ZUM PROBLEM DES BEWEISES EX MOTU DER EXISTENZ GOTTES*

Korneliusz POLICKI

Herr J. Salamucha hat im Jahre 1934 eine interessante, logische Analyse des Beweises der Existenz Gottes aus der Bewegung von Thomas von Aquin dargestellt. Diese Untersuchung unter dem Titel "Dowód" ex motu "na istnienie Boga" (4) ist unter Anwendung der modernen, formalen Logik durchgeführt. Sie enthält eine formale Beweisführung aus der Bewegung auf die Existenz Gottes und eine Reihe von sehr wertvollen Anmerkungen über die Prämissen dieser Analyse.

Die Untersuchungen von Salamucha bezüglich der formalen Methoden der Beweisführung der Existenz Gottes sowie der verwendeten Prämissen sind bis jetzt auf wenig Verständnis gestossen; sie sind wegen ihrer Veröffentlichung in Polnisch kaum bekannt geworden.

In seiner Untersuchung treten einige scheinbar unbedeutsame formelle Ungenauigkeiten und Lücken auf, die vom Autor vermutlich übersehen worden sind. Die Ergänzung dieser schwachen Punkte ist der Zweck des vorliegenden Artikels. Er besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil versucht einige Ergänzungen zur Betrachtung Salamuchas zu geben, damit sie noch verständlicher werden können. Im zweiten Teil versuchen wir, eine eigene Formalisierung dieses Beweises von Salamucha durchzuführen.

Wir wenden folgende logische Symbole an:

a) $x, y, z, \ldots x_1, x_2, \ldots$; sind Variable, die für individuelle, real existierende Objekte stehen.

* Zum ersten Mal veröffentlicht in "Roczniki Filozoficzne" (Annals of Philosophy) TNKUL Lublin, T. XXIII, 1/1975, S. 19-30. Die deutsche Übersetzung wurde überarbeitet von A. Menne, Bochum.

b) $X, Y, Z, X_1, X_2 \ldots$; sind Variable, die für Mengen von Objekten stehen.

c) R – ist eine Variable, die für eine zweistellige Relation zwischen Objekten steht.

d) Logische Verknüpfungen (Symbole) von Kalkülsätzen: ($\sim$) Negation, ($\wedge$) Konjunktion, ($\vee$) Disjunktion ($\Rightarrow$) Implikation, ($\Leftrightarrow$) Aequivalenz.

e) Quantoren: Allgemeine ($\bigwedge$), Existenz ($\bigvee$), Individuen ($\bigvee_1$)

f) ($\in$) ist das Symbol der Zugehörigkeit zu einer Menge, (=) das Symbol der Identität

Falls noch einige andere terminologische Begriffe eingeführt und verwendet werden sollen, werden wir sie im Laufe der Untersuchung erläutern. Die Beweisführung formulieren wir mit Prämissen (1). Die Ausdrücke in Klammern sind entsprechende Abkürzungen:

(Pm): Prämisse
(ZPm): Zusatzprämisse
(IBf): Indirekte Beweisführung
(Ws): Widerspruch
(1.1$\rightarrow$ Ws): die Formel führt zum Widerspruch
(log) – Der Ausdruck ist die Ersetzung der Tautologie des Prädikatenkalküls, in dem die Identität als Prädikat vorkommt.

I

Salamuchas Schema zum Beweis der Existenz Gottes aus der Bewegung stellen wir hier mit nur geringfügigen Veränderungen dar. Wir benutzen dabei die logischen Symbole aus Handbüchern der Logik und Mengentheorie. (1;3)

Salamucha benutzt in seiner Untersuchung folgende Definitionen aus der Relationstheorie:

Df. 1. $x \in C(R) \Leftrightarrow \bigvee_y \{yRx \vee xRy\}$

Df. 2. $R \in irr \Leftrightarrow_{x,\, y} \{xRy \Rightarrow x \neq y\}$ [1]

[1] Die Satzformen, die sich im Bereich des Quantors befinden, setzen wir in Klammern { }, der Ausdruck $x \neq y$ ist die Abkürzung von $\sim(x = y)$.

Df. 3. $R \in \mathrm{trans} \Leftrightarrow_{x,\, y,\, z} \{xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz\}$

Df. 4. $R \in \mathrm{con} \Leftrightarrow \bigwedge_{x,\, y} \left\{ x \in C(R) \wedge y \in C(R) \wedge x \neq y \Rightarrow (xRy \vee yRx) \right\}$

Df. 5. $\mathrm{ord}(R) \Leftrightarrow (R \in \mathrm{irr}) \wedge (R \in \mathrm{trans}) \wedge (R \in \mathrm{con})$

Diese Definitionen bedeuten:

Df. 1. – Relationsfeld R

Df. 2. – Die Relation R ist irreflexiv

Df. 3. – Die Relation R ist transitiv

Df. 4. – Die Relation R ist connex

Df. 5. – Die Relation R ist eine Ordnungs Relation

Die Relationen, die durch Df. 5. bestimmt sind, werden oft als Ordnungsreihen bezeichnet, die Menge der so geordneten Objekte sind Ketten.

Ausser den oben definierten Begriffen treten noch zwei konstante Symbole "f" und "$\dashv$" auf, die im entsprechenden Zusammenhang zu lesen sind als:

$f(x)$ – f bewegt sich (Das Objekt x ist in Bewegung)
$x \dashv y$ – x bewegt y (Das Objekt x bewegt das Objekt y)

Mit Hilfe der eingeführten Symbole ist die Beweisführung Salamuchas so dargestellt:

Prämisse:

(a_1) $\bigwedge_{x} \left\{ f(x) \Rightarrow \bigvee_{y} \{y \dashv x\} \right\}$

(a_2) $\mathrm{ord}\,(\dashv)$

(a_3) $\bigvee_{x} \left\{ x \in C(\dashv) \wedge \bigwedge_{y} \{y \in C(\dashv) \wedge x \neq y \Rightarrow x \dashv y\} \right\}$

Die Prämissen setzen fest, dass

(a_1) Für jedes sich in Bewegung befindende Objekt gibtes ein Objekt, das es in Bewegung setzt.

(a_2) Die Relation der Bewegung ist linear geordnet.

(a_3) Es besteht ein Objekt im Relationsfeld, das alle anderen Objekte in Bewegung setzt. (d.h. im Relationsfeld der Bewegung gibt es ein erstes Objekt, das alle anderen bewegt)

Schlussfolgerung:

(a_4) $\bigvee_x 1 \left\{ \sim f(x) \wedge \bigwedge_y \{ y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge x \neq y \Rightarrow x \mathrel{-\!\!3} y \} \right\}$

Der Ausdruck (a_4) besagt, daß es ein Objekt gibt, das sich nicht bewegt, sondern alle anderen in Bewegung setzt (Der erste Beweger).

Den Beweis (a_4) teilt der Autor in zwei Teile ein. Im ersten Teil weist er nach, daß sich als Folge der Prämissen (a_1) - (a_3) und Definitionen (Df. 1) - (Df. 5) folgender Ausdruck ergibt:

(a_4^1) $\bigvee_x \left\{ \sim f(x) \wedge \bigwedge_y \{ y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge x \neq y \Rightarrow x \mathrel{-\!\!3} y \} \right\}$

Weiterhin beweist er, daß es genau ein Objekt gibt, das eine Satzfunktion im Bereich des Existenzquantors des Ausdrucks

(a_4^1) (4 S. 67 ff und 85 ff) erfüllt.

Der Beweis des Satzes (a_4) auf Grund der Prämissen (a_1) - (a_3) und der Definitionen Df. 1-5 stösst auf keine formellen Bedenken. Die fragwürdigen Aspekte treten im Zusammenhang mit den Prämissen auf. Es bezieht sich auf die Bedingungen der verbundenen Relationen, die der Autor auf die Bewegungsrelationen bezieht. Die Bedingungen sind aber (was ich gern nachweisen möchte) in der Beweisführung von Thomas von Aquin überflüssig.

Um das zu beweisen, müssen wir genau die beiden Teile von Salamuchas Beweisführung näher betrachten.

A. (a_1) $\bigwedge_x \left\{ f(x) \Rightarrow \bigvee_y \{ y \mathrel{-\!\!3} x \right\}$

(a_2) $\mathrm{ord}\,(\mathrel{-\!\!3})$ (Pm)

(a_3) $\bigvee_x \left\{ x \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge \bigwedge_y \{ y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge x \neq y \Rightarrow x \mathrel{-\!\!3} y \} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ a \in C(\mathrel{-\!\!3}) \\ (2)\ \bigwedge_y \{y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge a \neq y \Rightarrow a \mathrel{-\!\!3} y\} \end{array}\right. \qquad (a_3)$$

(1.1) $f(a)$	(ZPm)
(1.2) $\bigvee_y \{y \mathrel{-\!\!3} a\}$	(a_1, 1.1)
(1.3) $b \mathrel{-\!\!3} y$	(1.2)
(1.4) $b \in C(\mathrel{-\!\!3})$	(Df. 1, 1.3)
(1.5) $a \neq b$	(Df. 2, Df. 5, a_2, 1.3)
(1.6) $a \mathrel{-\!\!3} b$	(2, 1.4, 1.5)
(1.7) $a \mathrel{-\!\!3} a$	(Df. 3, Df. 5, a_2, 1.6, 1.3)
(1.8) $a \neq a$	(Df. 2, Df. 5, a_2, 1.7)
(1.9) $a = a$	(Log.)

Ws (1.8, 1.9)

(3) $\sim f(a)$ (1.1 $\rightarrow$ Ws)

(4) $\bigvee_x \{\sim f(x) \wedge \bigwedge_y \{y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge x \neq y \Rightarrow x \mathrel{-\!\!3} y\}\}$ (3,2)

Der Ausdruck (4) ist gleichbedeutend mit dem Satz (a_4^1), der den ersten Teil der Beweisführung abschließt.

Der zweite Teil ist von Salamucha nur im Abriss dargelegt. (4 S. 86)

B. Wir nehmen an, daß sich auf dem Bewegungsfeld zwei verschiedene Objekte x_1 und x_2 befinden. Falls das Objekt x_1 das erste im Feld ist, dann erfüllt es die Bedingung:

(1) $\bigwedge_y \{y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge x \neq y \Rightarrow x_1 \mathrel{-\!\!3} y\}$

Falls das Objekt x_2 das erste ist, dann erfüllt dieses die Bedingung:

(2) $\bigwedge_y \{y \in C(\mathrel{-\!\!3}) \wedge x_2 \neq y \Rightarrow x_2 \mathrel{-\!\!3} y\}$

Aus dem Zusammenhang der Bewegungsrelationen Df 4, sowie aus der Prämisse $x_1, x_2 \in C(\mathrel{-\!\!3})$

ergibt sich folgende Alternative:

(3) $(x_1 \ni x_2) \vee (x_2 \, L \, x_1)$

Aus diesem Ausdruck (3), Def. 2-5, Prämisse (a_2), sowie den Ausdrücken (1) und (2), ergeben sich Widersprüche.

Die Annahme, daß im Relationsfeld der Bewegung zwei verschiedene erste Objekte vorhanden sind, ist somit falsch.

Daraus und weiterhin aus der oben schon bewiesenen Behauptung (a_4^1) ergibt sich die Schlußfolgerung, daß es im Relationsfeld nur ein erstes Objekt gibt.

Dieser Teil der Beweisführung, den ich mit nur unwesentlichen Veränderungen wiederholt habe, ist eigentlich der Schwächste unter den zweifellos sehr geistreichen logistischen Interpretationen der Bewegung.

Dabei ist zu bemerken:

a. Nur in einem Teil der Beweisführung benützen wir die Bedingungen der Connexität, die Salamucha voraussetzt. Gemäß Def. 4 stellt diese Bedingung fest, daß von zwei Objekten x_1 und x_2, entweder x_1 das x_2 bewegt, oder umgekehrt, d.h. x_2 bewegt x_1, was ein offensichtlicher Fehler ist. Auf diesen Widerspruch hat schon S. Kaminski in seiner Untersuchung hingewiesen. (2, S.110) Seiner Ansicht nach beweist Salamucha lediglich, daß jede Kette sich gegenseitig bewegender Objekte ein erstes Element besitzt.
   Aus seiner Argumentation geht nicht hervor, daß es nur ein einziges erstes Element gibt. Übrigens, auch Salamucha selber war seiner eigenen Beweisführung gegenüber kritisch eingestellt. Er schreibt: "Auf Grund dieser Argumentation könnte man zur Schlußfolgerung gelangen, daß die Welt eine geordnete Menge sich bewegender Objekte ist, an deren erster Stelle Gott steht. Das ist aber sehr unwahrscheinlich". (4, S.87)
   Man muß auch darauf hinweisen, daß diese Aufflassung der Bewegungsrelationen keine Begründung in den Schriften von Thomas von Aquin findet.

b. Die Bedingung der Connexität ist zur Durchführung des erwähnten

Beweises von Thomas nicht unbedingt erforderlich. Man kann nachweisen, daß sich aus den angenommenen Prämissen (ohne Bedingung der Connexität) ergibt, daß im Bereich sich bewegender und in Bewegung gesetzter Objekte ein erstes Element enthalten ist (Erster Beweger). Dies war von Salamucha und, soweit wir wissen, auch von seinen Kritikern übersehen worden.

Nehmen wir an Stelle der Def. 5 folgende Ordnunsdefinition (Teil-Ordnung):

Df[1] 5. $\mathrm{ord}^*(R) \Leftrightarrow (R \in \mathrm{irr}) \wedge (R \in \mathrm{trans})$

Die Prämissen (a_1) und (a_3) bleiben unverändert, dagegen nehmen wir an Stelle der Prämisse (a_2) die schwächere Prämisse (a_2^1), $\mathrm{ord}^*(\dashv)$.

Der Einmaligkeitsbeweis des ersten Elementes auf Grund der Prämissen (a_2^1), (a_3), und der Definitionen Def. 1-3, Df[1] 5 – verlaufen folgendermassen:

(a_2^1) $\mathrm{ord}^*(\dashv)$

$$(a_3)\ \bigvee_x \left\{x \in C(\dashv) \wedge \bigwedge_y \{y \in C(\dashv) \wedge x \neq y \Rightarrow x \dashv y\}\right\} \quad (\mathrm{Pm})$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a \in C(\dashv) \\ (2) & \bigwedge_y \{y \in C(\dashv) \wedge a \neq y \Rightarrow a \dashv y\} \end{array}\right\} (a_3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1.1) & \sim f(x_1) \wedge \bigwedge_y \{y \in C(\dashv) \wedge x_1 \neq y \Rightarrow x_1 \dashv y\} \\ (1.2) & \sim f(x_2) \wedge \bigwedge_y \{y \in C(\dashv) \wedge x_2 \neq y \Rightarrow x_2 \dashv y\} \end{array}\right\} (\mathrm{ZPm})$$

$$(1.3)\ x_1 \neq x_2 \qquad (\mathrm{IRf})$$

(2.1)	$x_1 = a$	(ZPm)
(2.2)	$x_1 \in C(\dashv)$	(1, 2.1)
(2.3)	$x_2 \dashv x_1$	(1.2, 2.2, 1.3)
(2.4)	$x_2 \in C(\dashv)$	(Df. 1, 2.3)
(2.5)	$x_1 \dashv x_2$	(1.1, 2.4, 1.3)
(2.6)	$x_1 \dashv x_1$	(Df. 3, Df[1] 5, (a_2^1), 2.5, 2.3)

(2.7) $x_1 \neq x_1$ (Df. 2, Df[1] 5, (a_2^1), 2, 6)

(2.8) $x_1 = x_1$ (log)

(1.4) $x_1 \neq a$ $(2.1 \rightarrow \mathrm{Ws})$

(1.5) $x_1 \mathrel{-\!\!\!3} a$ (1.1, 1, 1.4)

(1.6) $x_1 \in C(\mathrel{-\!\!\!3})$ (Df. 1, 1.5)

(1.7) $a \mathrel{-\!\!\!3} x_1$ (2, 1.6, 1.4)

(1.8) $x_1 \mathrel{-\!\!\!3} x_1$ (Df. 3, Df[1] 5, (a_2^1), 1.5, 1.7)

(1.9) $x_1 \neq x_1$ (Df. 2, Df[1] 5, (a_2^1), 1.8)

(1.10) $x_1 = x_1$ (log)

Ws (1.9, 1.10)

(3) $\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2}\{[\sim f(x_1) \wedge \bigwedge_y \{y \in (\mathrel{-\!\!\!3}) \wedge x_1 \neq y \Rightarrow x_1 \mathrel{-\!\!\!3} y\}] \wedge [\sim f(y_2) \wedge \bigwedge_y \{y \in C(\mathrel{-\!\!\!3}) \wedge x_2 \neq y \Rightarrow x_2 \mathrel{-\!\!\!3} y\} \Rightarrow x_1 = x_2]\}$ $(1.1, 1.2, 1.3 \rightarrow \mathrm{Ws})$

Aus Formel (3) und aus dem oben bewiesenen Satz (a_4^1) ergibt sich

(4) $\bigvee_x 1 \{\sim f(x) \wedge \bigwedge_y \{y \in C(\mathrel{-\!\!\!3}) \wedge x \neq y \Rightarrow x \mathrel{-\!\!\!3} y\}\}$

Der Ausdruck (4) beendet die Beweisführung.

Wir weisen noch darauf hin, daß wir im ersten Teil des Beweises nicht die Bedingung der Connexität der Relationen verwendet haben (was man leicht nachprüfen kann).

Der Beweis von Teil A bleibt unverändert, falls wir Prämisse (a_2) durch Prämisse (a_2^1) und Def. 5 durch Def.[1] 5 ersetzen.

II

Es scheint uns, daß ohne die Bedingung der Connexität sich die Formalisierung Salamuchas den Vorstellungen von Thomas in seinen formalisierten Beweisen der Existenz Gottes nähert. Das ist nicht die einzige Vereinfachung, die man an dieser Beweisführung durchführen kann.

Wir versuchen eine Formalisierung des zur Diskussion stehenden

Beweises darzustellen, die sich auch von der Salamuchas unterscheiden wird. Man muß auch betonen, daß die Formalisierung über die Betrachtungen von Thomas hinausgeht; sie bleibt aber in weitgehender Übereinstimmung mit seinen Überlegungen, insbesondere, weil wir einige Thesen und Formulierungen aus der Mengentheorie benützen, die zur Zeit von Thomas nicht bekannt waren. Durch D bezeichnen wir eine Menge der Objekte, die sich bewegen oder durch andere in Bewegung gesetzt sind; wir nehmen an, daß die Menge nicht leer ist: $D \neq \emptyset$.

Diese Annahme stimmt mit der empirischen Prämisse von Thomas überein: d.h. die Objekte, die sich bewegen, sind uns aus unserer sinnlichen Erfahrung gegeben.

Wir nehmen wie Salamucha an, daß die Menge geordnet ist, aber ohne lineares Ordnungsprinzip (d.h. ohne Bedingung der Connexität).

Wir wenden folgende Definitionen an:

Df.* 1. $R \in \mathrm{irr}\,(A) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in A} \{\sim x\,R\,x\}$

Df.* 2. $R \in \mathrm{refl}\,(A) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in A} \{x\,R\,x\}$

Df.* 3. $R \in \mathrm{sym}\,(A) \Leftrightarrow \bigwedge_{y,\,x \in A} \{x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x\}$

Df.* 4. $R \in \mathrm{as}^*\,(A) \Leftrightarrow \bigwedge_{x,\,y \in A} \{x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Rightarrow x = y\}$

Df.* 5. $R \in \mathrm{trans}\,(A) \Leftrightarrow \bigwedge_{x,\,y,\,z \in A} \{x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z\}$

Df.* 6. $R \in \mathrm{ord}\,(A) \Leftrightarrow R \in \mathrm{irr}\,(A) \wedge R \in \mathrm{trans}\,(A)$(2)

Df.* 7. $R \in \mathrm{ord}^*\,(A) \Leftrightarrow R \in \mathrm{refl}\,(A) \wedge R \in \mathrm{as}^*\,(A) \wedge R \in \mathrm{trans}$

Diese Definitionen sind anders formuliert als die von Salamucha; sie besagen:

Df.* 1. Die Relation R ist irreflexiv in der Menge A

Df.* 2. Die Relation R ist reflexiv in der Menge A

Df.* 3. Die Relation R ist symmetrisch in der Menge A

Df.* 4. Die Relation R ist schwachsymmetrisch in der Menge A

(2) Früher wurde diese Relation Teil-Ordnung genannt.

Df.* 5. Die Relation R ist transitiv in der Menge A

Df.* 6. Die Relation R ist in der Menge A eine Ordnung

Df.* 7. Die Relation R ist in der Menge A eine ord-Relation.

Zwischen den ordnungsbestimmenden Definitionen Df* 6 und Df* 7 (die vorher Teilordnungen genannt wurden) bestehen bestimmte Beziehungen, die wir weiterhin benutzen werden.

Das Symbol "$\mathcal{E}$" bezeichnet die Beziehung der Bewegung.

Es ist leichter, das sog. Kuratowski-Zorn-Lemma zu verwenden. Diese Relation steht im umgekehrten Verhältnis zu der von Salamucha Behandelten.

Den Ausdruck "$x \mathcal{E} y$" lesen wir: "Das Objekt x ist bewegt durch das Objekt y." Es ist verständlich, dass die Relation umkehrbar und transitiv ist.

Wir nehmen an, daß die Menge D geordnet ist durch die Relation "$\mathcal{E}$" im Sinne der Definition* 6, d.h.

(a_1) $[\mathcal{E} \in \text{ord}\,(D) \wedge D \neq \emptyset]$ (I Prämisse)

Die Prämisse (a_1) stimmt mit den Überlegungen von Thomas überein. In der Beweisführung wenden wir noch folgende Definitionen und Thesen an:

Df* 8. $_{x,\,y \in D}\{x \leq y \Leftrightarrow (x \mathcal{E} y \vee x = y)\}$

Der Ausdruck $x \leq y$ ist zu verstehen als "Das Objekt x ist durch das Objekt y in Bewegung gesetzt oder die Objekte x und y sind identisch." Die Relationen $\leq$ charakterisieren folgende Lemmas, zu deren Beweisführung wir Prämisse (a_1) benützen.

L 1. $_{x \in D}\{x \leq x\}$ (Df.* 8)

L 2. $_{x,\,y \in D}\{x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y\}$

Beweis: $\left.\begin{array}{l}(1)\ x, y \in D \\ (2)\ x \leq y \wedge y \leq x\end{array}\right\}$ (Pm)

(3) $(x \mathcal{E} y \vee x = y) \wedge (y \mathcal{E} x \vee x = y)$ (Df.* 8, 1.2)

(4) $x = y$ $(a_1$, Df.* 1, Df.* 5, 3)

L 3. $_{x,y,z\in D}\{x\leq y \wedge y\leq z \Rightarrow x\leq z\}$

Beweis: (1) $_{x,y,z\in D}$ (Pm)

(2) $x\leq y \wedge y\leq z$

(3) $(x \succ\!\!- y \vee x=y)\wedge(y \succ\!\!- z \vee y=z)$ (Df.*8,2)

(4) $(x \succ\!\!- z \vee x=z)$ (a_1, Df*1, Df*5, 3)

(5) $x\leq z$ (Df*8, 4)

Gemäß den Lemmas L 1-3: Wenn die Relation "$\succ\!\!-$" die Menge D im Sinne der Definition Df*6 ordnet, dann ordnet die Relation "$\leq$" die Menge D im Sinne der Definition Df*7.

Die folgende These muss somit als bewiesen gelten:

(a_1^*) $[\leq \in \mathrm{ord}^*(D) \wedge D \neq \emptyset]$ (a_1, L 1-3, Df.*1, Df.*5)

Wenn die Menge A eine geordnete Menge im Sinne der Definition Df*7 ist, d.h. $(\beta_1) \leq \in \mathrm{ord}^*(A)$

Bei dieser Annahme führen wir folgende Definitionen an:

Df*9 $\max(x, A) \Leftrightarrow x\in A \wedge \bigwedge_{y\in A}\{x\leq y \succ x=y\}$

Das Element auf der linken Seite der Definition Df*9 nennen wir das Maximum in der Menge A d.h. es ist durch kein anderes in Bewegung gesetzt.

In der Menge A gibt es viele solche Elemente. Die rechte Seite der Definition Df*9 ist leicht zu beweisen (kraft der Prämisse (a_1) und der Definitionen Df*1, Df*5, Df*8 ist das gleich der Formel:

$x\in A \wedge \bigwedge_{y\in A}\{\sim x \succ\!\!- y\}$

Df*10 $\mathrm{gmE}(x, A) \Leftrightarrow x\in A \wedge \bigwedge_{y\in A}\{y\leq x\} \Leftrightarrow_{y\in A} \wedge\, x\neq y\,(y \succ\!\!- x)$

Das Element auf der linken Seite der Definition Df*10 nennen wir das größt mögliche Element d.h. das Element, das durch kein anderes bewegt ist.

Falls ein solches Element vorhanden ist, dann muss es genau ein solches Element geben.

Df*11 $K(Y, A) \Leftrightarrow Y\leq A \wedge \bigwedge_{x,y\in A}\{x\leq y \vee y\leq x\}$

Den Ausdruck K (Y, A) lesen wir: Y ist eine Kette in der geordneten Menge A.

Df* 12 oSch (a, Y, A) $\Leftrightarrow a \in A \wedge \bigwedge_{x \in Y} \{x \leq a\}$

Element a bedeutet die obere Schranke der Menge Y innerhalb der Menge A.

Man muß noch darauf hinweisen, daß die Definitionen Df* 9-12 der These (β_1) vorausgehen.

Im Laufe der weiteren Arbeit benützen wir das Lemma von Kuratowski-Zorn.

(β_2) A ist die geordnete Menge im Sinne der Definition Def* 7. Falls in der Menge A für jede Kette ($Y \leq A$) eine obere Schranke besteht, dann gibt es in A ein Maximum-Element (3, S.121). In der Menge gemäß der These (β_2) können mehrere Maxima vorhanden sein.

Gemäß der ersten Prämisse und der These (a_1^*), die sich aus dieser Prämisse ergibt, ist die Menge der Objekte D bewegt im Sinne von Definition Def* 7.

Wir nehmen an, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a_2) Für die beliebigen zwei Ketten X_1 und X_2 in der Menge D besteht eine gemeinsame obere Schranke (II Prämisse).

These (a_2) ist eine Verstärkung der Bedingung der Kette Y, die im Lemma von Kuratowski-Zorn gestellt wird. Es ist offentsichtlich, die Prämisse II ist schwächer als die Prämisse (a_3), die von Salamucha behandelt wird.

Wir weisen nach, daß aus der Prämisse I und II sowie aus dem Lemma Kuratowski-Zorn (β_2) sich folgender Schluss ergibt:

(γ) In der Menge D, daß es innerhalb der sich bewegenden Objekte und von andern in Bewegung gesetzten Objekten ein grösst mögliches Element gibt (der erste Beweger).

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \leq \in \text{ord}^*(D) \wedge D \neq \emptyset \\ (2)\ \bigwedge_X \bigwedge_Y \{K(X, D) \wedge K(Y, D) \Rightarrow \\ \quad \bigvee_y \{\text{oSch}(y, X, D) \wedge \text{oSch}(y, Y, D)\} \end{array}\right\} \quad (\text{Pm})$$

(3) $\bigvee_z \{\max(z, D)\}$ (β_2, 1, 2)

(1.1) $\max(z_1, D) \wedge \max(z_2, D)$ (ZPm)

$$\left.\begin{array}{l}(1.2)\ \bigvee_X \{K(X,D) \wedge z_1 \in X\} \\ (1.3)\ \bigvee_Y \{K(Y,D) \wedge z_2 \in Y\}\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1.4)\ K(X_1,D) \wedge z_1 \in X_1 \\ (1.5)\ K(X_2,D) \wedge z_2 \in X_2\end{array}\right\} \quad (1.2, 1.3)$$

(1.6) $\bigvee_y \{oSch(y, X_1, D) \wedge oSch(y, X_2 D\}$ (2, 1.4, 1.5)

(1.7) $oSch(a, X_1, D) \wedge oSch(a, X_2 D)$ (1.6)

(1.8) $z_1 \leq a \wedge z_2 \leq a$ (Df.* 12, 1.4, 1.5)

$$\left.\begin{array}{l}(1.9)\ z_1 \in D \wedge \bigwedge_{y\in D} \{z_1 \leq y \Rightarrow y = z_1\} \\ (1.10)\ z_2 \in D \wedge \bigwedge_{y\in D} \{z_2 \leq y \Rightarrow y = z_2\}\end{array}\right\} \quad (\text{Df.}{*}9, 1.1)$$

(1.11) $a \in D$ (Df.* 12, 1.7)

$$\left.\begin{array}{l}(1.12)\ z_1 \leq a \Rightarrow a = z_1 \\ (1.13)\ z_2 \leq a \Rightarrow a = z_2\end{array}\right\} \quad (1.9, 1.10, 1.11)$$

(1.14) $z_1 = z_2$ (1.8, 1.12, 1.13)

(4) $\bigwedge_{x,y} \{\max(x, D) \wedge \max(y, D) \Rightarrow x = y\}$ (1.1 $\rightarrow$ Ws)

Auf Grund der Formel (3) und (4) besteht ein Maximum in der Menge D.

Wir weisen noch nach, daß dieses Element gleichzeitig das grösst mögliche ist.

(5) $\max(x_1, D)$ (3)

(2.1) $\sim gmE(x_1, D)$ (ZPm)

(2.2) $_{y\in D}\{ \sim(y \leq x_1)$ (Df.* 10, 2.1, 3, Df.* 9)

(2.3) $y_1 \in D \wedge \sim(y_1 \leq x_1)$ (2.1)

(2.4) $\bigvee_X \{K(X,D) \wedge x_1 \in X\}$ (1)

(2.5) $\bigvee_Y \{K(Y,D) \wedge y_1 \in Y\}$ (1)

(2.6) $K(X_1, D) \wedge x_1 \in X_1 \wedge K(Y_1, D) \wedge y_1 \in Y_1$ (2.4, 2.5)

(2.7) $oSch(z_1, X_1 D) \wedge oSch(z_1, Y_1, D)$ (2, 2.6)

$$\left.\begin{array}{l}(2.8)\ z_1 \in D \wedge \bigwedge_{x \in X_1} \{x \leq z_1\} \\ (2.9)\ z_1 \in D \wedge \bigwedge_{y \in Y_1} \{y \leq z_1\}\end{array}\right\} \quad (\text{Df.}{*}\,12, 2.7)$$

$$(2.10)\ x_1 \leq z_1 \wedge y_1 \leq z_1 \qquad (2.8, 2.9, 2.6)$$

$$(2.11)\ x_1 \in D \wedge \bigwedge_{y \in D} \{x_1 \leq y \Rightarrow x_1 = y\} \qquad (\text{Df.}{*}\,9, 5)$$

$$(2.12)\ x_1 \leq z_1 \Rightarrow (x_1 = z_1) \qquad (2.11, 2.8)$$

$$(2.13)\ x_1 = z_1 \qquad (2.12, 2.10)$$

$$(2.14)\ y_1 \leq x_1 \qquad (2.10, 2.13)$$

Ws (2.3, 2.14)

$$(6)\ \text{oSch}\,(x_1, D) \qquad (2.1 \rightarrow \text{Ws})$$

Die Formel (6) beendet die These (γ). Die wesentliche Rolle der obigen Beweisführung spielt das Lemma Kuratowski-Zorn. Dies Lemma gilt aber nicht selbständig, da zu dessen Beweis das Auswahl-Axiom benutzt werden maß.

Es ist also offentsichtlich, daß der Bereich D (d.h. die Objekte, die bewegen bzw durch andere bewegt werden) unendlich werden kann.

Salvator-Kolleg,
Impasse de la Fôret 5, CH-1700 Fribourg Korneliusz POLICKI

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORKOWSKI, L., Logika formalna, Warszawa 1970 (Es gibt eine deutsche Übersetzung: Formale Logik).
[2] GRANAT, W., Teodycea, Lublin 1968.
[3] RASIOWA, H., Wstep do matematyki wspólczesnej, Warszawa 1971 (Es gibt auch eine englische Übersetzung: Introduction to contemporary mathematics).
[4] SALAMUCHA, J., Dowód "ex motu" na istnienie Boga. Analiza logiczna argumentacji św. Tomasza z Akwinu. "Collectanea Theologica" 15: 1934 t. 54 S. 53-90.