D'UN CERTAIN USAGE DE LA TRIVALENCE EN LOGIQUE DEONTIQUE

Jean-Louis GARDIES
Grzegorz MALINOWSKI (*)

1) *Introduction*

Notre but n'est pas de proposer un système de logique déontique véritablement original, mais simplement de revenir sur le système déjà étudié en 1963 par Lennart Åqvist dans [2] sous le nom de *système F'*. Celui-ci ne nous paraît pas en effet avoir attiré jusqu'ici toute l'attention qu'il méritait; en particulier ses implications philosophiques ont pu passer largement inaperçues pour des raisons qui tiennent au contexte dans lequel Åqvist avait été amené à l'étudier.

Dans l'article de cet auteur, F′ se présentait comme une sorte de version corrigée d'un système F exposé en 1961 par Mark Fisher dans [6]. Après avoir donné une axiomatique de ce système F et démontré sa consistance et sa complétude, Åqvist en soulignait le caractère profondément contre-intuitif. C'est alors qu'il suggérait de transformer F en F′ par quelques modifications axiomatiques. Mais cette transformation syntaxique, opérée à partir d'un système initial, que nous nous accordons avec Åqvist à considérer comme contre-intuitif, présente à nos yeux cet inconvénient que l'axiomatique ainsi proposée pour le système F′ a hérité de certains artifices inhérents à l'axiomatique du système F(1), alors qu'il est possible, pensons-nous, de construire pour F′ une axiomatique moins artificielle, c'est-à-dire plus directement expressive de ses caractéristiques intuitives et de ses implications philosophiques.

Notre intention est donc ici de fournir une nouvelle présentation axiomatique du système F′, ou plus exactement une présentation d'un système très voisin de F′, telle que sa relative simplicité la rende plus transparente à une interprétation. Cette nouvelle présentation axiomatique devrait alors nous permettre de comparer les implications philosophiques d'un tel système avec celles d'autres systèmes, en particulier du système aujourd'hui classique de von Wright, qu'envisage d'ailleurs Åqvist à la fin du même article, mais pour lequel depuis 1963 d'autres sémantiques ont été proposées.

*
* *

2) *Tables aléthiques, tables déontiques, tables déontico-aléthiques*

L'intuition qui est à la base du système, dans la présentation que nous lui donnerons, est que tout *contenu propositionnel* peut avoir d'une part une *valeur de vérité*, c'est-à-dire être *vrai* ou *faux*, et avoir d'autre part, *indépendamment de la valeur précédente*, une *valeur déontique* (par exemple *morale* ou *juridique*) c'est-à-dire être *impérativement bon*, *mauvais* ou *indifférent*. Observons en effet que l'établissement d'un code moral ou juridique revient à opérer dans l'ensemble des actions envisageables une *partition*, telle que chacune d'elles appartienne désormais à un et à un seul des trois sous-ensembles, des actions respectivement désignées comme obligatoires, désignées comme interdites, ou abandonnées à la liberté du sujet.

Nous considérons donc que toute variable propositionnelle peut prendre d'une part l'une des deux valeurs aléthiques F et T (*faux* et *vrai*) reconnues en logique bivalente, et d'autre part, indépendamment, l'une des trois valeurs déontiques 0 (*mauvais*), ½ (*indifférent*), 1 (*impérativement bon*). Le principe de cette trivalence déontique avait été exprimé dès 1953 par G. Kalinowski [12].

La considération combinée de deux sortes de valeurs, *aléthiques* et *déontiques*, au départ indépendantes les unes des autres, conduit à introduire trois espèces de matrices:

- la première fera correspondre à des *valeurs aléthiques* des *valeurs aléthiques*,
- la deuxième fera correspondre à des *valeurs déontiques* des *valeurs déontiques*,
- la troisième fera correspondre à des *valeurs déontiques* des *valeurs aléthiques*.

Le premier ensemble de matrices n'appelle aucune observation particulière, puisqu'il s'identifie avec l'ensemble des *tables de vérité* de la logique bivalente, dont nous nous contenterons de reprendre ici les classiques connecteurs ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

La deuxième espèce de matrices introduit des *connecteurs déontiques*. Les tables de ces nouveaux connecteurs peuvent notamment se construire à partir de la *négation déontique* et de la *conjonction déontique*. Nous admettrons que, si une action est *impérativement bonne* (1), son omission est *mauvaise* (0); que, si une action est *mauvaise* (0), son omission est *impérativement bonne* (1); et que, si une action est *indifférente* (½), son omission l'est aussi. De même admettrons-nous que la conjonction de deux actions est *impérativement bonne* si et seulement si toutes deux sont *impérativement bonnes*; que cette conjonction est *mauvaise* si et seulement si l'une au moins est *mauvaise*; enfin que cette conjonction est *indifférente* dans tous les autres cas. Ces conditions intuitives peuvent se résumer aussi bien par les deux propositions [2]:

$$v_d(\sim_d p) = 1 - v_d(p)$$

$$v_d(p \wedge_d q) = \min(v_d(p), v_d(q))$$

que par les deux matrices:

P	$\sim_d p$
0	1
½	½
1	0

$p \wedge_d q$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

A partir de ces deux matrices, il est évidemment facile de construire une *disjonction*, une *implication*, une *équivalence déontiques*, sur la base des définitions suivantes, *analogues* aux définitions en usage pour le *calcul des propositions*:

$$p \vee_d q \underset{\text{def}}{=} \sim_d(\sim_d p \wedge_d \sim_d q)$$

$$p \Rightarrow_d q \underset{\text{def}}{=} \sim_d(p \wedge_d \sim_d q)$$

$$p \Leftrightarrow_d q \underset{\text{def}}{=} (p \Rightarrow_d q) \wedge_d (q \Rightarrow_d p)$$

Indiquons que la table de la *disjonction* déontique ainsi construite donnerait à la proposition composante la valeur de la plus forte des propositions composées, c'est-à-dire que:

$$v_d(p \vee_d q) = \max(v_d(p), v_d(q))$$

La troisième espèce de matrices, à savoir celle par laquelle on fait correspondre à des *valeurs déontiques* des *valeurs aléthiques*, permet d'introduire des *connecteurs* que nous qualifierons donc de *déontico-aléthiques*. En ce qui concerne les *connecteurs déontico-aléthiques à un seul argument*, il y a combinatoirement huit manières de remplir par F ou V les trois lignes répondant aux valeurs déontiques de la variable:

P		Op	$P_p \wedge P \sim_d p$	Pp	$O \sim_d p$	$Op \vee O \sim_d p$	$P \sim_d p$	
0	F	F	F	F	V	V	V	V
½	F	F	V	V	F	F	V	V
1	F	V	F	V	F	V	F	V

De ces huit combinaisons nous pouvons laisser de côté les deux qui s'obtiennent par reprise de la même valeur (FFF et VVV), pour des raisons faciles à imaginer par analogie avec la manière dont on procède envers la tautologie et l'antilogie dans le classique *calcul des propositions* (CDP); les six autres combinaisons, parmi lesquelles on reconnaîtra notamment les tables caractéristiques de l'*obligation* (Op) et de la *permission* (Pp), renvoient aux quatre sommets du *carré d'Aristote* enrichi des deux autres postes obtenus par la disjonction de A et de E d'une part et la conjonction de I et de O d'autre part, autrement dit aux six sommets de l'*hexagone de Robert Blanché* [5]. Les six connecteurs déontico-aléthiques ainsi déterminés pris deux à deux entretiennent quinze relations qui s'établissent immédiatement à partir des tables que nous venons de donner.

En ce qui concerne les *connecteurs déontico-aléthiques à deux arguments*, l'usage linguistique nous incite, parmi les 512 possibilités obtenues combinatoirement par une table à deux entrées, à arrêter davantage notre attention sur les connecteurs déontico-aléthiques de l'*équivalence* (eq), de la *prévalence faible* (pr) et de la *prévalence forte* (*pr*):

p a la même valeur que q
p est au moins aussi bon que q
p est meilleur que q

dont les matrices peuvent se résumer par les trois propositions suivantes ([3]):

$$v_a(p \,\mathrm{eq}\, q) = \begin{cases} V \text{ si } v_d(p) = v_d(q) \\ F \text{ si } v_d(p) \neq v_d(q) \end{cases}$$

$$v_a(p \,\mathrm{pr}\, q) = \begin{cases} V \text{ si } v_d(p) \geqslant v_d(q) \\ F \text{ si } v_d(p) < v_d(q) \end{cases}$$

$$v_a(p \,pr\, q) = \begin{cases} V \text{ si } v_d(p) > v_d(q) \\ F \text{ si } v_d(p) \leqslant v_d(q) \end{cases}$$

On pourra comparer les propriétés formelles de la *prévalence faible* ou *forte* ainsi définie avec celles du connecteur de la *préférence* étudié par G.H. von Wright dans [17].

Cependant les différents connecteurs déontico-aléthiques que nous venons d'envisager, tant *singulaires* que *binaires*, peuvent se définir sur la base d'un seul d'entre eux. En effet:

1) Il est facile de construire, à partir de l'un des six connecteurs *singulaires* (en particulier Op ou Pp), choisi comme terme premier, chacun des cinq autres, au moyen de définitions comme

$$Op \underset{\mathrm{def}}{=} \sim P \sim_d P \quad \text{ou } Pp \underset{\mathrm{def}}{=} \sim O \sim_d P$$

2) Il est facile de construire deux quelconques des trois connecteurs *binaires* que nous avons évoqués chacun à partir du troisième au moyen de définitions comme

$$\mathrm{p}\,pr\,\mathrm{q} \underset{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{p\,pr\,q}) \wedge \sim(\mathrm{q\,pr\,p})$$

ou

$$\mathrm{p}\,pr\,\mathrm{q} \underset{\mathrm{def}}{=} [(\mathrm{p} \wedge_{\mathrm{d}} \mathrm{q})\,\mathrm{eq}\,\mathrm{q}] \wedge \sim(\mathrm{p\,eq\,q})$$

3) Åqvist a montré dans [1] que les connecteurs déontico-aléthiques *singulaires* peuvent se construire à partir d'un connecteur *binaire*, comme celui de la *prévalence forte*, au moyen de définitions comme

$$\mathrm{Op} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{p}\,pr \sim_{\mathrm{d}} \mathrm{p}$$
$$\mathrm{Pp} \underset{\mathrm{def}}{=} \sim(\sim_{\mathrm{d}} \mathrm{p}\,pr\,\mathrm{p})$$

4) Patrice Bailhache a montré dans [4] (pp. 193-194) qu'on pouvait aussi bien procéder de manière inverse, à savoir construire les *connecteurs binaires* à partir d'un unique *connecteur singulaire*, au moyen de définitions comme

$$\mathrm{p\,eq\,q} \underset{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{Op} \wedge \mathrm{Oq}) \vee (\mathrm{O} \sim_{\mathrm{d}} \mathrm{p} \wedge \mathrm{O} \sim_{\mathrm{d}} \mathrm{q}) \vee (\sim \mathrm{Op} \wedge \sim \mathrm{O} \sim_{\mathrm{d}} \mathrm{p} \wedge \sim \mathrm{Oq} \wedge \sim \mathrm{O} \sim_{\mathrm{d}} \mathrm{q})$$

En conséquence, nous avons bien la possibilité de définir l'ensemble des *connecteurs déontico-aléthiques*, tant *singulaires* que *binaires*, sur la base d'un seul d'entre eux qui pourra être soit un connecteur binaire comme l'*équivalence* ou la *prévalence faible*, soit l'un quelconque des quatre classiques connecteurs singulaires: *obligatoire*, *interdit*, *permis*, *facultatif*.

*
**

3) *Considérations grammaticales préalables*

Notre présentation s'est déjà écartée sur un point de la présentation, proposée par Fisher puis par Åqvist, du système que nous reprenons ici. Dans celle-ci en effet les connecteurs déontiques ou déontico-aléthiques ne portaient pas sur des *variables propositionnelles*, désignées traditionnellement par les lettres p, q, r, etc., mais sur des *variables d'actions*, désignées par les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, etc., On est ainsi amené à se demander si nous avions le droit de négliger cette distinction entre *variables d'actions* et *variables propositionnelles*, et de traiter, comme nous l'avons fait, les mêmes *variables propositionnelles* tantôt comme des *termes* désignant des actions qui ne peuvent être que *bonnes*, *mauvaises* ou *indifférentes*, et tantôt comme des *propositions* qui, en tant que telles, ne peuvent être que *vraies* ou *fausses*.

Cette ambiguïté d'usage, que nous nous permettons ici, nous paraît intégralement justifiable, si l'on se réfère à la manière dont Frege, aux première pages de sa *Begriffsschrift*, et Husserl, dans ses *Logische Untersuchungen*, conçoivent ce qu'on appelle vulgairement une «proposition composante», c'est-à-dire ce qui, ayant le statut grammatical apparent d'une proposition, entre en composition, au moyen de foncteurs propositionnels, pour constituer la proposition directement affirmée. Pour Frege comme pour Husserl, une telle «proposition composante» n'est pas une véritable *proposition* ([4]), mais plutôt la désignation nominale d'un *contenu* ou d'un *état de choses*, simplement caractérisé par le fait qu'il *peut* être l'objet d'une *assertion* («beurtheilbarer Inhalt» dit Frege). Or un tel *contenu propositionnel*, de même qu'il *peut* faire l'objet d'une *assertion*, *peut* aussi faire l'objet d'une *appréciation* sans rapport direct avec la première: le même *contenu propositionnel* peut donc être, indépendamment, reconnu comme d'une part *vrai* ou *faux*, d'autre part *bon*, *mauvais* ou *indifférent*.

Lorsque nous faisons entrer un tel *contenu propositionnel* en composition au moyen de *connecteurs aléthiques* (comme la *négation* ou la *conjonction* propositionnelles), nous ne prenons en considération que sa possible *valeur de vérité*; en revanche, lorsque *le même contenu propositionnel* entre en composition au moyen de *connecteurs déontiques* ou *déontico-aléthiques*, nous ne considérons plus que sa possible *valeur déontique*. Tel semble d'ailleurs l'usage majoritaire des langues indo-européennes que nous ne faisons que reprendre et mettre en forme.

Il y a cependant un point sur lequel nous nous sommes jusqu'ici écarté de la grammaire traditionnelle des langues indo-européennes. Nous avons en effet traduit en symboles la distinction entre *connecteurs aléthiques* ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) et *connecteurs déontiques* ($\sim_d$, $\wedge_d$, $\vee_d$, $\Rightarrow_d$), là où la grammaire traditionnelle tend souvent à employer la même série de mots (*ne... pas*, *et*, *ou*) pour les deux usages. Si un souci pédagogique de clarté nous a incité à inscrire initialement la distinction dans les signes, nous préférons renoncer désormais à cet usage de signes distincts et aligner la pratique logique sur l'usage traditionnel. Il suffit d'assortir l'emploi d'une unique série de signes, désignant aussi bien les connecteurs *aléthiques* que leurs homologues *déontiques*, d'une clause stipulant qu'on leur applique normalement les *tables aléthiques*, sauf s'ils se trouvent dans la portée d'un connecteur *déontico-aléthique*, auquel cas il convient alors de leur appliquer les *tables déontiques*.

Reconnaissons néanmoins, avant de nous engager dans l'usage que nous venons de choisir, que la suite de nos considérations logiques ne serait pas sensiblement changée si nous avions pris un parti grammatical différent de celui que nous adoptons, par exemple celui de conserver des symboles distincts pour les connecteurs *aléthiques* d'une part et leurs correspondants *déontiques* d'autre part, voire même si nous avions gardé l'usage de *variables d'action* distinctes des *variables propositionnelles*. De tels choix exigeraient seulement quelques modifications superficielles de l'axiomatique ici proposée, modifications suffisamment simples pour qu'il soit superflu de s'y attarder.

*
**

4) *Présentation axiomatique*

Règles de bonne formation:

- Les minuscules p, q, r, etc. sont des EBF (*expressions bien formées*);
- $\sim$ suivi d'une EBF constitue une EBF;
- $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ précédés et suivis d'une EBF constituent une EBF;

- P, O, F, I, suivis d'une EBF du CDP (*calcul des propositions*) constituent une EBF;
- eq, pr, *pr*, précédés et suivis d'une EBF du CDP constituent une EBF.

On observera que notre système admet comme bien formées les expressions dites parfois *mixtes*, comme

$$p \wedge Pp$$

$$(p \Rightarrow Oq) \vee r$$

à la différence du système F′ qui les exclut. En revanche il rejette bien, comme F′, toute itération des connecteurs déontico-aléthiques, c'est-à-dire qu'il exclut les suites de signes comme

$$POp$$

$$P(p \Rightarrow Oq)$$

$$Pp \text{ eq } Oq$$

Nous présupposerons une axiomatique complète du CDP, avec *règle de substitution* étendue aux nouvelles EBF, *règle de détachement* et *règle de remplacement* étendue aux définitions que nous allons donner. Nous ajouterons à l'axiomatique du CDP six définitions et cinq axiomes, le dernier axiome pouvant être remplacé par une règle.

Terme premier indéfini: Pp

Définitions ([5])

$$01\ Op \underset{df}{=} \sim P \sim p$$

$$02\ Fp \underset{df}{=} \sim Pp$$

$$03\ Ip \underset{df}{=} Pp \wedge P \sim p$$

$$04\ p \text{ eq } q \underset{df}{=} (Op \wedge Oq) \vee (Fp \wedge Fq) \vee (Ip \wedge Iq)$$

05 $p\,pr\,q \underset{df}{=} Op \vee Fq \vee (Ip \wedge Iq)$

06 $p\,pr\,q \underset{df}{=} (Op \wedge Iq) \vee (Op \wedge Fq) \vee (Ip \wedge Fq)$

Axiomes

A1 $P(p \vee q) \Rightarrow (Pp \vee Pq)$

A2 $(Pp \vee Pq) \Rightarrow P(p \vee q)$

A3 $P(p \wedge q) \Rightarrow (Pp \wedge Pq)$

A4 $(Pp \wedge Pq) \Rightarrow P(p \wedge q)$

A5 $Pp \vee P \sim p$

Ce dernier axiome peut être remplacé par la règle suivante:

R1. *Si* α *est thèse du* CDP, *alors* P α *est thèse du système.*

Pour obtenir A5 à partir de R1 et des autres axiomes, il suffit de remarquer que R1 justifie la thèse

$P(p \vee \sim p)$

dont A1 permet ensuite de déduire immédiatement A5.

L'obtention de R1 à partir des cinq axiomes A1-A5 peut s'établir comme suit (6): si α est thèse du CDP, α est tautologie; α peut alors se mettre sous la forme d'une conjonction de disjonctions (forme normale conjonctive) dont chaque disjonction est elle-même tautologique; désignons ces disjonctions tautologiques par β_1, β_2, β_3, etc.; chaque β_i est notamment constitué par la disjonction d'une variable propositionnelle p_i et de sa négation $\sim p_i$; elle est donc du type

$\ldots \vee p_i \vee \ldots \vee \sim p_i \vee \ldots$;

il est manifeste que, pour chaque β_i ainsi constitué , la thèse $P\beta_i$ est déductible par appel à A5 et à la thèse du système «$Pp \Rightarrow P(p \vee q)$»; or des thèses $P\beta_1$, $P\beta_2$, $P\beta_3$, etc. A4 permettra de déduire

$P(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \text{etc.})$ c'est-à-dire $P\alpha$

Dans la mesure où il est facile de démontrer que les cinq axiomes A1-5 transmettent bien la valeur privilégiée V, la déduction précédente suffit à montrer que R1 la transmet elle-même. Mais nous aurions pu établir ce résultat directement de la manière suivante: si α est tautologie du CDP, α peut se mettre sous la forme d'une conjonction de disjonctions dont chacune contiendra la disjonction d'une variable propositionnelle et de sa négation; la table de la *disjonction déontique* (dérivée de celle de la *conjonction déontique*) montre qu'une telle disjonction aura nécessairement la valeur 1 ou ½ ; la table de la conjonction déontique montre ensuite qu'une conjonction de termes ayant la valeur 1 ou ½, aura elle-même la valeur 1 ou ½ ; α ayant la valeur 1 ou ½, $P\alpha$ aura la valeur V.

Ces considérations permettent à leur tour de démontrer la *consistance* des deux axiomatiques envisagées. D'ailleurs, avant même qu'il soit besoin d'une telle démonstration, cette *consistance* ressortait immédiatement du fait que le simple effacement du signe P ou, si l'on préfère s'exprimer autrement, sa *transparence* réduit les axiomes du système, ainsi que les thèses issues de R1, à l'état de thèses du CDP.

La démonstration de l'*indépendance* de chacun des axiomes peut s'obtenir par des méthodes classiques. Nous nous référerons à la table de la *conjonction* et de la *négation déontiques* en désignant les douze postes de ces deux tables par les douze premières lettres de l'alphabet (de *a* à *l*) selon le schéma suivant:

$p \wedge_d q$	0	½	1	$\sim_d p$
0	a	b	c	j
½	d	e	f	k
1	g	h	i	l

Nous indiquons seulement les modifications à apporter à la matrice initiale pour la démonstration de l'indépendance de chacun des axiomes:

- pour A1 $i = 1/2$
- pour A2 $e = 1$ ou $f = 1$ ou $h = 1$ au moins l'un
- pour A3 $a = 1/2$ ou $b = 1/2$
  ou $c = 1/2$ ou $d = 1/2$ ou $g = 1/2$ au moins l'un
- pour A4 $e = 0$ ou $f = 0$ ou $h = 0$ au moins l'un
- pour A5 et pour R1 $j = 0$

La *complétude* du système peut se démontrer comme suit. Puisque les équivalences suivantes:

$$P(p \vee q) \Leftrightarrow (Pp \vee Pq)$$
$$P(p \wedge q) \Leftrightarrow (Pp \wedge Pq)$$
$$O(p \vee q) \Leftrightarrow (Op \vee Oq)$$
$$O(p \wedge q) \Leftrightarrow (Op \wedge Oq)$$

peuvent se déduire dans le système et sont par le fait même valides, et que les définitions permettent d'éliminer tous les connecteurs déontico-aléthiques à l'exception de P, toute expression valide du système peut se transformer en fin de compte par voie d'équivalence en une conjonction de disjonctions, telle que les éléments ainsi mis en disjonction seront chacun nécessairement de l'un des six types suivants: p, $\sim q$, Pr, $P\sim s$, $\sim Pu$, $\sim P\sim v$, les minuscules p, q, r, s, u et v représentant ici, comme dans la suite de notre démonstration, des *variables propositionnelles* quelconques. Cette conjonction de disjonctions est valide, puisqu'elle est obtenue à partir d'une expression valide par des transformations qui conservent la validité. Or, de par les propriétés de la *conjonction* du CDP, elle est valide si et seulement si chacune de ses disjonctions est valide. Mais chacune de ses disjonctions est valide si et seulement si y sont effectivement en disjonction:

- soit une variable propositionnelle p avec sa négation $\sim p$;
- soit l'un des deux termes Pp et $P\sim p$ avec sa négation;
- soit enfin les deux termes Pp et $P\sim p$ l'un avec l'autre.

Une telle conjonction de disjonctions peut évidemment se déduire du système([7]), puisque chacune des disjonctions qui la composent peut elle-même se déduire du CDP et de A5. La déduction de l'expression initiale à partir de la conjonction de disjonctions ainsi établie ne soulève à son tour aucune difficulté, puisque la transformation de l'une en l'autre avait été obtenue par voie d'équivalences déductibles dans le système, et que le remplacement des termes équivalents l'un par l'autre est lui-même justifiable dans le système.

Notre présente démonstration de *complétude* n'est d'ailleurs nullement liée à la façon dont nous avons défini la bonne formation des expressions. On peut en effet démontrer de la même manière la complétude de F', que Åqvist établit de son côté par une tout autre méthode. La seule différence entre F' et notre système est que celui-ci admet comme EBF les expressions dites *mixtes* et même les simples EBF du CDP. Pour adapter notre démonstration à la complétude de F', il suffit donc d'y apporter les deux modifications suivantes:

1) les éléments mis en disjonction ne pourront appartenir chacun qu'à l'un des quatre *(et non plus: six)* types: Pr, $P\sim s$, $\sim Pu$, $\sim P\sim v$;

2) chacune des disjonctions sera valide si et seulement si y sont effectivement en disjonction soit l'un des deux termes Pp et $P\sim p$ avec sa négation, soit les deux termes Pp et $P\sim p$ l'un avec l'autre (*à l'exclusion de la première hypothèse précédemment mentionnée, qui ne peut plus se présenter*). Pour le reste, il suffit d'observer que les quatre équivalences auxquelles nous avions fait appel, ainsi que A5, sont déductibles dans F' ([8]).

*
**

5) Interpretation

De l'équivalence

$$P(p \wedge q) \Leftrightarrow (Pp \wedge Pq)$$

une simple substitution permet de déduire

$$P(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow (Pp \wedge P\sim p).$$

Or que peut signifier l'expression «$P(p \wedge \sim p)$», alors que les systèmes modaux les plus élémentaires contiennent tous la thèse:

Il n'est pas possible que p et non p?

Y a-t-il un sens à admettre que l'impossible puisse être permis?

Le seul sens que puisse prendre à nos yeux la permission d'un contenu impossible est celui d'une *permission vide*. S'il est indiscutablement absurde en effet d'*obliger à l'impossible*, puisqu'une telle obligation ne peut être remplie, il est seulement vain, mais nullement absurde, de *permettre l'impossible*; *vain* puisqu'une telle permission n'a pas de contenu; *nullement absurde* en revanche puisqu'elle ne met pas le sujet dans l'impossibilité de se conformer aux règles. Nous n'aurions donc *a priori* aucune répugnance à considérer «$P(p \wedge \sim p)$» comme l'expression d'une *permission vide*, d'autant que l'histoire de la logique est pleine de faux paradoxes issus d'une méfiance superficielle envers de telles expressions vides, auxquelles on peut avoir pourtant des raisons majeures, notamment d'ordre syntaxique, d'accorder une place dans un système.

Mais l'équivalence, à laquelle A3 et A4 nous conduisent immédiatement, de «$P(p \wedge \sim p)$» avec la permission bilatérale, «$(Pp \wedge P\sim p)$» c'est-à-dire «Ip», nous interdit de traiter cette expression comme celle d'une *permission vide* et nous oblige au contraire à considérer que «$P(p \wedge \sim p)$» donne, non pas le droit à l'acte impossible désigné habituellement par «$p \wedge \sim p$», mais qu'il confère deux droits, bien effectifs, l'un à l'acte désigné par «p», et l'autre à l'acte désigné par «$\sim p$», actes l'un et l'autre également possibles, bien qu'ils ne le soient pas simultanément. Ainsi dans l'expression «$P(p \wedge \sim p)$» de notre système, «$p \wedge \sim p$» ne peut absolument pas recevoir l'interprétation, qu'on lui donne classiquement en logique modale, notamment dans la thèse

Il n'est pas possible que p et non p,

d'un contenu contradictoire.

Notre présent système nous contraint donc à nous écarter de la logique modale et à interpréter, à la suite de A3 et A4, «$P(p \wedge q)$» comme une sorte d'abréviation pour «$(Pp \wedge Pq)$» et aussi bien, à la suite de A1 et A2, «$P(p \vee q)$» comme une abréviation de «$(Pp \vee Pq)$». En fin de compte, la seule interprétation que puisse prendre un tel système semble devoir nous conduire à remplacer nos quatre premiers axiomes A1-4 par les deux *définitions*:

07 $P(p \vee q) \underset{df}{=} (Pp \vee Pq)$

08 $P(p \wedge q) \underset{df}{=} (Pp \wedge Pq)$

puisque le *definiendum* se présente bien ici comme une simple *manière de dire*, avec une légère abréviation, ce que le *definiens* exprimait plus explicitement et qu'on ne peut échapper à des conséquences absurdes que si on le réduit à ce rôle de *manière de dire*.

Ainsi les nécessités de l'interprétation nous ont-elles entraîné à une légère modification de la présentation syntaxique, dont les résultats peuvent provoquer quelque surprise. Nous nous trouvons désormais en présence d'un système pourvu d'un assez riche arsenal de définitions (huit exactement), mais ne faisant appel, en dehors de l'axiomatique du CDP qu'à un unique axiome (A5), ou, si l'on préfère, à une unique règle (R1). Or nous avions montré dans [7] (pp. 58-59) qu'un tel axiome (ou, par le fait même, l'unique règle R1) était l'élément qu'il suffisait d'ajouter au CDP pour obtenir l'*hexagone de Robert Blanché*; celui-ci constitue, ne l'oublions pas, une sorte de logique déontique minimale, contenue à peu près dans tous les systèmes déontiques qui ont été proposés.

On peut donc légitimement s'étonner, après être parti d'un système suffisamment fort pour que beaucoup de ses thèses fussent discutables, de parvenir maintenant, par une transformation syntaxique assez insignifiante (un remplacement d'axiomes par des définitions qui puissent remplir le même rôle), au plus faible des sytèmes déontiques classiquement développés, pour tout dire, au simple *carré d'Aristote*, seulement enrichi d'un certain nombre de définitions susceptibles de lui faire exprimer beaucoup de relations déontiques qu'on ne le soupçonnait pas jusqu'ici de pouvoir exprimer.

En un sens, on serait presque habilité à conclure: beaucoup de bruit pour rien! toutes ces considérations sur la trivalence nous reconduisent en fin de compte au CDP seulement complété par le carré d'Aristote; la trivalence pouvait-elle connaître résultat plus décevant? En un autre sens, on pourrait dire au contraire que ce système donne à la trivalence une interprétation on ne peut moins paradoxale; faut-il se plaindre que les résultats obtenus s'accordent aussi bien avec ceux des systèmes classiques? et ne faut-il pas se réjouir au contraire qu un unique axiome suffise à fonder un système dont la richesse initialement constatée ne se trouve pas abolie par une opération syntaxique superficielle? Ce que la trivalence apporte ici d'original, ce sont précisément ces définitions qui confèrent au système un vocabulaire plus diversifié que celui de la plupart des systèmes classiques et permettent d'introduire, des thèses aussi peu triviales que

$$[Pp \wedge (q \, pr \, p)] \Rightarrow Pq$$

$$[O(p \Rightarrow q) \wedge (r \, pr \, q)] \Rightarrow [Fp \wedge P(\sim q \wedge r)]$$

sur la base d'un axiome ou d'une règle unique, qu'on ne devinait pas au départ susceptible de ces développements.

*
**

6) Comparaison avec le système de von Wright

Comparons maintenant les résultats du présent système avec ceux que l'on obtient dans les systèmes déontiques rendus classiques par les différents travaux de von Wright intégrant la distinction entre *permission faible* et *permission forte*, en particulier par [16]; travaux dont on peut trouver dans [3], [10] et [11] des prolongements sémantiques appliquant la méthode des mondes possibles initialement imaginée par Kripke et Hintikka pour la logique modale. Plus exactement, à ces travaux comparons F′, dont les règles de bonne formation des expressions correspondent à celles de von Wright, en reprenant simplement pour F′ l'axiomatique que nous avions proposée pour notre système.

A1, A2, A3 et A5 se retrouvent dans le système de la *permission faible* ; A1 et A2 expriment même l'équivalence que von Wright donne comme caractéristique de ce type de permission. A4, en revanche, est étranger à ce système. Quant à la *permission forte*, rappelons qu'elle était caractérisée chez von Wright par l'équivalence

$$P(p \vee q) \Leftrightarrow (Pp \wedge Pq)$$

laquelle n'est pas thèse de F′, où l'on trouve seulement l'implication

$(Pp \wedge Pq) \Rightarrow P(p \vee q)$.

Bref la distinction entre *permission faible* et *permission forte*, dont [3] et [10] donnaient une justification sémantique par la méthode des mondes possibles, perd son fondement dans notre présent système. La *permission* prend ici une détermination différente et de la *permission faible* et de la *permission forte*. Une comparaison avec [10], où les règles admises pour la bonne formation des expressions rejoignent celles de F′ (en ce qu'elles excluent, à la différence de [3], l'itération de ce que nous avons appelé les *connecteurs déontico-aléthiques*), montrerait que, si les trois systèmes (*permission faible*, *permission forte*, F′) contiennent certes beaucoup de thèses qui leur sont communes à tous, d'autres thèses ne leur sont communes que deux à deux, d'autres enfin sont propres à tel ou tel des trois à l'exclusion des deux autres.

Une des différences les plus caractéristiques entre le système de la *permission faible* et F′ tient à ce que le premier contenait, non pas R1, mais une règle plus forte qui pouvait être:

Si $\alpha \Rightarrow \beta$ *est thèse du CDP, alors* $P\alpha \Rightarrow P\beta$ *est thèse du système*,

alors que notre règle R1 est équivalente à:

Si $\alpha \Rightarrow \beta$ *est thèse du CDP, alors* $O\alpha \Rightarrow P\beta$ *est thèse du système.*

La version la plus forte du sytème de la *permission faible* admettait même la règle:

Si α *est thèse du CDP, alors* $O\alpha$ *est thèse du système*,

alors qu'on peut démontrer qu'au contraire dans F′ aucune expression du CDP ne se trouve *ordonnée* ou *interdite* du seul fait de ses propriétés formelles.

En vue de cette démonstration, nous appellerons *tautologie déontique* toute EBF du CDP qui prend la valeur 1 à chaque ligne de sa *table déontique*; et de même nous appellerons *antilogie déontique* toute EBF du CDP prenant la valeur 0 à chaque ligne de sa table déontique. Il est facile de vérifier que, aussi bien dans F′ que dans notre système:

L'ensemble des tautologies déontiques est vide,
L'ensemble des antilogies déontiques est vide.

Pour le prouver, il suffit de considérer le cas où toutes les variables propositionnelles de l'expression prennent la valeur ½ ; la consultation des *tables déontiques* montre que l'expression, quelle qu'elle soit, prendra alors nécessairement la valeur ½.

*
**

7) *Implications philosophiques*

Que l'ensemble des tautologies déontiques et celui des antilogies déontiques de F′ et de notre système soient l'un et l'autre vides signifie que, selon ces systèmes, *aucune raison simplement formelle* ne suffit à rendre obligatoire ou interdit, bref à rendre impératif, quoi que ce soit. Pour parler en termes kantiens, ces systèmes donnent à la *raison pratique* une indépendance maximale relativement à la *raison théorique* : l'impératif ne peut être que *catégorique*.

Nous sommes ici en présence d'une conséquence, moins immédiate tout de même qu'on ne peut le croire, de l'indépendance que nous avions posée au départ entre *valeurs aléthiques* et *valeurs déontiques* d'un même contenu propositionnel. Il n'est pas étonnant que les sémantiques des mondes possibles, qui réduisent au contraire la distance entre ces deux ordres de valeurs, en assimilant par exemple l'*impérativement bon* à *ce qui est vrai dans tous les mondes possibles reconnus comme positifs*, soient conduites par le fait même à admettre, avec le principe leibnizien

Omne necessarium debitum est (9),

une certaine dépendance logique du *bien* relativement au *vrai*.

A cet égard le système que nous avons développé dans cet article devrait s'accorder, davantage que le système von Wright ou ceux qui, en étant issus, gardent ses caractéristiques essentielles, aux conceptions philosophiques qui établissent cette rupture, entre l'ordre du *devoir-être* et celui de l'*être*, caractéristique de ce qu'on peut appeler, au sens le plus large, un positivisme moral ou juridique.

Mais ce que nous a montré le développement de notre système, c'est que, même si l'on postule, comme nous l'avions fait, une totale indépendance *initiale* des valeurs déontiques et des valeurs aléthiques entre elles, il n'en reste pas moins que ressurgit une dépendance minimale, qu'illustrait notre règle R1, entre les deux ordres. En fin de compte les conclusions auxquelles notre système nous conduit sont à cet égard assez conformes à la *Critique de la raison pratique*: la règle R1 revient à dire que ce qui est tautologique, c'est-à-dire analytiquement nécessaire, est par le fait même permis; ce qu'on peut exprimer de façon équivalente en disant qu'il faut que ce qui est obligatoire soit possible(10); en termes kantiens c'est la moralité qui d'abord découvre le concept de la liberté et le sujet «juge qu'il peut faire quelque chose parce qu'il a conscience qu'il doit le faire et reconnaît ainsi en lui la liberté, qui sans la loi morale lui serait restée inconnue»(11). Ce que l'homme *doit* faire, dit ailleurs Kant, il *peut* aussi le faire «car la raison ne lui ordonnera pas l'impossible»(12).

Ainsi à la différence des systèmes issus de von Wright, qui correspondent, nous l'avons vu, à une représentation plutôt leibnizienne de la moralité et dont l'élégance théorique, qu'il faut reconnaître, tient à leur capacité de réduire les valeurs déontiques aussi bien qu'aléthiques à une conception unitaire de la vérité(13), le système F', tel que nous l'avons reformulé, ou le système voisin, que nous avons ici proposé, nous paraissent s'accorder à une représentation nettement kantienne. Si l'on considère, comme nous l'avons vu, que nos quatre axiomes A1-4 peuvent se remplacer par de simples définitions, la suffisance d'une unique règle à fonder axiomatiquement le système signifie alors que la logique de la raison pratique n'appelle, dans cette perspective philosophique, l'addition à la logique du raisonnement ordinaire (ici représentée par le CDP) d'aucun autre postulat que le principe kantien exprimé par R1.

Université de Nantes — Jean-Louis GARDIES
*Université de Łódź** — Grzegorz MALINOWSKI

* La contribution du deuxième auteur à ce travail a été rendue possible par son séjour à Nantes en qualité de boursier du Conseil scientifique de l'Université de cette ville pendant le premier semestre 1980.

(1) Exemple de tels artifices, souligné par Aqvist lui-même, la règle R3' qui sélectionne 8 thèses du *calcul des propositions*, ayant la forme $X \supset Y$, dont on est autrisé à déduire $PX' \supset PY'$, X' et Y' étant les transpositions respectives, en langage déontique, de X et de Y.

(2) Pour la notation des connecteurs déontiques, nous ajoutons simplement la lettre minuscule *d* sous le symbole caractéristique du connecteur aléthique correspondant. En outre «v_d» signifie ici *valeur déontique de*.

(3) Où «v_a» signifie *valeur aléthique de* ou *valeur de vérité de*.

(4) Cf. [8], pp. 222 et s.

(5) «Fp» signifie *Il est interdit que p* et «Ip» *Il est indifférent que p*.

(6) Une telle démonstration, de même que la démonstration suivante établissant que R1 transmet la valeur privilégiée, suppose qu'on vérifie d'abord, ce qui est facile, que la transformation d'une expression du CDP en forme normale conjonctive fait appel à des opérations (transformation des connecteurs par recours aux définitions, suppression de la double négation, recours à la distributivité de la conjonction et de la disjonction l'une par rapport à l'autre) qui toutes conservent, pour chaque ligne de la table déontique, la valeur déontique de l'expression initiale.

(7) Par appel, éventuellement répété, à la thèse du CDP:

$$P \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$$

(8) Donnons un exemple élémentaire de transformation d'une expression, valide déjà dans F′, en une conjonction de disjonctions, manifestement déductible tant de notre axiomatique que de celle de F′ :

$$[Op \wedge O(p \Rightarrow q)] \Rightarrow Oq$$
$$\sim [Op \wedge O(p \Rightarrow q)] \vee Oq$$
$$\sim Op \vee \sim O(p \Rightarrow q) \vee Oq$$
$$P \sim p \vee P \sim (p \Rightarrow q) \vee \sim P \sim q$$
$$P \sim p \vee P(p \wedge \sim q) \vee \sim P \sim q$$
$$P \sim p \vee (Pp \wedge P \sim q) \vee \sim P \sim q$$
$$(P \sim p \vee Pp \vee \sim P \sim q) \wedge (P \sim p \vee P \sim q \vee \sim P \sim q)$$

(9) Cf. [13], pp. 99-102.

(10) Cf. [9], p. 467.

(11) Cf. [14], p. 30.

(12) Cf. [15], p. 148.

(13) Cf. [4], pp. 190-191.

BIBLIOGRAPHIE

(1) ÅQVIST Lennart, A binary primitive in deontic logic, *Logique et analyse*, 5, 1962, pp. 90-97.

(2) ÅQVIST Lennart, Postulate sets and decision procedures for some systems of deontic logic, *Theoria*, 29, 1963, pp. 154-175.

(3) BAILHACHE Patrice, Sémantiques pour des systèmes déontiques intégrant permission faible et permission forte, *Logique et analyse*, 79, 1977, pp. 286-316.

(4) BAILHACHE Patrice, *Recherches sur la logique de l'action*, Université de Nantes, 1979.

(5) BLANCHE Robert, *Structures intellectuelles, Essai sur l'organisation systématique des concepts*, Vrin, Paris, 1966.

(6) FISHER Mark, A three-valued calculus for deontic logic, *Theoria*, 27, 1961, pp. 107-118.

(7) GARDIES Jean-Louis, *Essai sur les fondements a priori de la rationalité morale et juridique*, L.G.D.J., Paris, 1972.

(8) GARDIES Jean-Louis, *Esquisse d'une grammaire pure*, Vrin, Paris, 1975.

(9) GARDIES Jean-Louis, Modalités et normes, *Archiv für Rechts- und Sozial philosophie*, LXII/4, 1976, pp. 465-474.

(10) GARDIES Jean-Louis, La logique déontique et ses sémantiques possibles, *Logique et analyse*, 82-83, 1978, pp. 185-203.

(11) GARDIES Jean-Louis, *Essai sur la logique des modalités,* P.U.F., Paris, 1979.

(12) KALINOWSKI Georges, Théorie des propositions normatives, *Studia logica,* 1, 1953, pp. 147-182; réédité dans G. KALINOWSKI, *Etudes de logique déontique* I (1953-1969), L.G.D.J., Paris, 1972, pp. 17-53.

(13) KALINOWSKI Georges et GARDIES Jean-Louis, Un logicien déontique avant la lettre: G.W. Leibniz, *Archiv für Rechts- und Sozialphilosophie,* LX/1, 1974, pp. 79-112.

(14) KANT, *Werke, Akademie Textausgabe, V, Kritik der praktischen Vernunft, Kritik der Urtheilskraft*, Walter de Gruyter, Berlin, 1968.

(15) KANT, *Werke, Akademie Textausgabe, VII, Der Streit der Fakultäten, Anthropologie in pragmatischer Hinsicht*, Walter de Gruyter, Berlin, 1968.

(16) WRIGHT Georg Henrik von, An essay in deontic logic and the general theory of action, *Acta philosophica fennica*, fasc. XXI, 1968.

(17) WRIGHT Georg Henrik von, *The logic of preference*, At the University Press, Edinburgh, 1963.