SUR LE διεζευγμένον DE LA LOGIQUE STOICIENNE

Jean-Louis GARDIES

Depuis l'article mémorable de Łukasiewicz *Sur l'histoire de la logique des propositions* (1), on interprète traditionnellement le *ou* (διεζευγμένον grec, *disjunctum* latin) rencontré dans les écrits logiques des Stoïciens qui nous ont été transmis, comme un équivalent du connecteur binaire de l'*alternative*, l'alternative de deux propositions étant reconnue comme vraie si et seulement si une et une seule de ces deux propositions est vraie. Une telle interprétation s'accorde en effet parfaitement avec les quatrième et cinquième schèmes d'inférence constitutifs de l'axiomatique de la logique des propositions attribuée à Chrysippe (2):

IV *p ou q; or p; donc non q,*
V *p ou q; or non q; donc p.*

On voit immédiatement que le quatrième schème pourrait s'appliquer à l'*incompatibilité*, l'incompatibilité de deux propositions étant fausse si et seulement si chacune des deux propositions est vraie; que le cinquième pourrait s'appliquer à la *disjonction*, la disjonction de deux propositions étant fausse si et seulement si chacune des deux propositions est fausse. L'un et l'autre schèmes ne peuvent en revanche s'appliquer *à la fois* à un autre connecteur binaire que celui que nous avons défini comme *alternative*.

Il semble que les Stoïciens aient eu quelque difficulté à distinguer nettement les trois sens possibles que la conjonction *ou* est ainsi susceptible de prendre à l'intérieur des langues indo-européennes. Les témoignages d'une telle distinction sont tardifs. Bocheński (3) la fait remonter à Galien. Il est, à notre connaissance, possible de la faire remonter un peu plus tôt: le *Digeste* de Justinien reproduit un texte de

(1) Traduction anglaise *On the history of the logic of propositions* in *Polish logic 1920-1939*, ed. by Storrs Mc Call, Oxford, Clarendon press, 1967, pp. 66-87.
(2) Cf. id., p. 74.
(3) *Formale Logik*, München, Karl Alber, dritte Auflage, 1970, p. 138.

Proculus([4]), jurisconsulte fameux du Ier siècle, où la distinction des trois connecteurs, assortie d'excellents exemples, est clairement exposée. L'auteur y montre sans confusion possible qu'à côté du *disjunctivum*, auquel s'applique aussi bien le quatrième que le cinquième schème de Chrysippe (*posito altero necesse est tolli alterum, item sublato altero poni alterum*), il existe deux formes de *subdisjunctivum* (traduction latine du grec παραδιεζευγμένον): l'une à laquelle ne s'applique que le quatrième schème (*ita non potest uterque esse, ut possit neuter esse*) et l'autre à laquelle ne s'applique que le cinquième (*ita non potest neuter esse, ut possit uterque esse*). Les exemples donnés par Proculus se retrouveront jusque dans la scolastique tardive; mais il est difficile, dans le mérite du texte en question, de faire la part de l'héritage stoïcien et celle de Proculus lui-même.

L'identification du διεζευγμένον au connecteur binaire de l'*alternative* ne soulève aucune difficulté, tant que la conjonction *ou* ne relie que deux propositions. Or les Grecs et les Romains, comme nous-mêmes, ne s'interdisaient nullement de relier plus de deux propositions par un usage répété de cette conjonction. C'est pourquoi des auteurs comme Aulu-Gelle([5]), Galien([6]) ou Sextus Empiricus([7]), caractéri-

([4]) *Digeste* 50, 16, 124: «Proculus libro secundo epistularum. Haec verba 'ille aut ille' non solum disjunctiva, sed etiam subdisjunctivae orationis sunt. Disjunctivum est, veluti cum dicimus 'aut dies aut nox est', quorum posito altero necesse est tolli alterum, item sublato altero poni alterum. Ita simili figuratione verbum potest esse subdisjunctivum. Subdisjunctivi autem genera sunt duo: unum, cum ex propositis finibus ita non potest uterque esse, ut possit neuter esse, veluti cum dicimus 'aut sedet aut ambulat': nam ut nemo potest utrumque simul facere, ita aliquis potest neutrum, veluti is qui accumbit. Alterius generis est, cum ex propositis finibus ita non potest neuter esse, ut possit uterque esse, veluti cum dicimus 'omne animal aut facit aut patitur: nullum est enim quod nec faciat nec patiatur: at potest simul et facere et pati.»

([5]) *Les nuits attiques*, XVI, 8, 13-14: «Ex omnibus quae disjunguntur unum esse verum debet, falsa cetera». «De tous les termes en disjonction, un doit être vrai et tous les autres faux».

([6]) *Introductio dialectica*, 5 p. 12, 3 Kalbfl., cité dans Ioannes ab Arnim, *Stoicorum veterum fragmenta*, vol. II, Stuttgart, Teubner, 1968, p. 72: «<ἐν> ἐνίοις δ' αξιώμασι ἐγχωρεῖ μὲν εἶναι καὶ πλείω καὶ πάντα, μὴ μόνον ἕν, ἀναγχαῖον δ' ἐστὶ τὸ ἓν ὑπάρχειν. ὀνομάζουσι δ' ἔνιοι τὰ τοιαῦτα «παραδιεζευγμένα», τῶν διεζευγμένων ἓν μόνον ἐχόντων ἀληθές, ἄν τ' ἐκ δυοῖν ἀξιωμάτων ἁπλῶν ἄν τ' ἐκ πλειόνων συγκέηται». «Dans certaines propositions il est possible que plusieurs termes soient vrais et même tous, et non seulement un, mais il est nécessaire qu'il y en ait un; certains nomment de telles propositions «subdisjointes» (παραδιεζευγμένα), les disjointes (διεζευγμένα) sent explicitement la vérité du διεζευγμένον par la vérité de l'un des termes et la fausseté *de l'autre ou de tous les autres*. Aulu-Gelle dit encore que le διεζευγμένον est faux si de tous les termes ainsi disjoints aucun n'est vrai ou plus d'un est vrai. Les scolastiques, qui reprendront à la tradition stoïcienne la distinction des trois *ou*, caractériseront de même le διεζευγμένον, qu'ils appelleront quelquefois *jugement disjonctif complet*, par la vérité de l'un des termes et la fausseté de tous les autres. Ainsi Jungius au paragraphe 6 du chapitre XVI du livre deuxième de sa *Logica hamburgensis* ([8]) écrira-t-il:

> ... le jugement *ou la rose est un arbre, ou c'est une herbe, ou c'est un buisson* est équivalent aux six jugements de conséquence:
>
> *Si la rose est un arbre, elle n'est ni un buisson ni une herbe,*
> *Si la rose est un buisson, elle n'est ni un arbre ni une herbe,*
> *Si la rose est une herbe, elle n'est ni un arbre ni un buisson,*
> *Si la rose n'est pas un arbre, elle est un buisson ou une herbe,*
> *Si la rose n'est pas un buisson, elle est un arbre ou une herbe,*
> *Si la rose n'est pas une herbe, elle est un arbre ou un buisson.*

Or cette manière de caractériser un certain usage de la conjonction *ou* par la vérité de l'un des termes et la fausseté de tous les autres ne s'accorde avec la table de vérité du connecteur *binaire* de l'*alternative* que si l'on s'interdit d'étendre cette alternative au delà de deux termes. L'extension de l'alternative binaire à trois termes nous

ayant un seul terme vrai, qu'elles soient composées de deux propositions simples ou de plus».

([7]) *Hypotyposes pyrrhoniennes*, II, 191: «τὸ γὰρ ὑγιὲς διεζευγμένον ἐπαγγέλλεται ἓν τῶν ἐν αὐτῷ ὑγιὲς εἶναι, τὸ δὲ λοιπὸν ἢ τὰ λοιπὰ ψεῦδος ἢ ψευδῆ μετα μάχης».
«Car la disjonction valide garantit que l'un de ses termes est valide, et que l'autre ou les autres, par opposition, est faux ou sont faux».

([8]) «... haec, *Rosa aut arbor est, aut herba, aut frutex*, aequipollet hisce *sex* connectis,

> *Si rosa est arbor, neque frutex, neque herba est,*
> *Si rosa est frutex, neque arbor, neque herba est,*
> *Si rosa est herba, neque arbor, neque frutex est,*
> *Si rosa non est arbor, vel frutex, vel herba est,*
> *Si rosa non est frutex, vel arbor, vel herba est,*
> *Si rosa non est herba, vel arbor, vel frutex est.*»

obligerait déjà à considérer comme vraie l'alternative de trois termes vrais, ce qui ne serait d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème que nous nous proposons maintenant de démontrer, selon lequel:

L'alternative (binaire) de m termes a la valeur vrai si et seulement si, parmi les m termes, le nombre de ceux qui ont la valeur vrai est impair.

⁂

Soit l'alternative de m termes $p_1, p_2, \ldots, p_m$, le nombre de ceux de ces termes qui ont la valeur V (vrai) étant n, et le nombre de termes qui ont la valeur F (faux) étant par le fait même m-n ($o \leqslant n \leqslant m$). L'associativité et la commutativité de l'alternative garantissent l'équivalence d'une alternative quelconque avec l'alternative obtenue à partir de celle-ci en regroupant en tête de l'expression tous les termes ayant la valeur V et en les faisant suivre de tous les termes ayant la valeur F.

Décidons, pour simplifier notre démonstration, d'étendre l'expression «alternative de n termes» au cas où $n = 1$. Ainsi «p» pourra être considéré comme l'*alternative de 1 terme*.

PREMIER LEMME: *L'alternative des $m - n$ termes ayant la valeur F a elle-même la valeur F.* Ceci est trivial si $m - n = 1$. Si $m - n > 1$, puisque l'alternative de deux termes quelconques ayant la valeur F prend toujours la valeur F, l'alternative d'un nombre quelconque de termes ayant la valeur F ne pourra elle-même prendre d'autre valeur que F.

SECOND LEMME: *L'alternative des n termes ayant la valeur V a la valeur F si et seulement si n est pair, c'est-à-dire qu'elle a la valeur V si et seulement si n est impair.* Ceci est trivial pour le cas où $n = 1$. Pour le cas où $n > 1$, on procède aux deux démonstrations suivantes:

1) Si le nombre des termes ayant la valeur V est pair réunissons ces n termes en n/2 couples; les n/2 alternatives constituées par ces couples auront toutes la valeur F. Donc d'après le *premier lemme*, l'alternative de toutes ces alternatives aura la valeur F.
2) Si le nombre n des termes ayant la valeur V est impair, l'alternative

de n − 1 de ces termes aura la valeur F, puisque n − 1 sera pair; donc l'alternative entre cette alternative et le $n^{\text{ème}}$ terme ayant la valeur V aura elle-même la valeur V.

Considérons maintenant notre initiale alternative de m termes comme l'alternative entre ces deux termes que sont:

- l'alternative des n termes vrais, d'une part, dont la valeur est donnée par le second lemme,
- l'alternative des m − n termes faux, d'autre part, dont notre premier lemme a montré qu'elle avait la valeur F.

L'alternative globale des m termes a donc la valeur V si et seulement si l'alternative des n termes vrais a elle-même la valeur V, c'est-à-dire, selon notre *second lemme*, si et seulement si le nombre n des termes vrais est impair([9]). C.Q.F.D.

***

Lorsque Jungius reprend la distinction des trois sens possibles du mot *ou*, en l'illustrant notamment par les exemples mêmes qu'avait donnés Proculus et se référant d'ailleurs([10]) explicitement à la terminologie des «jurisconsultes», il explique d'abord que «le jugement disjonctif» sous sa forme la plus générale, «peut comporter plus de deux membres» et que «l'ordre des membres est indifférent». Ce faisant, il faut bien reconnaître qu'il ne fait qu'énoncer les propriétés implicites que la conjonction *ou* manifeste dans nos usages linguistiques. Si le *ou* de la *disjonction* signifie «au moins l'un des m termes», si le *ou* de l'*incompatibilité* signifie «au plus l'un des m termes», si le *ou* de l'*alternative* signifie «au moins et au plus l'un des m termes», il va de soi d'abord que tous ces différents *ou*, comme le reconnaissait Jungius à sa manière, sont associatifs et commutatifs.

Joachimi Jungii *Logica Hamburgensis*, ed. Rudolf Meyer, J.J. Augustin, Hamburg, MCMLVII, Liber II, Cap. XVI, § 6, p. 104.

([9]) Ce résultat reste trivialement vrai tant pour $n = 0$ que pour $m = n$.

([10]) Cf. *Logica hamburgensis*, ibid., § 2, p. 104:
Disjunctiva in eo Copulatae similis est, quod et *pluribus quam duobus* membris constare potest, neque membra habet *ordine* differentia, ...»
et § 8, p. 105.

Mais nous savons que, des connecteurs binaires en question, seules la *disjonction* et l'*alternative* sont associatives. Cette considération devrait suffire à nous faire admettre que l'*incompatibilité* mentionnée par certains auteurs, de Proculus à Jungius au moins, n'est pas notre *incompatibilité binaire*. Proculus avait donné cet excellent exemple d'*incompatibilité* entre deux termes: «ou il est assis ou il marche» ([11]), l'un et l'autre ne pouvant être vrais mais pouvant fort bien être faux en même temps (c'est le cas si l'homme est couché); Aulu-Gelle([12]) élargit en quelque sorte cet exemple à trois termes: «ou tu cours ou tu marches ou tu te tiens debout immobile»; chacun des trois termes exclut ici les deux autres; mais rien n'empêche que tous trois soient faux en même temps (c'est le cas si tu es couché). L'*incompatibilité* des m termes correspond ici à la définition suivante([13]):

$$| \ (p_1, \ p_2, \ \ldots, \ p_m) \underset{df}{\equiv} (p_1 \,\&\, \text{non } p_2 \,\&\, \text{non } \ldots \,\&\, \text{non } p_m) \vee (\text{non } p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \text{non} \ldots \,\&\, \text{non } p_m) \vee \ldots\ldots \vee (\text{non } p_1 \,\&\, \text{non } p_2 \,\&\, \text{non} \ldots \,\&\, p_m) \vee (\text{non } p_1 \,\&\, \text{non } p_2 \,\&\, \text{non} \ldots \,\&\, \text{non } p_m)$$

La comparaison de ce que donne la table de vérité pour cette définition quand $m = 3$ avec les résultats de cette table pour les expressions $p \,|\, (q \,|\, r)$ d'une part et $(p \,|\, q) \,|\, r$ d'autre part, suffira à nous convaincre que, si un connecteur a quelque répondant intuitif dans nos usages linguistiques, c'est bien le connecteur m-aire que nous venons de définir, non le connecteur binaire.

Le cas de la *disjonction* ne soulève en revanche aucune difficulté, puisque la disjonction m-aire ne différerait en rien de la disjonction binaire: dans l'une et l'autre, nous retrouverions bien le sens, accordé aux usages linguistiques, de «au moins un».

Dans le cas de l'*alternative*, il ne faut pas que la difficulté soit masquée par l'associativité du connecteur binaire. Si nous voulons retrouver un emploi de ce *ou* qui corresponde à la fois à un certain usage linguistique et au διεζευγμένον de la tradition issue du Stoïcisme, nous devons abandonner le classique connecteur binaire et retenir la définition suivante([14]):

([11]) Cf. la note 4 ci-dessus.

([12]) *Les nuits attiques*, XVI, 8, 14.

([13]) Nous reprenons ici la «barre de Sheffer», mais en la faisant *suivre* de ses m arguments.

([14]) Nous reprenons ici le symbole assez traditionnel pour l'alternative binaire, mais en le faisant *suivre* de ses m arguments.

$$w\ (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m) \underset{df}{\equiv} (p_1 \,\&\, \text{non}\ p_2 \,\&\, \text{non} \ldots \&\, \text{non}\ p_m) \vee (\text{non}\ p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \text{non} \ldots \&\, \text{non}\ p_m) \vee \ldots\ldots \vee (\text{non}\ p_1 \,\&\, \text{non}\ p_2 \,\&\, \text{non} \ldots \&\, p_m)$$

dont on observera d'abord qu'elle correspond bien au sens de «au moins et au plus l'un des m termes», ensuite qu'elle ne se distingue de la définition m-aire, que nous avions proposée, de l'*incompatibilité* que par la suppression du dernier terme de la disjonction constitutive du *definiens* de cette dernière.

On remarquera encore que ces connecteurs m-aires ne se distinguent plus des classiques connecteurs binaires correspondants, quand m = 2. Telle est la source de l'authentique confusion qui a poussé les logiciens contemporains à interpréter les connecteurs de la tradition stoïcienne comme des connecteurs binaires. Les textes anciens dans lesquels le *ou* s'applique à plus de deux termes doivent suffire à nous tirer de cette confusion.

*
**

Pour terminer, montrons comment un texte, partiellement inintelligible si on l'interprète à partir des connecteurs binaires, retrouve sa totale intelligibilité si l'on fonde au contraire son interprétation sur les connecteurs m-aires, comme nous l'avons ici proposé. Il s'agit du texte d'Aulu-Gelle(15) au demeurant bien connu, auquel nous avons déjà fait quelques emprunts, mais qu'il nous faut maintenant reconsidérer dans son ensemble:

(15) Est item aliud quod Graeci διεζευγμένον ἀξίωμα, nos «disjunctum» dicimus. Id hujuscemodi est: «Aut malum est voluptas aut bonum, aut neque bonum neque malum est.» Omnia autem quae disjunguntur pugnantia esse inter sese oportet, eorumque opposita, quae ἀντικείμενα Graeci dicunt, ea quoque ipsa inter se adversa esse. Ex omnibus quae disjunguntur unum esse verum debet, falsa cetera. Quod si aut nihil omnium verum aut omnia plurave quam unum vera erunt, aut quae disjuncta sunt non pugnabunt, aut quae opposita eorum sunt contraria inter sese non erunt; tunc id disjunctum mendacium est et appellatur παραδιεζευγμένον, sicuti hoc est, in quo quae opposita sunt non sunt contraria: «Aut curris aut ambulas aut stas». Nam ipsa quidem inter se adversa sunt, sed opposita eorum non pugnant: «non ambulare» enim et «non stare» et «non currere» contraria inter sese non sunt, quoniam «contraria» ea dicuntur quae simul vera esse non queunt; possis enim simul eodemque tempore neque ambulare neque stare neque currere.
Les nuits attiques, XVI, 8, 12-15.

> Il y a aussi autre chose, que les Grecs appellent διεζευγμένον ἀξίωμα et que nous appelons «disjunctum». Il est de ce genre: «ou le plaisir est un mal, ou c'est un bien, ou ce n'est ni l'un ni l'autre». Or il faut que tous les termes en disjonction soient incompatibles entre eux et que leurs contradictoires, que les Grecs appellent ἀντικείμενα, soient aussi eux-mêmes opposés entre eux. De tous les termes en disjonction un seul doit être vrai, tous les autres faux. Mais si, de tous ces termes, aucun n'est vrai, ou encore si tous ou, du moins, plus d'un sont vrais, alors ou bien les termes disjoints ne seront pas incompatibles ou bien leurs contradictoires ne seront pas contraires entre eux; dans ces conditions, il s'agit d'un faux *disjunctum*, qu'on appelle παραδιεζευγμένον, comme dans cet exemple, où les contradictoires des termes ne sont pas contraires entre eux: «ou tu cours ou tu marches ou tu te tiens debout immobile». Car les termes eux-mêmes sont bien opposés entre eux, mais leurs contradictoires ne sont pas incompatibles: en effet «ne pas marcher», «ne pas se tenir debout immobile» et «ne pas courir» ne sont pas contraires entre eux, puisqu'on appelle «contraires» les termes qui ne peuvent être vrais en même temps; car on pourrait au même moment ne pas marcher, ne pas se tenir debout immobile, et ne pas courir.

Bocheński, après avoir cité ce texte([16]) en signale les difficultés; mais, sans en donner d'autre justification qu'un rapprochement avec les schèmes d'inférence attribués à Chrysippe, il n'en maintient pas moins l'interprétation du διεζευγμένον comme connecteur binaire de l'alternative: «Trotzdem ist die Praxis der Schule in bezug auf die hier definierte Disjunktion eindeutig: 'p oder q' in ihrem Sinne ist als Negation der Äquivalenz aufgefasst, so nämlich, dass genau eines der beiden Argumente wahr und genau eines falsch ist». Là est pourtant la racine de l'incompréhension.

Nous avons traduit dans cette page d'Aulu-Gelle «opposita» par «contradictoires» ; le contexte montre en effet que l'*oppositum* d'une proposition est ici sa négation. En revanche tous les mots que nous avons traduits par «incompatibles» (*pugnantia*), «opposés» (*adversa*),

([16]) *Formale Logik*, p. 137.

«contraires» (*contraria*) n'expriment pas toujours l'incompatibilité des m termes *pris deux à deux*, mais souvent l'incompatibilité, un peu plus faible, de ces m termes *pris tous ensemble*. Ainsi les trois propositions «le plaisir est un mal», «le plaisir est un bien», et «le plaisir n'est ni un bien ni un mal» sont-elles certes incompatibles non seulement toutes ensemble, mais déjà deux à deux, tandis que leurs contradictoires «le plaisir n'est pas un mal, «le plaisir n'est pas un bien», «le plaisir est un bien ou un mal» ne sont incompatibles que toutes trois ensemble.

Reprenons la phrase cardinale de ce texte, d'autant qu'une erreur de construction dans la majorité des traductions en masque le sens([17]): qu'adviendrait-il du διεζευγμένον, si de tous les termes aucun n'était vrai, ou si plus d'un étaient vrais? dans le second cas, tous les termes ne seraient pas incompatibles *deux à deux*; dans le premier, leurs contradictoires ne seraient pas incompatibles même *pris tous ensemble*. Aulu-Gelle ne donne d'exemple que pour ce premier cas, au demeurant un exemple excellent, accompagné d'un commentaire auquel il n'y a rien à ajouter.

*
**

Que le διεζευγμένον ne soit pas le connecteur binaire avec lequel on le confond classiquement, mais plutôt le connecteur m-aire que nous avons défini, ne diminue nullement les mérites, naguère mis en lumière par Łukasiewicz, de la logique stoïcienne. Ce connecteur m-aire n'est pas moins extensionnel que les connecteurs binaires et la définition que nous en avons proposée prouve d'ailleurs qu'il se laisse définir en termes de connecteurs binaires.

Si l'attention des Stoïciens s'est trouvée dirigée vers cette forme de

([17]) Cette erreur se trouve en particulier dans la traduction anglaise de l'édition Loeb, des *Nuits attiques*, ainsi que dans la traduction allemande du passage proposée par Bocheński p. 137 de sa *Formale Logik*. Elle consiste à interpréter la proposition centrale commençant par «Quod si aut nihil...», comme si les quatre «aut» successifs étaient tous subordonnés au «si» initial, le «tunc» annonçant alors la proposition principale. La phrase n'a de sens que si, au contraire, la proposition principale commence déjà avec le troisième «aut», le «tunc» n'exprimant qu'une conséquence (nous avons traduit: «dans ces conditions») de cette principale. Avant le «tunc», certaines éditions mettent une virgule, d'autres, comme il convient, un point-virgule.

«ou exclusif», c'est manifestement parce que cette forme était, et reste, beaucoup plus familière aux usages linguistiques que l'emploi répété de l'alternative binaire dont certains résultats ne laissent pas, quand ils sont perçus, d'être ressentis comme paradoxaux. Quand ces résultats paradoxaux en revanche ne sont pas clairement perçus, il peut arriver qu'ils induisent certains logiciens, et non des moindres([18]), en erreur. Aujourd'hui encore les informaticiens, quand ils ont à symboliser un «ou» reliant plus de deux propositions et dont le contexte suggère qu'il est «exclusif», auraient peut-être intérêt à se demander si le διεζευγμένον stoïcien ne conviendrait pas davantage à son expression que l'*alternative binaire*.

([18]) Ainsi Quine, dans sa *Logique élémentaire*, A. Colin, 1972, p. 41, donne-t-il comme équivalent de

Jupin vient ou Simon reste ou Robert part

(«ou» étant pris dans son usage «exclusif»)

non (Jupin vient & Simon reste) & non (Jupin vient & Robert part)
& non (Simon reste & Robert part) &
non (Jupin ne vient pas & Simon ne reste pas & Robert ne part pas)

expression qui, à l'insu de Quine semble-t-il, correspond, non au classique connecteur binaire, mais au connecteur m-aire que nous avons défini. Nous donnons ici la référence dans la traduction française du livre, mais nous avons vérifié que celle-ci ne s'écartait pas du texte anglais.