LA COMPLETUDE D'UN SYSTEME TEMPOREL *DE RE*

Gérold STAHL

Les systèmes temporels qu'on pourrait appeler «*de re*» sont des systèmes fonctionnels élémentaires (du premier ordre) avec identité qui, grâce à des axiomes additionels, permettent d'analyser la temporalité *de re*. En traitant les fonctions propositonnelles unaires comme des classes, les fonctions propositionnelles binaires (les relations binaires) comme des classes de paires ordonnés, etc., l'idée caractéristique des systèmes temporels *de re* est que leur univers du discours U(la classe des individus) inclut une sous-classe P (la classe des positions temporelles), dont un des éléments est a (la position temporelle actuelle). En plus pour chaque fonction propositionnelle non temporalisée n-aire F on introduira des fonctions propositionnelles temporalisées $n+1$ – aires F^*, leur argument additionnel (le premier) pouvant être occupé par des positions temporelles. Si, par exemple, «Fc» veut dire «Charles fait une visite», alors «$F^*11^{35}c$» pourrait être interprétée comme «Charles fait une visite à 11^{35} h». Tout cela a été indiqué d'une façon détaillée dans [6] (1) et de façon très résumée dans [7].

En principe chaque système fonctionnel élémentaire (pur ou appliqué) avec identité pourrait être temporalisé, c'est-à-dire, on pourrait ajouter à ses expressions bien formées les expressions avec «P», «a», «F^*», etc. et à ses axiomes des axiomes temporels.

En ce qui concerne la complétude, si le système de départ n'est pas complet, on ne peut pas s'attendre à ce que son élargissement temporel le soit. D'un autre côté si le système de départ est complet, il y a des chances que le système temporel *de re* correspondant conservera cette complétude (cela dépend aussi de la définition d'«expression valide»). Dans ce qui suit on donnera une démonstration de complétude pour la temporalisation du système fonctionnel élémentaire pur avec identité; cet élargissement sera appelé FTR, «système fonctionnel temporel *de re*».

(1) Le système de [6] était du second ordre, mais il est préférable de travailler avec des systèmes du premier ordre, qui permettent de traiter l'essentiel de [6] sans difficulté.

Afin de construire les expressions bien formées du système fonctionnel élémentaire avec identité on dispose: des symboles de variables (2) individuelles «x», «y», etc., des symboles de constantes individuelles «b», «c», etc., des symboles de variables fonctionnelles n-aires «F», «G», etc., du symbole de constante fonctionnelle binaire «=» (l'identité entre individus), des connecteurs «$\sim$», «v», «.», «$\supset$», et «$\equiv$» (négation, disjonction, conjonction, implication et équivalence) et des opérateurs universels («(x)», «(y)», etc.,) et existentiels («(Ex)», «(Ey)», etc.).

A partir des expressions indiquées on formera les expressions bien formées du système fonctionnel élémentaire de façon habituelle, en utilisant largement les parenthèses pour faciliter la lecture.

On peut utiliser encore une autre symbolisation pour les fonctions propositionnelles grace à l'opérateur λ. Par exemple au lieu d'avoir recours au symbole fonctionnel unaire «F» on peut écrire aussi «$\lambda x\,(Fx)$» («la collection des «x» qui satisfont «F»). De la même manière on peut utiliser «$\lambda xy\,(Gxy)$» au lieu d'un symbole fonctionnel binaire «G». De cette façon on n'a pas seulement les expressions bien formées «Fy», «$\sim Gcb$», etc., mais aussi «$\lambda x\,(Fx)\,y$», «$\sim\lambda xy\,(Gxy)\,cb$» etc., qui sont également bien formées. L'opérateur λ peut inclure des expressions bien formées complexes, comme par exemple «$Fb \vee \sim(\mathrm{E}x)\,Gxy$» dans l'expression bien formée «$\lambda y\,(Fb \vee \sim(\mathrm{E}x)\,Gxy)\,z$».

Les expressions bien formées du système FTR se forment de la même manière; il faut seulement ajouter «a» à la liste des symboles de constantes individuelles, on aura «P» comme symbole de constante fonctionnelle unaire et pour chaque symbole fonctionnel n-aire *du système original* (même s'il est formé avec l'opérateur λ, mais sans opérateurs universels ou existentiels dans l'expression λ) on aura un symbole n + 1-aire, qui est le symbole original suivi de «*» (3).

On forme le système fonctionnel élémentaire à partir des axiomes logiques habituels à l'aide des règles axiomatiques habituelles. Pour le

(2) On parlera ici de «symboles de variables» au lieu de «variables».

(3) Cela signifie que des expressions comme «$F^{**}xyz$», «$\lambda xy\,(F^{*}xy \vee G^{*}xy)^{*}uvz$» ou $\lambda x\,((y)Fxy)^{*}uv$» ne sont pas bien formées pour FTR. Cependant on peut former un autre système temporel plus général où la répétition des astérisques, c'est-à-dire la superposition des termes temporels, est admise, de même que la temporalisation d'une expression λ avec des opérateurs universels ou existentiels.

système FTR on procède de la même façon, mais on a en plus trois axiomes temporels additionnels.

Le premier d'entre eux est:

$$A1 \vdash F y_1 \ldots y_n \equiv F^* a y_1 \ldots y_n$$

Il s'agit ici d'un schéma d'axiomes pour les fonctions unaires, binaires, ternaires, etc. Au lieu de A1 on pourrait utiliser la règle:

> Dans une expression bien formée après une occurence quelconque d'un symbole fonctionnel n-aire on peut insérer «$*a$» (si le résultat est bien formé), ou, inversement, si l'on a quelque part «$*a$» on peut l'éliminer.

L'idée de ce schéma (ou de cette règle) est que si et seulement si un n-uplet $<x_1, \ldots, x_n>$ satisfait F alors ce n-uplet satisfait F^* dans la position actuelle (plus précisément: alors le $n+1-$uplet $<a, x_1, \ldots, x_n>$ satisfait F^*).

On peut constater que pour chaque fonction astérisque F^* on a une fonction de base F *unique*, sans qu'on ait la relation inverse. Cela signifie que (contrairement à la symbolisation) les fonctions astérisque et non les fonctions de base devraient constituer le point de départ. De fait, dans la construction des modèles on procédera de cette façon. Si l'on voulait ajuster la symbolisation à cette situation, on pourrait maintenir «F^*», etc. et, au lieu de «F», on écrirait «$B(F^*)$» («la fonction de base de F^*»). Si $F^* = G^*$ on a bien $B(F^*) = B(G^*)$, mais non l'implication inverse. La notation «F» est simple et intuitive, pourtant elle devrait être considérée seulement comme abréviation de «$B(F^*)$».

Par rapport aux axiomes A2 et A3 on aura besoin de quelques définitions (parmi elles l'identité entre fonctions propositonnelles). Pour les fonctions unaires F et G on a:

$$F = G =_{df} (x)(Fx \equiv Gx)$$
$$F \cap G =_{df} \lambda x (Fx \,.\, Gx)$$
$$F \cup G =_{df} \lambda x (Fx \vee Gx)$$
$$-F =_{df} \lambda x (\sim Fx)$$

et de façon analogue pour les fonctions binaires, ternaires, etc. De plus on définira «U», «l'univers du discours»:

$U =_{\mathrm{df}} \lambda x\,(x = x)$

Un autre axiome est:

A2 $\vdash F^* \cap G^* = (F \cap G)^*$

qui indique que l'intersection de deux fonctions astérisque est la fonction astérisque de l'intersection des fonctions de base. Un exemple ternaire serait:

$\vdash (F^*xyz \,.\, G^*xyz) \equiv (F \cap G)^*xyz$

Afin de formuler le troisième axiome, il faut définir «le complément relatif de F^*», qui est:

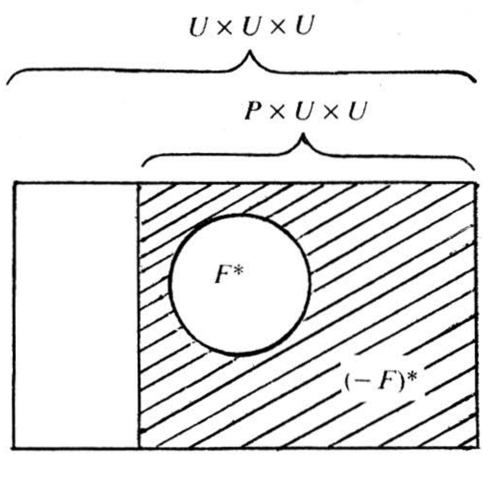
$-_{\mathrm{r}}F^* =_{\mathrm{df}} \lambda x, y_1, \ldots, y_{\mathrm{n}}\,({\sim}F^*x\,y_1 \ldots y_{\mathrm{n}} \,.\, Px)$

on a alors:

A3 $\vdash -_{\mathrm{r}}F^* = (-F)^*$

Le complément simple de la fonction $\mathrm{n}+1$-aire F^* serait le complément par rapport à $U^{\mathrm{n}+1}$ (c'est-à-dire par rapport au produit cartésien $U \times U \times \ldots$ avec $\mathrm{n}+1$ facteurs), tandis que le complément relatif de F^* est le complément par rapport à $P \times U^{\mathrm{n}}$ (le premier facteur n'est pas U mais seulement P). L'axiome A3 établit alors que ce complément relatif est la fonction astérisque de $-F$: F^* et $(-F)^*$ sont complémentaires par rapport à $P \times U^{\mathrm{n}}$. Un exemple ternaire serait:

$$\vdash ({\sim}F^*xyz \,.\, Px) \equiv (-F)^*xyz$$



Voici quelques théorèmes élémentaires de FTR:

$\vdash -_{\mathrm{R}}(-F)^* = F^*$

Dém.: A partir de A3 avec «$-F$» au lieu de «F».

$\vdash (\mathrm{E}y_1,\dots,y_n)\, F^*xy_1\dots y_n \supset Px$

(les premiers membres des $n+1$-uplets qui constituent F^* sont des positions temporelles). Dém.: «$(\mathrm{E}y_1,\dots,y_n) -_{\mathrm{r}}(-F)^*xy_1\dots y_n$» implique, selon la définition de «$-_{\mathrm{r}}$», «$(\mathrm{E}y_1,\dots,y_n)$ $(\sim(-F)^*xy_1\dots y_n . Px)$», d'où «$Px$».

$\vdash Pa$

Dém.: A partir du théorème logique «$(\mathrm{E}y)\,\lambda x\,(x=x)y$» on a, d'après A1, le théorème «$(\mathrm{E}y)\,\lambda x\,(x=x)^*ay$» et alors, d'après le théorème antérieur, «Pa».

$\vdash F^* \cup G^* = (F \cup G)^*$

Dém.: A partir de «$(-(-F \cap -G))^*$» par A3, A2 et de nouveau A3 on obtient «$-_{\mathrm{r}}(-_{\mathrm{r}}F^* \cap -_{\mathrm{R}}G^*)$», d'où par la définition de «$-_{\mathrm{r}}F^*$» et par logique propositionelle «$F^* \cup G^*$».

Pour prouver certains résultats sur FTR, il est plus simple de restreindre la classe des expressions bien formées. Cela se fera en trois étapes:

(1) On remplace les expressions introduites par définition ou avec opérateur λ par les expressions simples correspondantes qui utilisent seulement «$\sim$», «v» et l'opérateur universel. Cependant on peut arriver aussi aux suites de signes «$F \cap G \cap \dots$», «$(F \cap G \cap \dots)^*$», «$-F$», «$(-F)^*$» (et à leurs combinaisons), qu'on ne remplace pas.

(2) On remplace les suites de signes «$F \cap G \cap \dots$» et «$-F$» non suivies d'un astérisque par «$(F \cap G \cap \dots)^*a$» et «$(-F)^*a$» respectivement.

(3) On ajoute à chaque symbole fonctionnel non suivi d'un astérisque (à l'exception de «P», «U» et des membres de suites traités en point (2)) les deux signes «$^*a$» d'après la règle A1 (cela revient au fond à traiter A1 comme une définition de «$F\dots$» à partir de «$F^*a\dots$»).

Après cette transformation on a trois classes d'expressions bien formées restreintes: les atomiques comme «Px» et «F^*xy», les «postatomiques» comme «$(F \cap G \cap \ldots)^*xy$» et «$(-F)^*xy$» et les moléculaires qui sont formés à partir des atomiques et postatomiques par application de «$\sim$», de «v» et de l'opérateur universel.

Les modèles de FTR sont les structures (appelées «structures temporelles») de la forme $<U, P, a, \ldots>$ qui satisfont les conditions suivantes:

(i) Pa et $P \subset U$.

(ii) Le reste de la structure est formé par des fonctions astérisque (F^*, $(-F)^*$, $(F \cap G)^*$, etc.) n + 1-aires ($n \geq 1$), sous-classes de $P \times U^n$.

(iii) La fonction astérisque formée sur $F \cap G$ est égale à $F^* \cap G^*$.

(iv) La fonction astérique formée sur $-F$ est égale au complément de F^* par rapport à $P \times U^n$.

Les conditions (iii) et (iv) correspondent aux axiomes A2 et A3.

Le fait que FTR ait des modèles indique qu'il est consistant.

Pour démontrer que FTR est complet (par rapport à la validité) on procède de la façon suivante. On appelle «temporellement valide» une expression bien formée restreinte si elle est valide dans toute structure temporelle. La complétude de FTR signifie alors qu'une expression bien formée restreinte «A» qui n'est pas théorème de FTR, n'est pas temporellement valide. Dans ce qui suit on adaptera au cas de FTR un type de démonstration que Henkin a utilisé pour démontrer la complétude du système fonctionnel élémentaire (voir [2] et [1] § 45).

Dém.: Si la classe {«$\sim$ A»} n'était pas consistante avec FTR, on pourrait obtenir dans FTR le théorème $\vdash \sim A \supset A$ et ensuite $\vdash A$, ce qui contredit l'hypothèse que «A» n'est pas théorème. Donc {«$\sim$ A»} est consistante avec FTR. A partir de {«$\sim$ A»} on peut former une classe consistante maximale Γ de façon habituelle en ordonnant arbitrairement les expressions bien formées restreintes([4]) et en admettant dans Γ chaque expression qui est consistante avec celles précédemment choisies (selon l'ordre établi) et en excluant les autres.

([4]) Avec les modifications habituelles concernant les expressions avec opérateur universel.

La classe Γ contient «∼ A» et en plus (pour chaque expression bien formée restreinte «B») ou bien «B» ou bien «∼ B», mais non les deux. Elle contient tous les théorèmes de FTR et si «C» est dans Γ et $\vdash C \supset D$ alors «D» est dans Γ.

Nous construisons maintenant une structure temporelle $T = <U, P, a, \ldots>$ avec U infinie de telle façon, que si «$Kx_1 \ldots x_n$» atomique[5] appartient à Γ, alors le n-uplet des individus dénoté par «$<x_1, \ldots, x_n>$» satisfait la fonction dénotée par «K», et si «$Kx_1 \ldots x_n$» n'appartient pas à Γ, alors le n-uplet correspondant ne satisfait pas la fonction correspondante.

Ensuite on démontre que T est un modèle de Γ. Pour les expressions atomiques de Γ et leurs négations on a ce résultat automatiquement grâce à la construction de T.

Pour les expressions postatomiques de la forme:

$$(F \cap G)^* x_1 \ldots x_n \tag{a}$$

nous avons l'alternative suivante: Supposons que (a) est dans Γ alors:

$$F^* x_1 \ldots x_n \tag{b}$$

et:

$$G^* x_1 \ldots x_n \tag{c}$$

sont aussi dans Γ, parce que (a) implique (b) et (a) implique (c) d'après A2 de FTR. Grâce à la construction de *T*, *T* est un modèle de (b) et de (c) et, grâce à la condition (iii), *T* est aussi un modèle de (a). Supposons que (a) n'est pas dans Γ; alors sa négation est dans Γ et ensuite aussi la négation de (b) ou la négation de (c) (d'après A2), c'est-à-dire, (b) ou (c) ne sont pas dans Γ. Dans ce cas *T* n'est pas un modèle de (b) ou de (c) et, toujours grâce à la condition (iii), *T* n'est pas un modèle de (a).

Pour les expressions postatomiques de la forme:

$$(-F)^* x_1 \ldots x_n \tag{d}$$

nous avons l'alternative suivante: Supposons que (d) est dans Γ, alors:

(5) «K» prend ici la place de «P» ou de «U» ou d'un symbole astérisque simple comme «F^*».

$\sim F^* x_1 \ldots x_n$ (e)

et:

Px_1 (f)

sont aussi dans Γ, parce que (d) implique (e) et (d) implique (f) d'après A3. Grâce à la construction de T, T est un modèle de (e) et de (f) et, grâce à la condition (iv), T est aussi un modèle de (d). Supposons que (d) n'est pas dans Γ; alors sa négation est dans Γ et ensuite aussi la négation de (e) ou la négation de (f) (d'après A3), c'est-à-dire, (e) ou (f) ne sont pas dans Γ. Dans ce cas T n'est pas un modèle de (e) ou de (f) et, toujours grâce à la condition (iv), T n'est pas un modèle de (d).

Les expressions postatomiques avec plusieurs «$\cap$» ou avec des combinaisons de «$\cap$» et de «$-$» sont traitées par induction à partir des deux cas précédents.

Pour les expressions moléculaires on applique sans changement le procédé standard des démonstrations de complétude (type Henkin) par rapport à «$\sim$» en général, par rapport à «v» et par rapport à l'opérateur universel.

On voit donc que la structure T est un modèle de Γ et, par suite, de «$\sim$ A»; elle ne peut pas être un modèle de «A». Ainsi il y a au moins une structure temporelle qui n'est pas un modèle de «A», en sorte que «A» n'est pas temporellement valide. Q.E.D.

Du fait que les modalités peuvent être introduites dans FTR (voir [7]), on a démontré automatiquement aussi la complétude d'un système *modal de re*. Si l'on établit que les éléments de $U \cap -P$ sont des expressions, alors FTR se transforme en un système temporel ou modal *de dicto* (dans le sens de [6] et [7]), donc on dispose aussi d'une démonstration de complétude pour un système général *de dicto*.

CNRS, Paris Gérold STAHL

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHURCH, A., *Introduction to Mathematical Logic,* Princeton, 1956.

[2] HUGUES, G.E. et CRESSWELL, M.J., *An Introduction to Modal Logic,* Londres, 1968.

[3] KRIPKE, S.A., A Completeness Theorem in Modal Logic, *Journal of Symbolic Logic,* 1959, vol. 24, pp. 1-14.

[4] STAHL, G., General Considerations about Modal Sentences, *Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math.,* Berlin, 1959, vol. 5, n^{os} 3-4, pp. 280-290.

[5] — Modal Models Corresponding to Models, *Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math.,* Berlin, 1974, vol. 20, pp. 407-410.

[6] — Termes temporels dans des systèmes fonctionnels, *Revue philosophique de la France et de l'étranger,* Paris, 1974, n° 3, pp. 293-303.

[7] — Quelques relations entre temporalité *de re* et temporalité *de dicto* et leur extension aux modalités, *Revue philosophique de la France et de l'étranger,* Paris, 1976, n° 2, pp. 165-178.