ANALYSE ET APPLICATIONS DES SUITES DE QUESTIONS

Gérold STAHL

1. Introduction

L'article suivant fait référence à la logique des questions telle qu'elle a été présentée dans [9], [8] et [10] (voir bibliographie). D'après ces articles, les questions sont des classes de certaines expressions bien formées d'un système (par exemple du système fonctionnel de premier ordre); ces expressions s'appellent «réponses suffisantes». On a vu qu'il faut distinguer clairement entre les *questions* (qui sont des classes d'expressions) et les *expressions de questions* (qui sont des méta-expressions qui font référence aux classes mentionnées).

On distingue principalement trois types de questions, les questions individuelles $[Hx\,?]$ (Quel est un x qui satisfait H?), les questions fonctionnelles (qui jouent seulement un rôle important dans les systèmes d'ordre supérieur) et les questions de vérité $[f?\mathrm{A}]$ (Est-ce que A?).

Si une question est formulée par rapport à un système spécial de premier ordre (soit N), c'est-à-dire, si les réponses suffisantes sont des expressions bien formées de ce système N, et si la sélection des réponses suffisantes dépend des axiomes de N, il faut indiquer cela par des indices, et on a:

$[Hx\,?]_{\mathrm{N}}$
$[f?\mathrm{A}]_{\mathrm{N}}$
etc.

Si la sélection des réponses suffisantes dépend, en plus, d'une classe de prémisses (soit S), cette dernière sera aussi indiquée explicitement, et on a:

$[Hx\,?]_{\mathrm{N}}\mathrm{S}$
$[f?\mathrm{A}]_{\mathrm{N}}\mathrm{S}$
etc.

Dans la première partie de cet article on analysera différents types de suites de questions (dans la section 2 les suites liées, dans la section 3 les suites inférentielles, dans la section 4 les suites post-liées et post-inférentielles). Ensuite on procédera à une généralisation, en traitant les schémas de suites et les arbres de questions (section 5). Certaines parties de questionnaires peuvent présenter une application des idées développées précédemment (section 6), de même que certaines parties de programmes d'ordinateur (section 7).

2. *Suites liées de questions*

Fréquemment les questions ne se présentent pas d'une façon isolée mais en suites; on le voit aussi bien chez les petits enfants que dans la bureaucratie. Du point de vue de la logique pas toutes les suites de questions ont le même intêret; on peut espérer de trouver plus de résultats s'il y a une connexion de type logique entre les questions qui constituant la suite respective. Pour commencer on analysera ici les suites appelées «suites liées de questions», comme par exemple:

Dupond connaît-il le Pacifique?
Si Dupond ne le connaît pas, qui ici le connaît?
Si personne ici ne le connaît, où peut-on en être informé?

Il s'agit d'une suite dont chaque question, à l'exception de la première, fait référence à une réponse possible de la question précédente. On définit plus précisément «suite liée de questions» comme suite de questions qui satisfait les conditions:

(a) La première question a la classe S de prémisses, qui peut être vide.
(b) La k + 1-ième question ($k > 0$) a pour classe de prémisses celle de la k-ième question et en plus «A_k», qui est une réponse suffisante de la k-ième question([1]).

Ainsi nous avons:

$[P]_N S$
$[Q]_N S \cup \{«A_1»\}$
$[R]_N S \cup \{«A_1», A_2»\}$
...

avec les classes de prémisses: S, S $\cup$ {«A_1»}, S $\cup$ {«A_1», «A_2»}, etc., de façon à ce que:

«A_1» $\in [P]_N S$
«A_2» $\in [Q]_N S \cup$ {«A_1»}
...

L'exemple du Pacifique serait, partiellement symbolisé:

[Dupond connaît-il le Pacifique ?]$_N$S
[Qui ici connaît le Pacifique ?]$_N$S $\cup$ {«Dupond ne le connaît pas»}
[Où peut-on être informé sur le Pacifique ?]$_N$S $\cup$ {«Dupond ne le connaît pas», «Personne ici ne le connaît»}

Comme par rapport aux questions même, il faut faire la distinction entre les suites de questions et les expressions de suites, une distinction, dont on verra l'importance dans les prochaines sections.

3. *Suites inférentielles de questions*

Supposons qu'on ait modifié la suite originale de la section 2 en remplaçant la troisième question soit par:
Si le Pacifique est égal à lui-même, où peut-on en être informé ?(i)
soit par:
Si Dutour le connaît, où peut-on en être informé ? (ii)
Les deux nouvelles suites qu'on obtient avec les modifications (i) ou (ii) sont aussi des suites liées de questions, mais elles ont une apparence un peu bizarre. Les raisons de cette apparence sont que, dans (i), «A_2» («Le Pacifique est égal à lui-même») est une conclusion à partir des prémisses de la deuxième question (c'est même un théorème) et, dans (ii), «A_2» («Dutour connaît le Pacifique») ne correspond pas à ce qu'on pourrait appeler «approche par exclusion», une caractéristique des suites qui nous intéressent. Ce qu'on veut avoir au lieu de (ii) est que la prémisse additionnelle de la troisième question soit incompatible([2]) avec les autres réponses suffisantes de la deuxième question (sauf les conclusions et les réponses qui impliquent «A_2»). Par exemple «Le capitaine ici connaît le Pacifique» est parfaitement compatible avec «Dutour connaît le Pacifique» (ainsi

dans la suite avec (ii) on n'a pas l'incompatibilité souhaitée), tandis que «Le capitaine ici...» est incompatible avec «Personne ici ne connaît le Pacifique» (dans la suite originale on a l'incompatibilité). Après quelques définitions et explications on verra les raisons d'exiger l'incompatibilité vers la fin de cette section.

Certaines suites liées de questions, qui n'ont pas de membres comme (i) et (ii), seront appelées «suites inférentielles de questions» ; il s'agit de suites liées qui satisfont en plus les conditions:

(c) Les «A_k» qu'on ajoute n'appartiennent pas à $C_N(S \cup \{$«A_1», ..., «A_{k-1}»$\})$ (elles ne sont pas des conclusions à partir des prémisses[3]) de la k-ième question).

(d) Toutes les réponses suffisantes de la k-ième question qui ne sont ni des conclusions (à partir des prémisses de la question) ni n'impliquent «A_k», sont incompatibles avec «A_k».

L'exemple original est une suite inférentielle, tandis que la suite avec (i) ne l'est pas grâce à (c) et la suite avec (ii) ne l'est pas grâce à (d).

Supposons que nous ayons une suite inférentielle de questions avec n membres. Nous appelons «réponses de k-ième degré» $(1 \leq k \leq n)$ les réponses suffisantes de la k-ième question de la suite, à l'exception des réponses qui impliquent «A_k». Pour la n-ième question (la dernière) il n'y a pas d'exception, parce qu'il n'y a pas un «A_n» qu'on ajoute à quelque chose.

Soit «D» une réponse de k-ième degré de la suite. Du fait que la k-ième question a, entre autres, les prémisses «A_1», ..., «A_{k-1}», on démontre:

$$D \equiv (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge D)$$

L'expression «$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge D$», qui est aussi une réponse de k-ième degré, sera appelée «forme conjonctive de D».

A partir du point (d) de la définition de «suite inférentielle» et à partir de la définition de «réponse de k-ième degré» en démontre qu'une réponse de k-ième degré est incompatible avec une réponse de i-ième degré $(i<k)$ de la même suite, à moins qu'il s'agisse d'une conclusion (à partir des prémisses de la i-ième question).

Au lieu d'utiliser le terme «réponse de k-ième degré de la suite» on peut aussi utiliser «réponse suffisante à la suite entière», c'est-à-dire qu'on considère ici que les réponses de *k*-ième degré répondent à la suite entièrement et non seulement à une des questions qui la constituent.

Si l'on observe l'acte de répondre à une suite inférentielle globalement, on constate que pas toutes les réponses suffisantes de la première question semblent acceptables comme réponses à la suite entière. Seulement avec une réponse de premier degré le dialogue questions-réponses est considéré comme terminé. Ainsi dans l'exemple original du Pacifique, on peut répondre:

Dupond connaît le Pacifique

et le dialogue se termine, on a répondu à la suite entière.

Si au contraire on répond:

Dupond ne connaît pas le Pacifique

il faut répondre aussi à la deuxième question. Si l'on répond à la deuxième question par une réponse de deuxième degré comme:

Le capitaine ici connaît le Pacifique

on a de nouveau répondu à la suite entière et cela en deux étapes, commençant par «A_1» («Dupond ne connaît pas le Pacifique») et après par une réponse de deuxième degré («Le capitaine ici connaît le Pacifique»). Si, au contraire, la réponse suffisante à la deuxième question n'est pas de deuxième degré comme:

Personne ici ne connaît le Pacifique

alors on doit répondre à la troisième question, etc.

Les réponses suffisantes à la suite entière sont ou bien de forme conjonctive comme: «D» (premier degré), «$A_1 \wedge D'$» (deuxième degré), «$A_1 \wedge A_2 \wedge D''$» (troisième degré), etc, ou bien équivalentes à une de ces formes. En laissant de côté les conclusions, le fait de répondre avec une réponse de *k*-ième degré signifie qu'on nie les réponses de degré inférieur et affirme à leur place «A_1», «A_2», ..., «A_{k-1}».

Pour tenir compte de cette façon de répondre à certaines suites de questions, on a formulé l'exigence de l'incompatibilité, qui correspond à l'exclusion: ou bien on répond par une réponse de *k*-ième degré et le processus est terminé, ou bien le processus continue. Sans incompatibilité, on pourrait répondre par une réponse de *k*-ième degré et le processus continuerait (ou plutôt recommencerait) quand même.

Dans les formulations libres en français courant on trouve fréquemment certaines modifications par rapport aux traductions plus précises. Ainsi quelquefois apparaît l'«ou» intercalé entre les membres d'une suite comme dans:

> Dupond connaît-il le Pacifique? Ou, s'il ne le connaît pas, qui ici le connaît? Ou, ...

Occasionnellement on ne mentionne pas les prémisses «A_k», on les considère sous-entendus:

> Dupond connaît-il le Pacifique? Ou, qui ici le connaît? Ou, ...

Dans tous ces cas il ne s'agit pas de «questions disjonctives», questions sélectives ou quelque chose de semblable. L'aspect caractéristique des suites est l'ordre, qu'on voit clairement dans la non-commutativité de cet «ou», tandis que par rapport aux disjonctions et aux questions sélectives on a la commutativité.

On a ajouté «A_k» comme prémisse à celles de la $k + 1$-ième question, comme si l'expression de cette question était de la forme «puisque...» et non de la forme «si...». Cependant si l'on répond à la k-ième question par une réponse suffisante qui implique «A_k», alors le «si...» se transforme en «puisque...». Supposons, par exemple, qu'on réponde à la première question par «A_1» («Dupond ne connaît pas le Pacifique»), alors la deuxième question sera reformulée comme:

> Puisque Dupond ne connaît pas le Pacifique, qui ici le connaît?

4. *Suites post-liées et post-inférentielles de questions*

Si l'on remplace le point (b) des définitions de «suite liée» et «suite inférentielle» par:

> (b') La $k + 1$-ième question ($k > 0$) a pour classe de prémisses celle de la k-ième question et en plus «A_k», qui est impliquée (selon $C_N(S \cup \{«A_1», \ldots, «A_{k-1}»\})$) par une réponse suffisante (supposons «B_k») de la k-ième question

on arrive aux «suites post-liées» et «post-inférentielles».

Etant donné que «A_k» est impliqué par lui-même, (b) est un cas spécial de (b'), c'est-à-dire, les suites post-liées et post-inférentielles incluent les suites liées et inférentielles. Pour (b′) l'expression ajoutée aux prémisses n'est plus nécessairement une réponse suffisante de la question antérieure, maintenant il suffit qu'elle soit impliquée par une telle réponse.

Afin d'avoir un exemple, remplaçons dans la suite originale de la section 2 la troisième question par:

> Si quelqu'un ici connaît le Pacifique, peut-on en parler tranquillement ?

c'est-à-dire:

> [Peut-on parler tranquillement du Pacifique ici ?]$_N$S $\cup$ {«Dupond ne le connaît pas», «Quelqu'un ici le connaît»}

On voit que la nouvelle prémisse «A_2» n'est plus une réponse suffisante de la deuxième question, mais elle est impliquée par toutes les réponses directes et beaucoup d'autres réponses de cette question.

Toutes les autres conditions sont maintenues, y compris celle de l'incompatibilité, de façon à ce que la nouvelle suite soit post-inférentielle.

En principe il n'y a pas de changement par rapport aux définitions et explications des sections antérieures (par exemple la définition de «réponse de k-ième degré» est la même). Seulement la façon typique de répondre aux suites ne correspond plus en général à la forme normale «$A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge D$». Au lieu de répondre à la i-ième question par «A_i» (par exemple «Quelqu'un ici connaît le Pacifique») on répond par «B_i» («Jeanne ici connaît le Pacifique»); mais parmi les conclusions respectives on a «$B_i \supset A_i$».

5. *Schémas de suites et cas spéciaux*

Considérons la suite:

$$[H_u x\,?]_N S$$
$$[f?H'a]_N S \cup \{«H_u a»\}$$
$$[H''ay\,?]_N S \cup \{«H_u a», «H'a»\}$$

qui commence par [Quel est l'unique individu qui satisfait H ?]. En supposant que les prémisses ajoutés ne soient pas des conclusions par rapport aux questions précédentes, on voit bien qu'il s'agit d'une suite inférentielle, les quatre conditions sont satisfaites. Des réponses suffisantes à la suite entière seraient, par exemple:

$$(x)\sim H_u x \qquad \text{(premier degré)}$$
$$H_u a \wedge \sim H'a \qquad \text{(deuxième degré)}$$
$$H_u a \wedge H'a \wedge H''ad \qquad \text{(troisième degré).}$$

Revenons à la suite ou plutôt à l'expression qui la symbolise et qui s'étend sur trois lignes. Si, dans cette expression de suite, on met «b» à la place de «a» dans toutes les occurences, on obtient une nouvelle expression de suite, qui symbolise une suite éventuellement différente de l'originale. Une substitution analogue peut se faire avec «c», etc. Avec un nombre infini de symboles individuels, on peut obtenir, ainsi, un nombre infini d'expressions de suites qui dénotent éventuellement un nombre infini de suites.

La classe de toutes ces suites a un intérêt logique, et pour nous reférer à une suite quelconque de la classe nous utilisons des expressions spéciales, appelées ici «schémas de suites». Au lieu des symboles de constantes, «a», «b», etc, qu'on change d'une expression de suite à l'autre, un schéma contient comme symboles de variables(4) les lettres «α», «β», etc (l'utilisation de «x», «y», etc produirait des confusions).

Ainsi un schéma correspondant à la classe des suites mentionnée serait:

$$[H_u x\,?]$$
$$[f?H'\alpha]_N S \cup \{«H_u\alpha»\}$$
$$[H''\alpha y\,?]_N S \cup \{«H_u\alpha», «H'\alpha»\}$$

En écrivant «a» ou «b», etc au lieu de «α», le schéma se transforme en une expression de suite, qui dénote une suite déterminée. On fera la substitution à partir de la réponse suffisante donnée à la première question, si cette réponse permet de déduire une réponse directe déterminée (dans le cas contraire il s'agit d'une réponse de premier degré et le processus se termine avant qu'on ait fait la substitution).

Deux exemples concrets illustreront les aspects caractéristiques du schéma de suites indiqué. Dans le premier, qui est proche de certaines techniques de programmation, nous supposons que les individus sont des nombres naturels et que «H'» est traduit par «être nombre pair»:

> Quel nombre naturel satisfait H_u?
> Si un nombre naturel déterminé satisfait H_u, est-il pair?
> S'il est pair, avec quel nombre naturel est-il en relation H''?

Le deuxième exemple, assez différent, serait:

> A quelle date avez-vous rendu votre dernière visite?
> Si vous l'avez rendue à une date déterminée, cette date se situe-t-elle avant Samedi 15?
> Si elle se situe avant Samedi 15, qui vous a reçu à cette date?

Pour les deux exemples il y a naturellement des formulations plus aisées, par exemple «Si oui, avec quel nombre...?», ou on pourrait supprimer chaque fois la deuxième expression de question entièrement; mais avec cette dernière modification on s'éloignerait beaucoup du traitement formel.

En ce qui concerne les schémas de suites en général, on procède exactement de la même façon que dans le cas mentionné. Le traitement indiqué, quoiqu'applicable aussi à d'autres suites, est spécialement intéressant par rapport aux suites inférentielles (c'est le cas analysé) et post-inférentielles.

Un autre point qu'il faut mentionner est qu'il y a non seulement des suites inférentielles (post-inférentielles) *simples*, comme celles qu'on a vues jusqu'à présent, mais aussi des suites *multiples*. Par exemple une suite double commencerait de cette façon:

> Dupond connaît-il le Pacifique?
> S'il le connaît, quand était-il là-bas la dernière fois?
> S'il ne le connaît pas, qui ici le connaît?
> ...

Dans l'intérêt d'une meilleure clarté il semble préférable de présenter les suites multiples en forme d'arbres, ce qu'on peut faire toujours sans difficulté. Le traitement de ces arbres est analogue à celui des suites simples. ([5])

6. *Les questionnaires*

Les questionnaires représentent des suites spéciales de questions. Normalement ces suites ne sont même pas liées, comme dans:

...
Lieu de naissance?
Nom du père?
...

Cependant une partie d'un questionnaire peut représenter une suite post-inférentielle ou inférentielle:

...
Numéro de contrôle?
Si vous n'avez pas de numéro de contrôle, quand avez-vous déposé la demande?
Si vous n'avez pas déposé de demande...
...

Si l'on prend le «vous» comme abréviation du nom d'une personne déterminée, cette partie ne constitue pas un schéma, elle symbolise une suite déterminée; dans le cas contraire on aurait le schéma (avec «α» au lieu de «vous» et en traduisant «être le numéro de contrôle de» par «H» et «déposer la demande à la date de» par «H'»):

$[Hx\,?\alpha]_N S$
$[H'\alpha y\,?]_N S \cup \{«(x){\sim}Hx\alpha»\}$
...

En général, et même avec le «vous» comme symbole de constante, on peut avoir des parties d'un questionnaire qui sont des schémas, par exemple:

...
Numéro de contrôle?
Si le numéro est supérieur à 10000, ...
...

Il s'agit ici d'un autre exemple du schéma de la section 5 (pour le traitement formel il faudrait intercaler «Si un numéro déterminé est votre numéro de contrôle, est-il supérieur à 10000?»).

Naturellement les questionnaires imposent à celui qui les remplit implicitement ou explicitement un grand nombre de conditions. Par exemple on veut avoir des réponses vraies qui ne soient pas des théorèmes et qui n'exigent pas des déductions compliquées pour déterminer s'ils sont suffisants. Mais tout cela ne change rien au fait que le traitement formel est en principe applicable aux questionnaires.

7. *Les questions qu'on pose aux ordinateurs*

Il y a des appareils spéciaux dont la fonction est de répondre à certains types de questions. Les multiples exemples vont de la montre ([Quelle heure est-il ?]) et du thermomètre ([Quelle est la température ici ?]) jusqu'au calculateur de poche et à l'ordinateur. Dans la plupart des cas, un regard ou une manipulation simple expriment la question, tandis qu'une réponse (quelquefois une réponse vraie([6])) est indiquée par l'appareil. Normalement ces appareils en marche, s'ils ne sont pas trop compliqués, présentent des réponses directes.

Afin de revenir aux suites des questions, on pensera sans doute aux ordinateurs et à leurs programmes. Naturellement il n'y a pas une correspondance immédiate entre un ordre d'un programme et une question d'une suite, mais plusieurs ordres pris ensemble peuvent correspondre à une question. Cependant ce qui est réellement intéressant et qui correspond dans la programmation aux schémas de suites inférentielles (ou plutôt d'arbres inférentiels) de questions sont les boucles, une des caractéristiques fondamentales des ordinateurs.

Les boucles sont introduites par un ordre de type «IF». Pour voir un cas concret, supposons que l'ordre soit présenté de la façon suivante :

IF (X) i, j, k

«X» abrège une expression individuelle, éventuellement assez complexe, qui symbolise un nombre réel. Généralement «X» contient des symboles de variables, mais on peut aussi traiter des cas où «X» contient seulement des symboles de constantes. Les lettres «i», «j» et «k» symbolisent des nombres naturels ; elles sont utilisées pour numéroter les ordres du calcul. Dans le contexte présent on suppose que ces ordres correspondent à des questions. Afin de nous approcher un peu plus de la symbolisation des suites de questions, nous écrirons «$[P_i]_N S_i$» au lieu de «i» et de façon analogue pour «j» et «k». On a alors :

IF (X) $[P_i]_N S_i$, $[P_j]_N S_j$, $[P_k]_N S_k$

L'ordre «IF», indiqué dans la langue de programmation, signifie : Si $X < O$, il faut passer à l'ordre numéro i, c'est-à-dire répondre à la question $[P_i]_N S_i$, si $X = O$, il faut passer à l'ordre j et si $X > O$, il faut passer à l'ordre k.

Un schéma de suite (multiple) qui correspond à la boucle introduite par l'ordre «IF», procède par deux étapes pour couvrir les trois possibilités ; on demande premièrement $[X < O\,?]$ et dans le cas d'une réponse négative on demande $[X = O\,?]$. Ainsi on a :

$[X < O\,?]_N S$
$[P_i]_N S \cup \{«X < O»\}$
$[X = O\,?]_N S \cup \{«\sim X < O»\}$
$[P_j]_N S \cup \{«\sim X < O», «X = O»\}$
$[P_k]_N S \cup \{«\sim X < O», «\sim X = O»\}$

C'est-à-dire, à partir de la première question, on a avec la réponse «oui» la deuxième question et avec «non» la troisième, à partir de la troisième question, on a avec «oui» la quatrième et avec «non» la cinquième question.

Tout cela constitue un premier essai de l'application des suites et arbres de questions.

Université de Metz Gérold STAHL

(1) Le traitement présenté dans cet article est souvent différent de celui de [8].

(2) «A» incompatible «B» veut dire qu'on a «$\sim(A \wedge B)$» (comme conclusion).

(3) On écrira «$C_N S$» pour «les conclusions à partir de la classe S de prémisses».

(4) On utilise ici «symbole de variable» au lieu du terme «variable», plus fréquemment utilisé en litérature logique.

(5) Un traitement différent d'arbres de questions par certains graphes, appelés «questionnaires», peut être trouvé dans [5].

(6) Dans beaucoup d'appareils de mesure et de contrôle les réponses suffisantes sont approximatives («Il est approximativement 7 h 10»), et les questions sont les classes de ces réponses, de façon à ce qu'on ait [Quelle heure est-il approximativement ?].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BELNAP, N.D. et STEEL, T.B., *The Logic of Questions and Answers*, New Haven, 1976.

[2] HARRAH, D., *A Logic of Questions and Answers*, Philosophy of Science, Bruges, 1961, vol. 28, n° 1, pp. 40-46.

[3] HIZ, H., *Questions*, Dordrecht, 1978.

[4] KUBINSKI, T., *An Outline of the Logical Theory of Questions*, Berlin, 1980.

[5] PICARD, C., *Théorie des questionnaires*, Paris, 1965.

[6] STAHL, G., *La lógica de las preguntas*, Anales de la Universidad de Chile, Santiago de Chile, 1956, n° 102, pp. 71-75.

[7] STAHL, G., *Preguntas y premisas*, Revista de Filosofía, Santiago de Chile, 1961, vol. VIII, n° 1, pp. 3-9.

[8] STAHL, G., *Fragenfolgen*, dans le livre collectif de Käsbauer, M. et v. Kutschera, F. *Logik und Logikkalkül*, Fribourg-Munich, 1962, pp. 149-157.

[9] STAHL, G., *Un développement de la logique des questions*, Revue Philos. de la France, Paris 1963, n° 3, pp. 293-301.

[10] STAHL, G., *The Effectivity of Questions*, Noûs, Detroit, vol. III, n° 2, 1969, pp. 211-218.

[11] STAHL, G., *Preguntas con exigencias numéricas y de totalidad*, Cuadernos de Filosofía, Buenos Aires, 1974, n° 21, pp. 95-100.