où J est une catégorie et M un foncteur, est immédiate : l'adéquation de A3 résulte de l'existence des identités et l'adéquation de A4 résulte de l'existence de la composition des morphismes. La complétude est tout aussi simple car il suffit d'observer que Max_L est maintenant préordonné par la relation $\leqslant$ (la réflexivité correspond à A3 et la transitivité à A4). En fait d'ailleurs, si on ne considère que la modalité $\square$, on se trouve devant le traditionnel système S4. Le système L $\square_{\min} + A_3 + A_4$ sera noté L $\square_{\mathrm{cat}}$.

2.2. Considérons maintenant le renforcement de A'2 en le schéma d'axiomes :

$$A2: \square(P \to Q) \to (LP \to LQ).$$

Le plus simple pour prendre en compte ce schéma d'axiomes est de modifier la notion de satisfaction en ce qui concerne l'opérateur L, en posant comme clause inductive :

$$M \models_{i} L\,\varphi(\bar{x})\,[\bar{a}] \text{ ssi il existe } R \in U(i) \text{ avec pour tout } j \xrightarrow{f} i \text{ de } R,\quad M \models_{j} \varphi(\bar{x})\,[M(f)(\bar{a})].$$

La sémantique ainsi modifiée est alors correcte pour le schéma A2.

On obtient la complétude comme dans la section 1.3, moyennant les quelques adaptations suivantes : $U_{\min}(\Gamma,C)$ reste $\{[P]_{(\Gamma,C)} \mid LP \in \Gamma\}$ mais on pose

$$U^0_{\max}(\Gamma,C) = \{R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C) \mid \text{pour tout énoncé P de } L + C \text{ si } R \subseteq [P]_{(\Gamma,C)} \text{ alors } LP \in \Gamma\}$$

et on démontre :

PROPOSITION 7. – *On a:*

$$U_{\min}(\Gamma,C) \subseteq U^0_{\max}(\Gamma,C).$$

Démonstration. – Soit $[P]_{(\Gamma,C)}$ avec LP $\in \Gamma$. Si on a $[P]_{(\Gamma,C)} \subseteq [Q]_{(\Gamma,C)}$, on a en vertu du lemme du $\Box$ (prop. 2), $\Box(P \to Q) \in \Gamma$. Mais alors, par l'axiome A2, $LP \to LQ \in \Gamma$ et, comme $LP \in \Gamma$, $LQ \in \Gamma$. ☒

Signalons que l'on pourrait procéder autrement. On pourrait ne pas modifier la clause inductive portant sur $M \models_i L\varphi(\bar{x})\ [\bar{a}]$ mais imposer aux structures $<J,M,U>$ une condition de stabilité par surclusion : Si R $\in U(i)$ et R $\subseteq$ S alors S $\in U(i)$. Pour la complétude, on doit cette fois poser

$$U^0_{min}(\Gamma,C) = \{R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C) \mid \text{il existe un énoncé P de } L + C \text{ avec } LP \in \Gamma \text{ et } [P]_{(\Gamma,C)} \subseteq R\}$$

et on raisonne comme dans la section 1.3 mais en utilisant U^0_{min} et U^0_{max}.

Notons que dans la définition des topologies de Grothendieck en terme de familles couvrantes la condition de stabilité par surclusion est satisfaite : ce qui contient une famille couvrante est a fortiori une famille couvrante. Par contre, si on utilise des cribles, la situation est un peu différente car ce qui contient un crible n'est pas toujours un crible. Nous donnerons donc la préférence à la première méthode modifiant la définition de $M \models_i L\varphi(\bar{x})\ [\bar{a}]$.

2.3. Examinons maintenant la condition sémantique : pour tout i de I, $\beta^{-1}(i) \in U(i)$.

PROPOSITION 8. – *Dans le système* L $\Box_{min}$ *les conditions suivantes sont de même force* :

(1) $\Box P \to LP$;

(2) $\dfrac{P}{LP}$;

(3) LT.

En outre, ces axiomes ou règles sont validés par les L-structures $<J,M,U>$ *telles que* $\forall i \in I\ \beta^{-1}(i) \in U(i)$.

Démonstration. Du schéma d'axiomes (1) et de la règle de nécessitation résulte la règle de localisation (2). De (2) résulte immédiatement l'axiome (3). Montrons que ce dernier fournit le schéma d'axiomes (1). Il suffit de partir de la tautologie classique $P \leftrightarrow (P \leftrightarrow T)$.
En appliquant A1 puis l'hypothèse $\Box P$, il vient $\Box(P \leftrightarrow T)$ et donc par A_2', $LP \leftrightarrow LT$. Donc, vu l'axiome (3), $\Box P \to LP$.

La correction de la condition sémantique est alors immédiate. ☒

Pour la complétude, il n'y a pas lieu de modifier U. En effet,

$$\beta^{-1}(\Gamma,C) = [T]_{(\Gamma,C)}$$

et si $U_{(\Gamma,C)}$ convient pour $L\,\Box_{min}$ on a :

$$\beta^{-1}(\Gamma,C) \in U_{(\Gamma,C)} \text{ ssi } LT \in \Gamma.$$

2.4. A. Grothendieck a observé que la notion de crible était commode pour décrire la notion de site et était même indispensable si on travaille sur une catégorie qui ne possède pas assez de limites à gauche finies. Or, en général, c'est le cas d'un modèle canonique.

Dans cette section, les L-structures considérées sont donc les $<J,M,U>$ où J est une catégorie et les éléments R de U(i) sont des cribles (i.e. si on a $k \xrightarrow{g} j \xrightarrow{f} i$ et $f \in R$ alors $f \circ g \in R$). On suppose en outre que l'on valide $L\,\varphi$ par :

$$M \models_{i} L\varphi(\bar{x})\,[\bar{a}] \text{ ssi il existe } R \in U(i) \text{ avec pour tout } j \xrightarrow{f} i \text{ de } R,\ M \models_{j} \varphi(\bar{x})\,[M(f)(\bar{a})].$$

PROPOSITION 9. – *La sémantique indiquée valide l'axiome de Spinoza* [1] :

$$LP \to L\Box P.$$

Démonstration. – Supposons que

$$M \models_{i} LP(\bar{x})\,[\bar{a}].$$

Il existe donc un crible R dans U_i tel que pour tout $j \xrightarrow{f} i$ de R, $M \models_{j} P(\bar{x})\,[Mf(\bar{a})]$. Mais comme R est un crible, si $j \xrightarrow{f} i$ est dans R, pour toute flèche $k \xrightarrow{g} j$, $f \circ g$ est dans R et donc

$$M \models_{j} \Box P(\bar{x})\,[Mf(\bar{a})]$$

et donc $M \models_{i} L\Box P(\bar{x})\,[\bar{a}]$. ☒

On désigne par $L\,\Box_{cr}$ le système $L\,\Box_{cat} + A_2 +$ l'axiome de Spinoza. Etudions la complétude de ce système en décrivant les U adaptés à ce système.

[1] La référence à Spinoza n'est pas très motivée, mais elle évoque simplement une certaine maximalisation du "nécessaire".

On pose:

$\mathcal{U}^c_{min}(\Gamma,C) = \{[\Box P]_{(\Gamma,C)} \mid P \text{ dans } L + C \text{ et } LP \in \Gamma\}$,
$\mathcal{U}^c_{max}(\Gamma,C) = \{R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C) \mid R$ est un crible et pour tout énoncé P de $L + C$, si $R \subseteq [P]_{(\Gamma,C)}$ alors $LP \in \Gamma\}$.

PROPOSITION 10. – *On a*:

$$\mathcal{U}^c_{min}(\Gamma,C) \subseteq \mathcal{U}^c_{max}(\Gamma,C).$$

Démonstration. – Soit $[\Box P]_{\Gamma,C)}$ avec $LP \in \Gamma$.
Observons d'abord que $[\Box P]_{(\Gamma,C)}$ est un crible.
Supposons ensuite que $[\Box P]_{(\Gamma,C)} \subseteq [Q]_{(\Gamma,C)}$. On a alors $\Box(\Box P \to Q) \in \Gamma$ et donc par A2, $L\Box P \to LQ \in \Gamma$. Comme $LP \in \Gamma$, par l'axiome de Spinoza on a $L\Box P \in \Gamma$. Donc $LQ \in \Gamma$ et $[\Box P]_{(\Gamma,C)}$ est bien dans $\mathcal{U}^c_{max}(\Gamma,C)$. ⊠

Les U adaptés sont alors ceux tels que

$$\mathcal{U}^c_{min}(\Gamma,C) \subseteq U_{(\Gamma,C)} \subseteq \mathcal{U}^c_{max}(\Gamma,C)$$

et tels que les éléments R de $U_{(\Gamma,C)}$ soient des cribles. Sous ces conditions on dira que $M = \langle Max_L, M, U\rangle$ est un modèle canonique pour $L\,\Box_{cr}$. On a alors l'analogue de la proposition 5:

PROPOSITION 11. – *Si M est un modèle canonique pour* $L\,\Box_{cr}$ *et* $P(\bar{x})$ *est une formule de L, on a*:

$$M \models_{(\Gamma,C)} P(\bar{x})\,[\bar{a}] \text{ ssi } P(\bar{a}) \in \Gamma.$$

Démonstration. Seule l'étape inductive du L est modifiée par rapport à la proposition 5. On a $M \models_{(\Gamma,C)} LP(\bar{x})\,[\bar{a}]$ ssi il existe R dans $U(\Gamma,C)$ tel que pour tout (Δ,D) de R, $M \models_{(\Delta,D)} P(\bar{x})\,[\bar{a}]$ ce qui, par hypothèse inductive, a bien lieu si et seulement si $P(\bar{a}) \in \Delta$. Il reste à montrer que $\exists R \in U(\Gamma,C)\ R \subseteq [P\bar{a}]$ ssi $LP(\bar{a}) \in \Gamma$.
Si un tel crible R existe et comme $U(\Gamma,C) \subseteq \mathcal{U}^c_{max}(\Gamma,C)$, on a bien $LP(\bar{a}) \in \Gamma$. Réciproquement si $LP(\bar{a}) \in \Gamma$, alors $L\Box P(\bar{a}) \in \Gamma$ par l'axiome de Spinoza, et donc $[\Box P(\bar{a})] \in \mathcal{U}^c_{min}(\Gamma,C)$. ⊠

2.5. On dit que U est *stable par changement de base* si pour tout $j \xrightarrow{f} i$ et tout $R \in U_i$,

$$f^{-1}(R) = \{k \xrightarrow{g} j \mid f \circ g \in R\}$$

est dans U_j. Dans cette section, on considère les L-structures $<J,M,U>$ où J est une catégorie et U est stable par changement de base.

PROPOSITION 12. – *La sémantique indiquée valide l'axiome de Leibniz* (2):

$$LP \rightarrow \Box LP.$$

Démonstration. – Supposons que $M \models_i LP(\bar{x})\ [\bar{a}]$, c'est-à-dire que $\{j \xrightarrow{f} i \mid M \models_j P(\bar{x})\ [Mf(\bar{a})]\} \in U_i$. Soit $k \xrightarrow{g} i$ dans J. On a
$g^{-1}(\{j \xrightarrow{f} i \mid M \models_j P(\bar{x})\ [Mf(\bar{a})]\})$

$$= \{k' \xrightarrow{h} k \mid M \models_{k'} P(\bar{x})\ [Mh\ Mg(\bar{a})]\}.$$

Comme U est stable par changement de base, ceci est dans U_k et donc $M \models LP(\bar{x})\ [Mg(\bar{a})]$ et on a bien $M \models_i \Box LP(\bar{x})\ [\bar{a}]$. ⊠

Etudions alors la complétude du système L $\Box_{cat}$ + l'axiome de Leibniz. La catégorie est toujours Max_L, il suffit donc de décrire les U adaptés à l'axiome de Leibniz. On définit

$$U_{min}(\Gamma,C) = \{[P] \mid P \text{ dans } L + C \text{ avec } LP \in \Gamma\}$$

comme précédemment. Soit L_R la condition suivante: pour toute $(\Gamma',C') \leqslant (\Gamma,C)$ et pour tout énoncé A de $L + C'$, si

$$\{(\Phi,X) \mid (\Phi,X) \in R, (\Phi,X) \leqslant (\Gamma',C')\} = [A]_{(\Gamma',C')}$$

alors $LA \in \Gamma'$. On pose

$$U^L_{max}(\Gamma,C) = \{R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C) \mid L_R\}.$$

PROPOSITION 13. – *On a,*

$$U_{min}(\Gamma,C) \subseteq U^L_{max}(\Gamma,C).$$

En outre, U_{min} *et* U^L_{max} *sont stables par changement de base.*

(2) La référence à Leibniz n'est guère plus motivée que celle faite plus haut à Spinoza. Elle peut être suggérée par l'idée leibnizienne que ce qui apparaît (localement) comme vrai apparaît (localement) comme nécessairement vrai.

Démonstration. – Soit P dans L + C avec LP $\in \Gamma$. Il faut montrer la condition $L_{[P]_{(\Gamma,C)}}$. Soit $(\Gamma',C') \leqslant (\Gamma,C)$ et soit A un énoncé de L + C′ avec

$\{(\Phi,X) \mid (\Phi,X) \in [P]_{(\Gamma,C)}, (\Phi,X) \leqslant (\Gamma',C')\} = [A]_{(\Gamma',C')}$.
c'est-à-dire, $[P]_{(\Gamma',C')} = [A]_{(\Gamma',C')}$. Par le lemme du $\Box$ (prop. 2), $\Box(P \leftrightarrow A) \in \Gamma'$ et donc par A′2 LP $\leftrightarrow$ LA $\in \Gamma'$. Or LP $\in \Gamma$ et donc, par l'axiome de Leibniz, $\Box$ LP $\in \Gamma$. Mais alors LP $\in \Gamma'$ et on a bien LA $\in \Gamma'$. La stabilité par changement de base de $U_{\min}$ et $U^{L}_{\max}$ se démontre de manière semblable. ☒

Les U adaptés à l'axiome de Leibniz sont alors ceux qui sont stables par changement de base et se situent entre $U_{\min}$ et $U^{L}_{\max}$. On achève alors la démonstration de complétude comme plus haut.

2.6. Terminons par l'examen de "stabilité par composition". On dit que U est *stable par composition* si quel que soit R $\in U_i$ et si pour chaque $j \xrightarrow{f} i$ de R ou se donne $S_f \in U_j$, alors R o $(S_f) \in U_i$ où:
R o $(S_f) = \{k \xrightarrow{u} i \mid$ il existe $j \xrightarrow{f} i \in$ R et il existe $k \xrightarrow{g} j$ dans S_f avec $u = f \circ g\}$.
On considère donc des L-structures $<J,M,U>$ où J est une catégorie et U est stable par composition. On vérifie facilement:

PROPOSITION 14. – *La sémantique indiquée valide l'axiome de localisation*:

LLP $\rightarrow$ LP. ☒

Examinons la complétude du système L $\Box_{cat}$ + l'axiome de localisation. La catégorie Max_L se définit comme plus haut. Le seul point à vérifier est l'existence de U stables par composition et situés entre $U_{\min}$ et $U_{\max}$. En fait, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 15. – *La famille $U^{o}_{\max}$ est stable par composition.*

Notons que dans le système étudié ici, on pose comme avant:

$U^{o}_{\max}(\Gamma,C) = \{R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C) \mid$ pour tout énoncé P de L + C
si $R \subseteq [P]_{(\Gamma,C)}$ alors LP $\in \Gamma\}$.

Démonstration. – Soit R $\in U^{o}_{max}(\Gamma,C)$ et pour tout (Δ,D) de R soit $S_\Delta \in U^{o}_{max}(\Gamma,C)$. Il faut montrer que $T = R \circ (S_\Delta)$ est dans $U^{o}_{max}(\Gamma,C)$. Supposons donc que $T \subseteq [P]_{(\Gamma,C}$. Pour tout (Δ,D) de R on a que pour tout (Δ',D') de S_Δ, $(\Delta',D') \in [P]_{(\Gamma,C)}$. Donc pour tout (Δ,D) de R, LP $\in \Delta$ et donc LLP $\in \Gamma$. Ceci, par l'axiome de localisation, implique bien LP $\in \Gamma$. ☒

La démonstration de complétude s'achève alors comme dans la section 1.3.

3. *Logique bimodale et topologie de Grothendieck*

Il ne reste plus qu'à rassembler les arguments des sections précédentes pour obtenir un correspondant bimodal des topologies de Grothendieck.

Soit *J* une catégorie. Une topologie de Grothendieck sur *J* consiste en la donnée pour chaque objet i de *J* d'un ensemble U_i de parties de $\beta^{-1}(i)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) Chaque élément R de U_i est un crible;
(2) Si S est un crible contenant R $\in U_i$, S$\in U_i$;
(3) $\beta^{-1}(i) \in U_i$;
(4) *U* est stable par changement de base;
(5) *U* est stable par composition.

Une *L*-structure de Grothendieck est alors une *L*-structure <*J,M,U*> où *(J,U)* est un site, c'est-à-dire une catégorie *J* munie d'une topologie de Grothendieck *U*. La satisfaction dans une *L*-structure de Grothendieck est définie inductivement, la clause concernant l'opérateur modal L étant:

$$M \models_i L\,\varphi(\bar{x}\ [\bar{a}] \text{ ssi il existe } R \in U_i \text{ tel que pour tout } j \xrightarrow{f} i \text{ de } R,$$
$$M \models_j \varphi(\bar{x})\ [Mf(\bar{a})].$$

Les divers résultats de validité se synthétisent dans le théorème de validité

THEOREME 16. – *Une L-structure de Grothendieck valide le système bimodal* L $\square_{Gr}$ *suivant*:

(1) *Les axiomes et règles de déduction du calcul des prédicats classiques*:

(2) *La règle de nécessitation*

$$\frac{P}{\Box\ P};$$

(3) *Les schémas d'axiomes*:

A_1:	$\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$,
A_2:	$\Box(P \to Q) \to (LP \to LQ)$,
A_3:	$\Box P \to P$,
A_4:	$\Box P \to \Box\Box P$,
A_5:	$\Box P \to LP$,
Spinoza:	$LP \to L\Box P$,
Leibniz:	$LP \to \Box LP$,
localisation:	$LLP \to LP$. ☒

D'autre part, ce système $L\ \Box_{Gr}$ est complet pour les *L*-structures de Grothendieck où J est préordonné. On prend pour J l'ensemble préordonné Max_L des couples (Γ,C) où Γ est un ensemble maximal consistant d'énoncés de $L + C$, riche pour $L + C$.

La topologie de Grothendieck U sur Max_L sera donnée par:

$$U_{(\Gamma,C)} = \{R \mid R \subseteq \beta^{-1}(\Gamma,C), \text{ R est un crible et pour tout } (\Gamma',C') \leqslant (\Gamma,C) \text{ et pour tout énoncé A de } L + C' \text{ si } R \cap \beta^{-1}(\Gamma',C') \subseteq [A]_{(\Gamma',C')} \text{ alors } LA \in \Gamma'\}.$$

On vérifie facilement, en utilisant les divers arguments des paragraphes prédédents:

THEOREME 17. *(Max_L,U) est un site et donc (Max_L,M,U) est une L-structure de Grothendieck.* ☒

On démontre alors la proposition suivante:

PROPOSITION 18. – *Soit* P *un énoncé de* $L + C$. *Si* $LP \in \Gamma$ *alors* $[\Box P]_{(\Gamma,C)} \in U_{(\Gamma,C)}$.

Démonstration. – D'abord (cfr. proposition 10) $[\Box P]_{(\Gamma,C)}$ est un crible. Ensuite, soit $(\Gamma',C') \leqslant (\Gamma,C)$ et A un énoncé de $L + C'$. Supposons que

$$[\Box P]_{(\Gamma,C)} \cap \beta^{-1}(\Gamma',C') \subseteq [A]_{(\Gamma',C')}$$

On a donc $[\Box P]_{(\Gamma',C')} \subseteq [A]_{\Gamma',C'}$ et donc (voir proposition 7) $\Box(\Box P \to A) \in \Gamma'$ et donc par A_2, $L \Box P \to LA \in \Gamma'$. Comme $LP \in \Gamma$, par l'axiome de Leibniz, $\Box LP \in \Gamma$ et donc $LP \in \Gamma'$ et, par l'axiome de Spinoza, $L \Box P \in \Gamma'$. Il vient donc $LA \in \Gamma'$ comme il fallait le montrer. ⊠

On a alors facilement l'analogue de la proposition 5:

PROPOSITION 19. – *Soit* $P(\bar{x})$ *une formule de L. On a*

$$M \models_{(\Gamma,C)} P(\bar{x})\,[\bar{a}] \text{ ssi } P(\bar{a}) \in \Gamma. \quad ⊠$$

On a donc le théorème de complétude:

THEOREME 20. – *Tout ensemble consistant d'énoncés possède un modèle contenu dans la L-structure de Grothendieck* $<Max_L, M, U>$. ⊠

Et sa version simple:

THEOREME 21. – P *est un théorème du système* $L\,\Box_{Gr}$ *si et seulement si* P *est vrai dans toute structure de Grothendieck (préordonnée).*

Université Catholique de Louvain

Th. LUCAS et R. LAVENDHOMME

BIBLIOGRAPHIE

[G] GOLDBLATT R.I., "Grothendieck topology as geometric modality", *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., 27* (1981), 495-529.

[LL] LAVENDHOMME R., LUCAS Th., Une interprétation modale de la logique intuitionniste", *C.R. Ac. Sc. Paris, 298* (1984), 193-196.

[L] LAWVERE F.W., "Quantifiers and sheaves", *Actes Congrès Intern. Math.* I (1970), 329-334.

[C] CHELLAS B.F., *Modal Logic. An Introduction*, Cambridge University Press (1980).