LA BARRE DE SCHEFFER DANS LA LOGIQUE DES SEQUENTS ET DES SYLLOGISMES

Neil TENNANT

$A|B$: non pas à la fois A et B ... voilà la matière dont on faisait naguère des calculs entiers. La barre décore les premières pages des *Principia mathematica*. Ensuite Schönfinkel inventa une version quantificationnelle de cet opérateur fondamental [1]. Il démontra qu'une variable liée ajoutée à cet opérateur l'élève jusqu'au deuxième ordre de la hiérarchie de Frege. $A|_x B$: rien n'est à la fois A et B ... permet l'expression exhaustive des formules de premier ordre. Il est donc surprenant que l'article intéressant de R. L. Slaght [2] n'a pas semé le désordre dans la sélection des opérateurs primitifs. La responsabilité en revient en toute probabilité à Nicod. Qui oserait affirmer qu'il y a avantage dans le choix de la barre s'il faut s'accommoder en même temps du postulat ridicule:

$$(A|(B|C))|((D|(D|D))|((E|B)|((A|E)|(E|A)))) \text{ ?}$$

Plus récemment, Webb a essayé d'améliorer les choses [3]. Il proposa les règles suivantes de déduction naturelle (dans la notation de Prawitz [4]):

$$\frac{\begin{matrix}(A) & (A)\\ B & C\end{matrix}}{(C|B)|A} \qquad\qquad \frac{A \quad A|(B|C)}{B} \qquad\qquad \frac{A \quad A|(B|C)}{C}$$

[1] «Über die Bausteine der mathematischen Logik», *Math. Annalen* 92 (1924) 305-316.

[2] «A concise method for translating propositional formulae containing the standard truth-functional connectives into a Sheffer stroke equivalent: plus an extension of the method», *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40 (1974) 161-164.

[3] NICOD, *Proc. Camb. Philos. Soc.* 19 (1917-20) 32-41. Webb, «A pair of primitive rules for the sentential calculus». *Zeit. f. Math. Logik u. Grund. der Math.* 16 (1970) 439-446.

[4] *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study* (Stockholm, 1965).

Mais ce sont là des règles qui commandent l'introduction (dans une conclusion) et l'élimination (d'une prémisse) d'une *double* occurrence de la barre. Mais la déduction naturelle exige la formulation de règles qui commandent l'introduction ou l'élimination d'*une seule occurrence* d'un symbole logique ([5]). On doit donc — et donc l'on peut — améliorer les règles de Webb.

Soit le symbole d'absurdité $\wedge$, un élément théorique qui ne se trouve que dans une preuve; alors nous pouvons formuler des règles d'introduction et d'élimination véritables comme suit.

Pour conclure A|B il suffit d'avoir une preuve de $\wedge$, et en plus, arrivé à la conclusion A|B de cette manière, on est en mesure d'annuler toute occurrence de A et de B des prémisses de la preuve. Cette règle d'introduction peut être représentée ainsi:

(1)
$$\frac{\begin{matrix}(A,B)\\ \wedge\end{matrix}}{A|B}$$

$\wedge$ lui-même ne peut être dérivé qu'à partir de prémisses contradictoires et donc il est évident que la règle d'élimination est:

(E)
$$\frac{A \quad A|B \quad B}{\wedge}$$

Ces règles satisfont au principe d'inversion de Prawitz. Car, soit α, une application de (E) avec la conclusion $\wedge$. Alors, une déduction qui satisfait aux conditions suffisantes à la dérivation de la prémisse majeure de α, mise en combination avec les déductions des prémisses mineures de α, «contient» déjà

([5]) Corcoran, «Three logical theories», *Philosophy of Science* 36 (1969) 153-177: «...a maximum amount of logical detail is achieved by rules which either introduce or eliminate exactly one occurrence of a logical symbol.»

une déduction de $\wedge$. Ceci est illustré par le procédé de réduction:

$$
\dfrac{\begin{matrix} \Sigma_1 \\ A \end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix} (A \;,\; B) \\ \Sigma_3 \\ \wedge \end{matrix}}{A \mid B} \quad \begin{matrix} \Sigma_2 \\ B \end{matrix}}{\wedge}\,\alpha
\qquad \longrightarrow \qquad
\begin{matrix} \Sigma_1 \quad\; \Sigma_2 \\ (A \;\;,\;\; B) \\ \Sigma_3 \\ \wedge \end{matrix}
$$

Nous avons analysé dans les paragraphes précédents la signification constructive de la barre. Si l'on ajoute la règle du raisonnement par l'absurde

$$
\text{(C)} \qquad \dfrac{\begin{matrix} (A \mid A) \\ \wedge \end{matrix}}{A}
$$

on obtient la logique classique.

Toute preuve peut être transformée en une dans laquelle toutes les applications de (C) ont des conclusions atomiques par le moyen de la transformation suivante:

$$
\dfrac{\begin{matrix} \overset{(1)}{(B \mid C) \mid (B \mid C)} \\ \Sigma \\ \wedge \end{matrix}}{B \mid C}\,(1)
\qquad \longrightarrow \qquad
\dfrac{\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{B} \quad \overset{(1)}{B \mid C} \quad \overset{(2)}{C}}{\wedge}}{(B \mid C) \mid (B \mid C)}\,(1) \\ \Sigma \\ \wedge \end{matrix}}{B \mid C}\,(2)
$$

Il s'ensuit que le théorème de normalisation de Prawitz est valable pour notre système.

Arrivons à la quantification. Si A et B contiennent x libre, alors $A \underset{x}{\mid} B$ est une formule dans laquelle x est lié, et dont la signification est: «Rien n'est à la fois A et B». Nous sommes en mesure de conclure $A \underset{x}{\mid} B$ si nous avons une preuve de $\wedge$ à partir de prémisses qui affirment uniquement au sujet de l'individu a qu'il possède (au plus) les propriétés A et B. Donc nous avons la règle d'introduction:

$$(\mathrm{I'}) \qquad \frac{\begin{array}{c}(A,B)\\ \wedge\end{array}}{A^a_x|B^a_x{}_{\,x}}\ , \quad \text{où } a \text{ ne se trouve dans aucune prémisse dont dépend } \wedge\text{, à part A et B}$$

La règle d'élimination correspondante est:

$$(\mathrm{E'}) \qquad \frac{A^x_t \quad A|_x B \quad B^x_t}{\wedge}$$

Ces règles fournissent une généralisation adroite des règles de la barre propositionnelle. Le principe d'inversion y est illustré par le procédé de réduction

$$\frac{\begin{array}{ccc} & (A,B) & \\ & \Sigma_3 & \\ \Sigma_1 & \overline{\quad\wedge\quad} & \Sigma_2 \\ A^a_t & A^a_x|B^a_x{}_{\,x} & B^a_t \end{array}}{\wedge} \longrightarrow \begin{array}{ccc} \Sigma_1 & & \Sigma_2 \\ A^a_t & & B^a_t \\ & {\Sigma_3}^a_t & \\ & \wedge & \end{array}$$

En utilisant une transformation semblable à celle donnée plus haut il reste vrai que toute preuve peut être transformée en une dans laquelle les conclusions de (C) sont atomiques.

La preuve de la complétude de nos règles par la méthode de Henkin est plus brève que d'habitude parce qu'il y a moins de cas à considérer dans les inductions. Nous allons formuler des règles de séquent à la manière de Gentzen, et qui correspondent à nos règles de déduction naturelle; et nous allons prouver leur complétude en adaptant l'adaptation faite par Pollock [6] à Henkin.

[6] «Henkin style completeness proofs in theories lacking negation», *Notre Dame Journal of Formal Logic* 12(1971) 509-511.

Les règles qui commandent la barre dans le calcul des séquents sont:

(D) $$\frac{X, A, B \rightarrow Y}{X \rightarrow Y, A|B}$$ (G) $$\frac{X \rightarrow A, Y \quad X \rightarrow B, Y}{X, A|B \rightarrow Y}$$

(D,) $$\frac{X, A, B \rightarrow Y}{X \rightarrow Y, A_x^a \underset{x}{|} B_x^a}$$, où a ne se trouve pas dans le séquent inférieur

(G') $$\frac{X \rightarrow A_t^x, Y \quad X \rightarrow B_{t'}^x, Y}{X, A \underset{x}{|} B \rightarrow Y}$$

Le lecteur pourra vérifier sans difficulté que les séquents suivants sont prouvables:

$$\rightarrow B, B|C$$
$$\rightarrow C, B|C$$

$$B_t^x, C_t^x, B \underset{x}{|} C \rightarrow$$
$$B, C, B|C \rightarrow$$

$X \vdash Z =_{df}$ l'antécédant et le succédant d'un séquent prouvable quelconque sont des sous-ensembles de X, Z respectivement.

Théorème de complétude

Si $X \nvdash Z$, alors il existe une interprétation selon laquelle chaque membre de X est vrai et chaque membre de Z est faux.
Preuve Supposons $X \nvdash Z$. Nous construisons l'interprétation nécessaire après le procédé d'expansion suivant:
Soit $A_0, A_1, A_2, \ldots$ une liste de toutes les formules sans variable libre. Soit $B_0 \underset{x}{|} C_0$, $B_1 \underset{x}{|} C_1$, $B_2 \underset{x}{|} C_2, \ldots$ une liste de toute les formules quantifiées sans variable libre.
Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une liste de toutes les constantes (noms), parmi

lesquelles se trouve un nombre infini de constantes n'étant comprises ni dans X ni dans Z.
(Les deux premières listes sont construites avec tous les noms dans la troisième liste, ainsi qu'avec le vocabulaire de X et de Z.)
Adaptons les définitions suivantes:

$X_0 =_{df} X$
$Z_0 =_{df} Z$
$Y_n =_{df} X_n, B_n \underset{x}{|} C_n$ si $X_n, B_n \underset{x}{|} C_n \nvdash Z_n$ ....(i)

X_n, B^x_{na}, C^x_{na} si $X_n, B_n \underset{x}{|} C_n \vdash Z_n$ ....(ii)

(où a est le premier nom à ne pas se trouver dans $X_n, Z_n, B_n \underset{x}{|} C_n$)

$X_{n+1} =_{df} Y_n, A_n$ si $Y_n, A_n \nvdash Z_n$ ....(iii)
Y_n si $Y_n, A_n \vdash Z_n$ ....(iv)
$Z_{n+1} =_{df} Z_n$ si $A_n \in X_{n+1}$ ....(v)
Z_n, A_n si $A_n \notin X_{n+1}$ ....(vi)
$X* =_{df} \cup_j X_j$
$Z* =_{df} \cup_j Z_j$

Supposons $X* \vdash Z*$. Alors pour des sous-ensembles finis quelconques $X' \subseteq X*$, $Z' \subseteq Z*$, $X' \to Z'$ est prouvable. Alors, il existe k pour qui $X_k \vdash Z_k$. Puisque $X_0 \nvdash Z_0$, alors le i de la plus petite valeur pour laquelle $X_i \vdash Z_i$ est de la form $n + 1$.

Ainsi, $X_{n+1} \vdash Z_{n+1}$ ....(1)
Supposons $A_n \in X_{n+1}$.

Alors, en vertu de (v) $Z_{n+1} = Z_n$. De (1), $X_{n+1} \vdash Z_n$ ......(2)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } X_{n+1} = Y_n, A_n \text{ alors de (2)} \\ \text{Si } X_{n+1} \neq Y_n, A_n \text{ alors en vertu de (iii)}\end{array}\right\} Y_n, A_n \vdash Z_n \quad \text{......(3)}$$

Ainsi, en vertu de (iv) $X_{n+1} = Y_n$. Ainsi $A_n \in Y_n$. Donc de (3) $Y_n \vdash Z_n$.

Supposons, au contraire, $A_n \notin X_{n+1}$.

Alors, $X_{n+1} \neq Y_n, A_n$. Donc en vertu de (iii) $Y_n, A_n \vdash Z_n$ ......(4) et en vertu de (iv) $X_{n+1} = Y_n$; et en vertu de (vi) $Z_{n+1} = Z_n, A_n$.
Donc de (1) $Y_n \vdash Z_n, A_n$ ......(5). De (4), (5) par la coupe $Y_n \vdash Z_n$.

Donc $Y_n \vdash Z_n$ ......(6)
Supposons $B_n \underset{x}{|} C_n \in Y_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } Y_n = X_n, B_n \underset{x}{|} C_n \text{ alors de (6)} \\ \text{Si } Y_n \neq X_n, B_n \underset{x}{|} C_n \text{ alors en vertu de (i)} \end{array}\right\} X_n, B_n \underset{x}{|} C_n \vdash Z_n \;\ldots(7)$$

Ainsi en vertu de (ii) $Y_n = X_n, B^x_{na}, C^x_{na}$. Donc puisque $B_n \underset{x}{|} C_a \in Y_n$, alors $B_n \underset{x}{|} C_n \in X_n$. Ainsi de (7) $X_n \vdash Z_n$.

Supposons, au contraire, $B_n \underset{x}{|} C_n \notin Y_n$.

Ainsi $Y_n \neq X_n, B_n \underset{x}{|} C_n$. Donc en vertu de (i) $X_n, B_n \underset{x}{|} C_n \vdash Z_n$

......(8) et en vertu de (ii) $Y_n = X_n, B^x_{na}, C^x_{na}$, ou à ... etc.

De (6), $X_n, B^a_{na}, C^a_{na} \vdash Z_n$. Ainsi par la règle de séquent (D') $X_n \vdash Z_n, B_n \underset{x}{|} C_n$ ......(9). De (8), (9) par la coupe $X_n \vdash Z_n$.

Donc $X_n \vdash Z_n$. Mais ceci contredit la sélection de n. Donc $X* \nvdash Z*$.

Nous avons ainsi achevé l'expansion mentionnée. Nous construisons maintenant une interprétation selon laquelle seuls les membres de $X*$ sont vrais. L'univers du discours est l'ensemble des noms. Chaque nom se dénote lui-même. $(a_1, \ldots, a_n)$ satisfait à un prédicat atomique P dans le seul cas où $Pa_1 \ldots a_n \in X*$. Pour démontrer par la méthode inductive que pour chaque A, A est vrai dans le seul cas où $A \in X*$ il n'y a que deux cas à considérer:

I^er^ Cas Supposons que B|C est vrai. Alors ce n'est pas le cas que: B est vrai et C est vrai. Si B n'est pas vrai, alors en vertu de l'hypothèse inductive, $B \notin X*$. Donc $B \in Z*$. Puisque $\rightarrow B, B|C$ est prouvable, $B|C \notin Z*$. Ainsi, $B|C \in X*$. Pareillement, si C n'est pas vrai, $B|C \in X*$.

Supposons maintenant que $B|C \in X*$. Puisque $B, C, B|C \rightarrow$ est prouvable, alors il n'est pas le cas $B \in X*$ et $C \in X*$. Si $B \notin X*$, alors par l'hypothèse inductive B n'est pas vrai. Donc $B|C$ est vrai. Pareillement, si $C \notin X*$, $B|C$ est vrai.

II^me^ Cas Supposons que $B\underset{x}{|}C$ est vrai. Alors il n'y a pas d'individu a pour lequel il est le cas que B est vrai de a et C est vrai de a; c.à.d., il n'y a pas de nom a pour lequel il est le cas que B_a est vrai et C^x_a est vrai. Donc, par l'hypothèse inductive il n'y a pas de nom a pour lequel il est le cas que $B^x_a \in X*$ et $C^x_a \in X*$. Ainsi par la définition donnée plus haut de l'expansion, $B\underset{x}{|}C \in X*$.

Maintenant, supposons que $B\underset{x}{|}C \in X*$. Puisque $B^x_a, C^x_a, B\underset{x}{|}C \rightarrow$ est prouvable, il n'y a pas de nom a pour lequel il est le cas que: $B^x_a \in X*$ et $C^x_a \in X*$. Donc en vertu de l'hypothèse inductive, il n'y a pas de nom a dont B^x_a est vrai et C^x_a est vrai; c.à.d. il n'y a pas d'individu a pour lequel B est vrai de a et C est vrai de a. Donc $B\underset{x}{|}C$ est vrai.

Laissons maintenant Henkin et Gentzen et tournons-nous à Aristote. Son carré d'opposition est à exprimer ainsi dans notre notation logique:

(A) Tous les A sont des B $\longleftarrow\!\!\!\longrightarrow$ (E) Aucun A n'est B

$Ax\underset{x}{|}(Bx|Bx)$ contraires $Ax\underset{x}{|}Bx$

$(Ax\underset{x}{|}Bx) \mid (Ax\underset{x}{|}Bx)$ sous-contraires $(Ax\underset{x}{|}(Bx|Bx))|(Ax\underset{x}{|}(Bx|Bx))$

(I) Quelques A sont B $\longleftarrow\!\!\!\longrightarrow$ (0) Quelques A sont non-B

C et $C|C$ sont contradictoires; les contraires sont quantifiés, les sous-contraires ont un connecteur pour opérateur dominant.

Pour conversion, il s'agit d'inverser les expressions des deux côtés de la barre quantificationnelle. (A) et (E) sont les formes les plus brèves dans notre notation. Les syllogismes importants AAA et EAE dans la première figure sont:

$$\begin{array}{l} Ax \underset{x}{|} (Bx|Bx) \\ Cx \underset{x}{|} (Ax|Ax) \\ \hline Cx \underset{x}{|} (Bx|Bx) \end{array} \qquad \begin{array}{l} Ax \underset{x}{|} Bx \\ Cx \underset{x}{|} (Ax|Ax) \\ \hline Cx \underset{x}{|} Bx \end{array}$$

et dans notre système de déduction naturelle leurs preuves sont:

$$\dfrac{\dfrac{\wedge}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{Ca} \quad Cx \underset{x}{|} (Ax|Ax) \quad \overset{(1)}{Aa|Aa}}{\wedge}}{Aa}\,(1) \quad Ax \underset{x}{|} (Bx|Bx) \quad \overset{(2)}{Ba|Ba}}{}}}{Cx \underset{x}{|} (Bx|Bx)}\,(2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{Ca} \quad Cx \underset{x}{|} (Ax|Ax) \quad \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{Aa} \quad Ax \underset{x}{|} Bx \quad \overset{(2)}{Ba}}{\wedge}}{Aa|Aa}\,(1)}{\wedge}}{Cx \underset{x}{|} Bx}\,(2)$$

Aucun syllogisme valable ne possède dans notre système de preuve plus brève, et cela offre une justification piquante de l'importance attachée par Aristote aux syllogismes AAA et

EAE dans la première figure. Les syllogismes ayant des preuves aussi courtes se réduisent toujours à AAA ou EAE dans la première figure par la conversion et la substitution.

La barre de Sheffer n'est pas un «quirk» de la logique: elle en est un «quark» ! (*)

University of Edinburgh, Neil TENNANT

(*) Je remercie vivement David Bellos de son travail de traduction.