

MYTHE ET REALITE DE LA FORMULE DE BARCAN

Gérolde STAHL

On appelle «formule de Barcan» l'expression suivante:

$$(x)LFx \supset L(x)Fx \quad (B)$$

(avec «L» pour «nécessaire» et « $\supset$ » pour l'implication matérielle) ou l'expression équivalente:

$$M(Ex)Fx \supset (Ex)MFx \quad (1)$$

ou plus forte:

$$M(Ex)Fx \rightarrow (Ex)MFx \quad (2)$$

(avec «M» pour «possible» et « $\rightarrow$ » pour l'implication stricte: « $A \rightarrow B =_{df} L(A \supset B)$ »).

La formule (B) n'est pas un théorème des systèmes modaux de premier ordre⁽¹⁾ T et S4, mais elle est théorème de S5 (voir [3] dans la bibliographie); elle est compatible avec les systèmes T et S4, de façon à ce qu'elle puisse être ajoutée à T et à S4 comme axiome additionnel. Ainsi on a cinq systèmes modaux de premier ordre très intéressants, qui sont T, S4, S5, T + (B) et S4 + (B).

Les systèmes S5, T + (B) et S4 + (B) ont des modèles très simples et intuitifs; ils disposent d'un seul univers du discours (*D*), qui est le même pour tous les mondes⁽²⁾. Si, au contraire, on veut former des modèles pour T et S4 dans lesquels (B) ne se vérifie pas dans tous les mondes, on a pas mal de problèmes. Ainsi on travaille avec des univers spécifiques (*D*₁, *D*₂, etc.) pour les différents mondes; c'est-à-

⁽¹⁾ «Système modal de premier ordre T», etc. veut dire qu'on élargit, de façon correspondante, la classe des expressions bien formées et la classe des théorèmes du système (non modal) de premier ordre, en y ajoutant les axiomes de T (aussi dénommé «M») ou de S4 ou de S5.

Dans S5 (et dans tous les systèmes où (B) est théorème) les formules (1) et (2) sont équivalentes.

⁽²⁾ Par rapport à T et S4, «pour tous les mondes» doit toujours être entendu comme «pour tous les mondes qui satisfont une condition d'accessibilité» ([3]).

dire, chaque monde m_i a son univers D_i , et si $m_i \neq m_j$, on peut avoir (pas nécessairement) $D_i \neq D_j$. La multiplicité des univers crée pour sa part des problèmes: Que faire de « Fa » dans un monde m_i si a n'appartient pas à D_i ? (Pour les solutions «pas de valeur» ou «faux», voir [3]).

Mais ce n'est pas tout. A quoi bon toutes ces complications si (B) est valide dans tous les modèles de S5? Pour «sauver» S5 de la formule de Barcan, il fallait changer la partie non modale, c'est-à-dire le système fonctionnel de premier ordre. Des formules comme:

$$(x)Fx \supset Fy$$

ne seront plus des théorèmes, mais seulement leurs fermetures universelles:

$$(y)((x)Fx \supset Fy).$$

C'était Kripke ([4] et aussi [3]) qui a franchi ce pas. On appellera ici «TK», «S4K» et «S5K» les systèmes qu'on obtient si l'on modifie T, S4 et S5 dans ce sens. Aucun des nouveaux systèmes n'a (B) comme théorème et on peut construire des modèles pour les trois systèmes dans lesquels (B) n'est pas valide.

En résumé, beaucoup de complications, beaucoup de sacrifices. Et tout cela afin qu'une formule d'apparence assez innocente ne devienne pas théorème. C'est ici qu'entre le mythe de la formule de Barcan. Un peu plus tard j'indiquerai ce que la formule de Barcan dit réellement, pour le moment, je mentionne ce qu'elle est supposée dire.

Une lecture rapide de (B) donne:

Si tous les x satisfont nécessairement F , alors il est nécessaire que tous les x satisfont F .

Pour réfuter une implication, il suffit d'indiquer un cas (un modèle du système) dont l'antécédent est vrai et le conséquent est faux. Supposons que, parmi d'autres, nous ayons deux mondes m_1 avec D_1 et m_2 avec D_2 , et qu'il y ait des éléments de D_2 qui ne sont pas dans D_1 . Maintenant, considérons le cas suivant: Tous les éléments de D_1 satisfont F dans tous les mondes (antécédent vrai); cependant, il pourrait y avoir un monde (m_2) dont au moins un individu (un élément de D_2) ne satisfait pas F , autrement dit, ce n'est pas une vérité

nécessaire (dans tous les mondes) que tous les individus satisfont F (conséquent faux).

Ma critique de cette lecture de (B) et d'autres lectures similaires procède en deux étapes.

Première étape: Fréquemment dans les argumentations autour de (B), il y a une confusion *de re* - *de dicto*. On quantifie sur les mondes («nécessaire», «pour tous les mondes» et «possible», «pour au moins un monde») et ensuite on quantifie de l'extérieur dans une expression avec quantification modale.

Exemple:

$$(x)(m)Fm, \dots, x, \dots$$

(pour tous les mondes m , et ensuite on quantifie pour tous les x).
Traité de cette façon, c'est un procédé typique *de re*. Si l'on procédait *de dicto*:

« $F \dots x, \dots$ » est une vérité nécessaire

on arriverait à quelque chose comme:

$$(x)(\text{«}F \dots x, \dots\text{» est une vérité nécessaire}).$$

Ce traitement constitue une confusion totale des niveaux de langage (d'une part on a l'expression « x » et d'autre part on quantifie sur des individus non linguistiques x); il y a longtemps, Quine ([6]) a attiré l'attention sur ce point. Afin d'arranger les choses *de dicto*, on devrait procéder, par exemple, de la façon suivante:

$$(k)(\text{la suite «}F\text{» } \dots, k, \dots \text{ est une vérité nécessaire})^{(3)}$$

où « (k) » signifierait «pour tous les symboles de constantes individuelles».

Dans la littérature sur (B), le traitement est bientôt *de re* (on écrit « $(x)LFx$ »), bientôt *de dicto* (au moins dans une partie de la définition de «validité»). Ici, on optera pour un traitement *de re*, qui est plus

⁽³⁾ En métalangue:

$$\text{«}Fabc\text{»}$$

est une abréviation de:

$$\text{«}F\text{» «}a\text{» «}b\text{» «}c\text{»}.$$

simple et plus clair (pour la relation *de re - de dicto* et pour une formule de Barcan en partie *de re* et en partie *de dicto*, voir [10]).

Deuxième étape: Afin de présenter le problème de (B) d'une façon immédiate, traitons les mondes comme des individus et établissons que chaque D_i contient la classe des mondes comme sous-classe, et que F a un argument additionnel pour les mondes. En plus, on utilisera des opérateurs restreints, c'est-à-dire, « $(x)_i$ » est utilisé pour «tous les individus de D_i » et « $(m)_w$ », «pour tous les mondes». On obtient alors dans le système fonctionnel de premier ordre (grâce à la commutativité des opérateurs universels) *sans aucun axiome modal* le théorème:

$$(x)_i(m)_w Fmx \supset (m)_w(x)_i Fmx \quad (3).$$

L'expression (3) pourrait être considérée, dans un certain sens, comme une version de (B); la commutativité des opérateurs existentiels nous donne un résultat analogue par rapport à (1) et (2). Quoique (3) ne soit pas équivalent à (B), elle nous permet de voir le mécanisme des contre-exemples par rapport à (B). On avait vu (dans l'antécédent vrai) que tous les éléments de D_1 satisfont F dans tous les mondes:

$$(x)_1(m)_w Fmx.$$

On avait vu ensuite (dans le conséquent faux) qu'il pouvait y avoir un monde m_2 dont au moins un individu (un élément de D_2) ne satisfait pas F :

$$(Em)_w(Ex)_2 \sim Fmx$$

autrement dit:

$$\sim(m)_w(x)_2 Fmx.$$

On n'a pas réfuté:

$$(x)_1(m)_w Fmx \supset (m)_w(x)_1 Fmx \quad (4)$$

qui reste correcte, mais seulement une formule qui, dans le conséquent, a « $(x)_2$ » à la place de « $(x)_1$ », et qui n'est pas un théorème du système fonctionnel de premier ordre.

Toute la question est de savoir si on lira (B) avec « $(x)_1$ » dans l'antécédent et « $(x)_2$ » dans le conséquent. Si oui, il est préférable d'exclure (B), si non, il n'y a aucune raison pour former des systèmes

sans (B). Kripke et d'autres ont construit des sémantiques (assez tordues) qui acceptent tous les théorèmes de TK, S4K et S5K et refusent (B). C'est, sans doute, un exploit d'avoir réussi dans cette entreprise, mais cela ne prouve pas que la réponse «oui» soit la seule correcte. Les sémantiques beaucoup plus simples avec (B) ne prouvent pas le contraire. En dernier ressort, c'est un choix personnel si l'on veut ou ne veut pas accepter une formule de Barcan démystifiée.

Cependant, on pourrait exiger, en travaillant avec des univers spécifiques, que les opérateurs mentionnent l'univers correspondant (par exemple par des indices). On aurait alors, d'une part, le théorème (B) par rapport à l'univers total⁽⁴⁾:

$$(x)LFx \supset L(x)Fx$$

et, d'autre part, pour les univers spécifiques:

$$(x)_iLFx \supset L(x)_jFx$$

qui n'est pas théorème, à moins que $i = j$.

BP. 222.06
75264 Paris Cedex 06

Gérolde STAHL
CNRS, Paris

(⁴) L'expression (B) serait alors valide, même dans les sémantiques de Kripke, si l'on y dispose d'un monde correspondant à D .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARCAN, R.C., Interpreting Quantification, *Inquiry*, Vol. 5, Oslo, 1962, pp. 252-259.
- [2] HINTIKKA, K.J.J., Modality and Quantification, *Theoria*, Vol. 27, Lund, 1961, pp. 119-128.
- [3] HUGHES, G.E. et CRESSWELL, M.J., *An Introduction to Modal Logic*, Londres, 1968.
- [4] KRIPKE, S.A., Semantical Considerations on Modal Logics, *Acta Philosophica Fennica*, Fasc. XVI, 1963, pp. 83-94.
- [5] PRIOR, A.N., *Time and Modality*, Oxford, 1957.
- [6] QUINE, W.V., *From a Logical Point of View*, Cambridge Mass., 1953.
- [7] STAHL, G., General Considerations about Modal Sentences, *Zeitschr. f. math. Logik*, Vol. V, Berlin 1959, pp. 280-290.

- [8] — Termes temporels dans des systèmes fonctionnels, *Revue Philos. de la France et de l'étranger*, Paris, 1974, n° 3, pp. 293-303.
- [9] — Modal Models Corresponding to Models, *Zeitschr. f. math. Logik*, Berlin, 1974, Vol. XX, pp. 407-410.
- [10] — Quelques relations entre temporalité *de re* et temporalité *de dicto* et leur extension aux modalités, *Revue Philos. de la France et de l'étranger*, Paris, 1976, n° 2, pp. 165-178.
- [11] — Identité et descriptions dans un système temporel et modal, *Revue Philos. de la France et de l'étranger*, Paris, 1978, n° 2, pp. 145-156.
- [12] — La complétude d'un système temporel *de re*, *Logique et analyse*, Louvain, 1980, pp. 365-373.
- [13] — Les modalités *de dicto* et les modalités propositionnelles, *Revue Philos. de la France et de l'étranger*, Paris, 1981, n° 3, pp. 303-309.
- [14] — Quelques caractéristiques des modalités logiques, dans le livre collectif de David, J. et Kleiber, G., *La notion sémantico-logique de modalité*, Metz, 1983, pp. 43-53.
- [15] — Une autre façon de voir les «désignateurs rigides», *Revue Philos. de la France et de l'étranger*, Paris, 1983, n° 3, pp. 311-316.