NON-CONTRADICTION ET EXISTENCE EN MATHEMATIQUE (*)

EVANDRO AGAZZI

Quelques remarques préliminaires sur la notion de vérité mathématique.

Si on considère les différentes façons selon lesquelles le problème de la vérité des propositions mathématiques a été envisagé dans la longue histoire de la pensée mathématique, on doit constater le fait assez curieux d'une admission presqu'unanime, accompagnée toutefois d'une série de justifications assez divergentes présentées pour en fournir le fondement. L'admission générale sur laquelle tout le monde semble tomber d'accord est que la vérité mathématique jouit du privilège d'être «universelle et nécessaire»: une proposition telle que «$2 + 2 = 4$» a toujours été l'exemple paradigmatique d'une vérité pareille, laquelle subsiste indépendamment de toute condition spatio-temporelle, de tout conditionnement psychologique ou sociologique, de toute influence culturelle. Mais, lorsqu'on passe à considérer le sens exact qu'on entend attribuer à cette universalité et nécessité et, encore plus, quand on analyse les différents fondements qu'on propose pour l'expliquer, les divergences et les oppositions se font bientôt très visibles et, comme nous le verrons, mettent directement en cause des questions très profondes concernant le rapport entre la pensée et le réel ou, si l'on préfère, entre la pensée et l'existence des objets auxquels elle peut s'adresser.

Le point de vue plus ancien, et même théoriquement plus spontané, qui a servi comme support de cette confiance dans la vérité universelle et nécessaire des mathématiques, repose sur l'admission d'une ontologie plus ou moins explicite des

(*) Ce texte constitue l'élaboration de deux conférences, tenues au Centre de Logique de l'Université Libre de Bruxelles et chez le Séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

«entités» mathématiques. Selon cette perspective, qu'on aime appeler aujourd'hui «platoniste» et qui trouve en effet chez Platon une de ses codifications les plus explicites et influentes, l'universalité et la nécessité des vérités mathématiques est la pure et simple conséquence du fait que ces vérités concernent certaines entités simples, immatérielles, immuables, douées d'une existence «en soi» et autonome, qu'on peut saisir dans un acte d'intuition intellectuelle parvenant ainsi à en décrire les propriétés plus élémentaires de façon immédiate. La conquête d'autres propriétés plus complexes et cachées est ensuite rendue possible grâce à l'emploi des moyens infaillibles de la rigueur logique. On peut bien dire que cette conception est à la base de la structure axiomatique qu'on a donnée aux mathématiques dès les temps d'Euclide et qu'elle a dominé presqu'incontrastée la culture de l'Occident jusqu'à l'âge moderne.

Mais, quand une philosophie empiriste consciente est dessinée au sein de cette culture, les présuppositions ontologiques qu'on vient de mentionner ont commencé à paraître très discutables et une autre justification a été cherchée pour l'universalité et nécessité des vérités mathématiques. Elle a été conçue comme la conséquence du fait que les mathématiques sont tout simplement une construction humaine et, en tant que telles, elles dérivent d'une sorte de convention universelle plus ou moins tacite: dans la mesure où nous «posons» certaines définitions et propositions primitives, nous nous sentons obligés d'admettre aussi, avec une valeur d'universalité et nécessité, tout ce qui peut être logiquement dérivé à partir de ces points de départ. Mais cela ne correspond pas à un «contenu de vérité» des mathématiques, parce que les propositions mathématiques se présentent comme vraies grâce à une sorte de convention et non par le fait d'exprimer une connaissance vraie à propos de quelque entité réelle. N'ayant pas d'objets propres à elles, les mathématiques ne peuvent pas être conçues comme des systèmes de propositions «vraies» au sens propre de ce terme.

Une position intermédiaire est représentée par la conception selon laquelle les propositions mathématiques sont purement «analytiques». En ce sens, elles sont censées être authentiquement «vraies», mais non parce qu'elles «disent la vérité» à propos d'entités particulières, mais bien comme conséquence de leur forme logique.

Nous ne sommes pas intéressés ici à une reconstruction historique exact et il nous suffira, partant, de mentionner quelques noms en guise de points de repère pour l'identification des positions que nous venons d'esquisser: le premier point de vue, comme nous l'avons dit, peut être envisagé comme le sous-entendu tacite de la tradition mathématique de l'Occident à partir d'Euclide jusqu'au 19ème siècle et, parmi les philosophes, il a été partagé, à l'intérieur de systèmes spéculatifs parfois bien différents, par des penseurs tels que Platon, Descartes et Kant. Comme représentants significatifs du second point de vue on peut bien nommer Vico et Hume, tandis que la conception analytique du savoir mathématique peut être attribuée, par exemple, à Leibniz et Wolff. Si nous préférons retrouver ces positions à l'intérieur des recherches modernes sur les «fondements» des mathématiques, nous pouvons les identifier (toujours laissant hors de considération les questions de détail) chez Dedekind, Kronecker et Cantor pour ce qui concerne le premier point de vue; chez Wittgenstein et Carnap pour le second et chez Frege et Russell pour le troisième.

Nous nous proposons maintenant d'analyser un peu plus en profondeur les traits distinctifs de cette répartition traditionelle, pour en dégager le rôle différent que, en chaque position, joue la «rigueur logique» dans l'établissement de la vérité mathématique. Plus exactement: cette «rigueur logique» est conçue comme l'instrument qui assure aux mathématiques leur «cohérence» interne exceptionnelle (c'est-à-dire leur absence de contradiction) et le problème revient à établir si la vérité mathématique peut être réduite au fait de coïncider ou non avec cette cohérence ou non-contradiction.

Cohérence et vérité des propositions mathématiques

Une première remarque s'impose immédiatemment: les trois positions qu'on vient de mentionner tombent d'accord sur la considération de la cohérence comme condition nécessaire pour la vérité mathématique, parce qu'elles admettent que la vérité d'une théorie mathématique est basée sur l'exactitude des déductions qu'on y emploie et ceci peut être considéré, au sens large, comme l'expression du fait que le principe de non-contradiction (qui constitue la fondation de la notion de cohérence) nous oblige à accepter les théorèmes une fois qu'on a admis les axiomes. Les différences surgissent quand on se demande si la cohérence est aussi une condition suffisante pour la vérité mathématique. Sur ce point, seulement l'école qui conçoit la mathématique comme une science «analytique» (à l'intérieur de la recherche fondationnelle moderne c'est le «logicisme» qui soutient cette position) semble être prête à reconnaître la cohérence comme une condition à la fois nécessaire et suffisante pour la vérité mathématique.

Quant aux deux positions qui restent, la première admet que la source de toute connaissance mathématique est une évidence intuitive et, pour cette raison, la cohérence apparaît comme une condition essentielle, mais non exhaustive de la vérité mathématique. La seconde conception (empiriste), comme on l'a déjà remarqué, ne reconnaît pas aux mathématiques un «contenu de vérité» réel; en conséquence, elle admet que la cohérence, après tout, est l'unique sorte de vérité qu'on puisse rechercher dans cette science. Il s'agit d'une vérité assez pauvre, mais nous ne disposons pas d'autres sources, qui soient d'un caractère spécifiquement mathématique, qui nous assurent une vérité plus riche.

Cette dernière considération nous permet de comprendre en quel sens on peut envisager les «formalistes», par exemple, comme représentants d'une telle attitude «empiriste» vis-à-vis des mathématiques. Il paraît certainement un peu étrange, d'un côté, de les classifier comme tels et, en plus, on pourrait même remarquer que Hilbert, pour nous limiter au représentant le plus connu de cette ligne de pensée mathématique, n'identifiait pas tout court l'existence mathématique avec la non-contradiction. Mais, d'autre part, il faut aussi admettre que pour les formalistes, même si une certaine intuition était admise comme source pratique et heuristique du savoir mathématique, tout ce qui comptait était le fait que cette intuition trouvait une formulation rigoureuse par des système axiomatiques exacts et l'unique condition pour les accepter était en fin de compte leur non-contradiction. En substance, donc, la cohérence se présentait comme la condition radicale de toute vérité mathématique et rien d'autre ne semblait digne d'être cherché audelà de celle-ci.

La distinction qu'on a tracée jusqu'à présent entre les avocats de l'omnipotence de la cohérence et les avocats de la nécessité d'une source supplémentaire pour la vérité mathématique semble se placer sur un terrain un peu vague, parce qu'elle a dû avoir recours à des concepts peu précisés, tels que celui d'une ontologie particulière des entités mathématiques ou celui d'une intuition spéciale qui fonderait la connaissance mathématique. Une possibilité de clarifier de façon essentielle cette discussion traditionnelle dans la philosophie des mathématiques semble nous être offerte par la logique mathématique moderne, qui a mis à notre disposition quelques notions précises pour analyser toute la question. En effet, nous y trouvons des définitions précises pour les notions de cohérence (non-contradiction) et de vérité d'un ensemble de propositions mathématiques et, en plus, des résultats sur les relations réciproques qui subsistent entre les deux.

Les définitions de cohérence et de vérité en logique mathématique

La notion de «consistency» ou cohérence, comme on le sait bien, est définie sur un plan purement syntaxique, à savoir ne faisant recours qu'à l'opération de déduction ou dérivabilité formelle. Même en ce cas-là, il existe la possibilité d'en donner des définitions plus ou moins différentes, mais celle qui se présente pour ainsi dire comme la plus pure ou minimale (et que nous adoptons ici pour nous tenir à un choix déterminé) est celle qu'on indique parfois comme condition de «non triviality» et qui appelle en cause uniquement la notion de dérivabilité. Selon cette définition, on considère comme cohérent (non-contradictoire) un ensemble M de propositions si, et seulement si, il existe au moins une proposition qui ne puisse pas être déduite de M moyennant un calcul logique correct.

Quant à la notion de vérité, elle constitue la base de la sémantique des systèmes formels et elle aussi a reçu une précision très élaborée à partir des travaux bien connus de Tarski, à travers les notions d'univers, d'interprétation et de modèle. Sans entrer ici dans les détails techniques de cette mise au point, qu'on trouve dans tous les manuels, il suffira d'en résumer le sens en disant qu'un ensemble M de propositions est «vrai» à propos d'une structure S d'objets s'il est possible d'établir, suivant des procédés bien connus et exactement codifiés, une certaine correspondance entre les éléments du langage dans lequel M est exprimé et les composantes de la structure S, de sorte que toutes les propositions de M deviennent vraies à propos de S.

Le caractère discriminant entre ces deux concepts est clairement la référence à la structure d'objets S, qui est absente de la définition de cohérence, tandis qu'elle joue un rôle central dans la définition de vérité. Notre problème devient alors celui d'examiner si jamais ces deux caractères, tout en demeurant clairement distincts, ne pourraient pas être substituables l'un à l'autre, au moins en certains cas et à certaines conditions.

Le point de vue traditionnel, que la cohérence est toujours une condition nécessaire et tacitement sous-entendue pour la vérité mathématique, se traduit maintenant dans l'affirmation que tout ensemble M de propositions qui admet un modèle (c'est à dire qui peut être interprété comme vrai à propos d'une structure S quelconque) est toujours cohérent; il s'agit d'un théorème facile et bien connu de la logique mathématique.

La démarche plus significative, et plus difficile, consiste à essayer le chemin inverse, à savoir à démontrer que la cohérence est aussi une condition suffisante pour la vérité. Une affirmation pareille pouvait sembler assez innocente, dans sa formulation un peu vague, et quelqu'un pouvait même la considérer comme une façon acceptable d'exprimer le caractère «abstrait» de la vérité mathématique. Maintenant elle nous présente toute sa portée engageante, lorsque nous la traduisons dans l'affirmation que tout ensemble cohérent de propositions doit posséder un modèle. En effet, cette formulation nous montre la cohérence comme douée d'un certain pouvoir de «crétativité ontologique», qu'on ne saurait pas considérer comme intuitif du tout. Il n'y a plus la possibilité d'échapper à la difficulté en disant que la vérité mathématique est «abstraite», ou quelque chose de pareil, car celle-ci pourrait bien être abstraite, mais elle serait quand même une vérité concernant quelque structure d'«objets» (d'objets «abstraits» peut-être, mais toujours «objets»). Comment la cohérence peut-elle donc posséder une créativité ontologique ? Comment un système de conditions arbitraires, bien que non-contradictoires peut-il garantir qu'il existe dans le monde une structure d'objets à propos desquels il lui arrive d'être vrai ?

Cohérence et analyticité

La conception traditionnelle, selon laquelle les mathématiques constituent une science «analytique», avait trouvé un moyen assez intéressant pour échapper à la difficulté de la créativité ontologique. En effet, l'analyticité était liée à la cohérence de façon très particulière et, précisément, de sorte à avoir la cohérence comme condition suffisante, et non seulement nécessaire, dans le sens suivant: une proposition était classifiée comme analytique si, en premier lieu, elle n'était pas contradictoire (c'est-à-dire si elle était cohérente) et, deuxièmement, si elle ne pouvait pas être niée sans contradiction (c'est-à-dire, si sa négation était incohérente). Par cela, l'analyticité venait à s'identifier avec la nécessité logique et, partant, une proposition analytique jouissait d'une «vérité nécessaire». Il est intéressant de remarquer qu'une telle vérité était encore vaguement conçue comme ayant rapport à des objets et à des structures, mais sans être liée à une indication concrète d'aucune d'elles. En effet, une proposition logiquement vraie était censée être «vraie dans tous les mondes possibles» et cela, tout en ayant l'apparence de rattacher la vérité à une référence à des structures (les «mondes»), l'exemptait en pratique de toute mention d'un monde quelconque. Par cela la cohérence, dans sa forme «forte» selon laquelle elle s'identifie avec l'analyticité, se trouvait pratiquement soulagée de la lourde tâche d'une créativité ontologique.

Ce que nous venons de dire à propos du désengagement ontologique de l'analyticité, trouve sa confirmation dans l'histoire de la logique et de la philosophie: Leibniz, Wolff et Kant lui-même, par exemple, acceptaient comme caractérisations équivalentes de l'analyticité les deux suivantes: (a) un jugement est analytique s'il ne peut pas être nié sans contradiction; (b) un jugement est analytique si son prédicat se trouve déjà contenu dans son sujet. Il est tout-à-fait clair que la deuxième façon de définir l'analyticité implique qu'une proposition analytique n'exprime pas une connaissance véritable, car le fait d'attribuer le prédicat au sujet n'ajoute aucune notion nouvelle qui n'était déjà contenue dans le sujet. Comme tout le monde le sait, c'est exactement pour cette raison que Kant exigeait que toute science (y compris les mathématiques) se réalise à travers des jugements «synthétiques a priori» et non à travers des jugements purement «a priori» ou analytiques.

Les néopositivistes ont introduit la locution à la mode «tautologie» pour indiquer la nature des propositions logiques et mathématiques et celle-ci rappellait clairement l'ancienne façon de concevoir l'analyticité comme quelque chose qui ne pourrait donner aucune connaissance réelle et qui est complètement désengagée sur le plan ontologique. D'autre part, des penseurs comme Frege, qui voulait reconnaître aux mathématiques une nature analytique et en même temps les considérer comme des sciences véritables et capables de donner lieu à une connaissance authentique, se voyaient obligés d'introduire une sorte d'ontologie additionnelle, à savoir cette ontologie minimale qui consistait à admettre l'existence «réelle» des entités logiques, se tournant par cela vers une sorte de platonisme, comme il est bien connu.

Ce n'est pas la tâche de ce papier de discuter les points faibles d'une conception analytique des mathématiques. Nous sommes plutôt intéressé à un examen plus approfondi de celle que nous pourrions appeller la cohérence «faible» ou «simple» (pour la distinguer de la cohérence «forte» ou «double» qui caractérise l'analyticité, où non seulement une proposition doit être cohérente, mais en plus sa négation doit être incohérente). Il faut dire que, en effet, cette cohérence «simple» semble être la plus proche de la considération qu'un mathématicien «au travail» réserve à sa science, car il ne pense pas, en général, qu'un certain système d'axiomes d'une théorie mathématique soit un ensemble de «vérités logiques», mais tout simplement qu'il est un ensemble cohérent de propositions. Ces propositions, n'étant pas conçues comme «logiquement vraies», n'ont pas la prétention de valoir dans «tous les mondes possibles», mais tout au plus dans quelque monde possible. Le problème se précise donc de la façon suivante: une fois donné un ensemble cohérent de propositions, peut-on être sûr qu'il existe au moins un monde possible dans lequel celles-ci sont vraies ? Nous savons que plusieurs mathématiciens ont été et sont de cet avis, y compris certains qui n'inclinaient pas à faire coïncider l'existence mathématique avec la simple cohérence (il suffit de mentionner Poincaré, qui était un pré-intuitionniste sous certains aspects mais qui, d'autre part, inclinait à accepter l'opinion que tout ensemble non-contradictoire de propositions mathématiques admet un modèle).

Cohérence et existence de modèles selon la logique mathématique

Qu'est-ce que nous dit la logique mathématique à propos de tout cela ? Elle nous apprend que, si pour un langage formel quelconque nous pouvons prouver que *tout* ensemble M cohérent de propositions admet un modèle, alors il est possible de formuler dans ce langage un calcul logique qui soit «sémantiquement complet». Ce résultat bien connu nous permet déjà de constater la faiblesse de la position qu'on vient de mentionner, selon laquelle tout ensemble cohérent de propositions mathématiques possède un modèle: si cela était vrai, on devrait en conclure que tous les calculs logiques sont sémantiquement complets, ce qui n'est pas le cas, sauf pour les calculs logiques du premier ordre (y incluant le calcul des propositions). Arrivés à ce point, nous devons admettre que la créativité ontologique de la cohérence peut être envisagée, dans le cas le plus favorable, seulement pour des systèmes de propositions formules dans le langage du premier ordre, tandis qu'elle ne pourrait pas être admise pour des systèmes de propositions qui nécessitent un langage plus riche pour leur formulation.

Cette conclusion est déjà suffisante pour notre problème: nous tâchons de comprendre si l'existence des entités mathématiques peut être considérée comme superflue et substituée par la simple cohérence des systèmes de propositions mathématiques, tout en gardant la notion de vérité qui comporte une référence à des «objets». La chose serait possible si la cohérence pouvait ou bien engendrer elle-même des objets, ou bien si elle pouvait fournir une garantie sur l'existence d'objets appropriés à rendre vraies les propositions cohérentes. Nous voyons maintenant que cette condition pourrait se vérifier, au plus, pour des systèmes particuliers de propositions, en fonction du langage qu'on emploie et cela nous laisse déjà dans le doute, parce qu'on ne voit pas comment l'existence des objets mathématiques pourrait dépendre de la structure et de la richesse du langage qui en parle. Mais nous verrons encore plus clairement la question en passant à l'analyse du cas, dans lequel la logique mathématique semble nous indiquer que la cohérence jouit d'un pouvoir ontologique, c'est-à-dire le cas de la logique du premier ordre. Pour cette logique, nous connaissons un théorème qui nous assure que tout ensemble cohérent de propositions possède un modèle. Nous allons maintenant examiner ce théorème pour voir si vraiment il implique cette créativité ontologique qu'il semble de prime d'abord impliquer.

Examen du théorème sur l'existence du modèle de tout ensemble cohérent de propositions du premier ordre

Le théorème en question remonte essentiellement à L. Henkin (1947) et nous en donnerons ici les lignes fondamentales, suivant un type d'exposition qui nous permettra d'en saisir les traits les plus intéressants. Supposons que nous avons un ensemble cohérent de propositions (c'est-à-dire d'expressions qui ne contiennent pas de variables individuelles libres) formulées dans un langage du premier ordre; nous appelerons A cet ensemble cohérent et supposerons aussi que les déductions à partir de A soient assurées grâce à l'emploi d'un quelconque calcul logique du premier ordre offert dans les traités de logique mathématique. Nous pourrions imaginer, par cela, que A constitue une théorie mathématique formalisée quelconque. La recherche d'un modèle pour A s'articule essentiellement selon une série de démarches qui (indépendamment de l'ordre de succession qui peut bien être varié) se déroulent comme suit.

1. On considère, l'une après l'autre, toutes les propositions $\alpha_1 \dots \alpha_i \dots$ formulables dans le langage de A qui peuvent être ajoutées à A préservant la cohérence: on obtient par cela une série de théories $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots A_i \subseteq \dots \subseteq A_\infty$ qui sont toutes cohérentes et dont chacune est une extension de celle qui la précède (et donc de toutes celles qui la précèdent). Les détails techniques de cette construction se ramènent à une énumération effective des propositions formulables dans le langage de A, qui ne présente pas de difficultés de principe.

2. On élargit le langage de la théorie A_∞ en y ajoutant un ensemble dénombrable de nouvelles constantes individuelles $\{c_1 \dots\dots c_k \dots\dots\}$. On obtent par cela une nouvelle théorie A'_∞ et une théorème syntaxique assez simple nous assure que, si A_∞ était cohérente, A'_∞ l'est aussi.

3. Pour toute proposition existentielle de A_∞, de la forme $\exists x\, \alpha_i(x)$, on formule une nouvelle proposition $\alpha_i(c_i)$ en substituant sans répétition une des constantes «nouvelles» à la place des variables et on ajoute toutes ces nouvelles propositions à

A'_∞, **parvenant ainsi à une nouvelle théorie A^*_1, dont on démon**tre facilement qu'elle est encore cohérente, qu'elle est une extension de A'_∞ et qui, en plus, jouit de la propriété que, pour toute proposition α^* formulable dans son langage, ou bien α^*, ou bien sa négation $\neg\alpha^*$ appartiennent à A^*.

Cette dernière théorie A^* possède certaines propriétés intéressantes:

(a) A^* serait automatiquement un modèle de A aussi;

(b) elle est non seulement cohérente, mais encore «maximale», dans le sens que, pour toute proposition quelconque α^* qui ne lui appartienne pas, on ne pourrait l'ajouter à A^* sans provoquer une contradiction (à savoir, $A^* \cup \{\alpha^*\}$ serait une théorie contradictoire).

(c) on ne peut déduire de A^* aucune proposition qui ne lui appartienne déjà (à savoir: $A^* \vdash \alpha^* \leftrightarrow \alpha^* \in A^*$);

(d) A^* contient aussi toutes les «vérités logiques».

A ce point on aborde le problème de trouver un modèle pour A^* et, pour faire ça, il faut d'abord trouver une structure S sur laquelle on puisse interpréter les propositions de A^*. L'idée, sans doute géniale, qu'on a exploitée est celle de prendre comme S la structure même du langage de A^* et, plus exactement, la structure de ses termes «fermés» (c'est-à-dire des termes de A^* qui ne contiennent pas de variables).

Le «domaine des individus» de S est donc l'ensemble T des termes fermés et on commence à établir que toute constante c_i est interprétée, par l'interprétation I que nous voulons introduire, sur elle-même.

Nous pourrons donc écrire:

(i) $I(c_i) = \overline{c_i}$

Nous écrivons $\overline{c_i}$ pour exprimer visiblement le fait que la constante c_i est considérée, après l'interprétation, comme «objet» et non plus comme élément du langage.

A chaque signe de fonction n-adique f_i nous assignerons comme interprétation une fonction n-adique $I(f_i)$ prenant arguments et valeurs dans T et définie comme suit:

$$\text{(ii)}\quad I(f_i)\,(\overline{t_1} \ldots\ldots \overline{t_n}) = \overline{F_i\,(t_1 \ldots\ldots t_n)}$$

avec le sous-entendu que $t_1 \ldots . t_n$ sont des termes fermés de T.

A tout signe de relation n-adique R_k nous assignerons comme interprétation l'ensemble de n-tuples ordonnés $<t_1 \ldots . t_n>$ contenant tous et seuls les n-uples de termes fermés de T pour lesquels il arrive que la proposition $R_k(t_1 \ldots\ldots t_n)$ appartienne à A*:

$$\text{(iii)}\quad I(R_k) = \{ <\overline{t_1} \ldots\ldots \overline{t_n}> : R_k(t_1 \ldots . t_n) \in A^* \}$$

Une fois ces conventions posées, il est immédiat de constater que toutes les propositions atomiques de A* sont satisfaites grâce à (iii) et on peut démontrer aussi facilement, sur la base de certaines propriétés de A* que nous ne croyons pas nécessaire de mentionner ici, que les propositions non atomiques de A* deviennent aussi «vraies» sur ce domaine d'individus, selon l'interprétation qu'on vient de présenter.

Le théorème que nous avons esquissé ici pour le cas plus simple d'un ensemble A de propositions fermées se laisse généraliser avec de petites complications purement techniques au cas d'un ensemble cohérent d'expressions quelconques du premier ordre et du premier ordre avec identité.

La première fois qu'on rencontre ce théorème dans les traités de logique mathématique, on ne peut pas se passer d'une certaine impression de malaise, laquelle se relie au fait que, pour trouver un modèle pour A, il faut «grimper» jusqu'à cet énorme A*, dont la structure apparaît tellement artificielle et mystérieuse et qui, grâce à sa toute puissance et à ses propriétés privilégiées, peut se permettre d'avoir un modèle qu'il octroie aussi à ce petit A qui s'y trouve noyé dedans. Il vaut donc la peine d'analyser brièvement ces raisons de perplexité, pour distinguer celles qui disparaissent une fois bien comprises les nécessités qu'on doit affronter et celles qui renferment des implications plus profondes.

Une première question peut être la suivante: nous avons trouvé notre modèle, en pratique, en décrétant» grâce à la condition (iii) que toutes les propositions atomiques de A* sont vraies. N'aurait-on pas pu faire la même chose en «décrétant» tout simplement une chose pareille directement pour les propositions atomiques de A ? La réponse doit être négative: notre condition (iii) formule une condition nécessaire et suffisante (comme il le faut) pour la vérité d'une expression prédicative, la faisant coïncider avec l'appartenance d'une telle expression à A^*. Cela signifie que toute proposition atomique n'appartenant pas à A^* est fausse dans notre interprétation; la chose est satisfaisante parce que, comme nous l'avons remarqué, pour toute proposition α^*, ou bien α^* ou bien $\neg\alpha^*$ appartiennent à A^*, l'une étant vraie et l'autre fausse. Mais cela est une conséquence de la «maximalité» de A^* tandis que, dans le cas de A, il pourrait bien arriver que, pour quelque α atomique, soit α soit $\neg\alpha$ n'appartiennent pas à A et par cela nous devrions les déclarer toutes les deux fausses, ce qui ne s'accorde pas avec la fonction sémantique de la négation. Le fait de passer de A à un surensemble A^* maximal est donc justifié.

Un deuxième point qui doit être clarifié est l'introduction de l'ensemble dénombrable de «nouvelles» constantes. Partons de la constatation que l'idée centrale de notre interprétation est d'employer les termes fermés comme «objets» de notre univers et supposons de n'avoir à disposition que le langage de A. Le cas suivant pourrait parfaitement nous servir d'hypothèse: dans A nous avons «épuisé» nos termes $t_1 \dots t_n$ pour interpréter des propositions telles que $\neg Pt_1 \dots \neg Pt_n \dots$ mais nous y avons aussi la proposition (qui n'est pas en contradiction avec celles-ci) $\exists x\, Px$. Pour la rendre «vraie», nous devrions trouver un «exemple» qui la vérifie, mais nous ne disposons plus d'objets pour cela: voilà alors l'utilité d'avoir à notre disposition des termes «nouveaux» qui, introduits dans notre langage, nous permettent d'ajouter à A une proposition «vraie» du type Pc_i et, par cela, de donner effectivement un exemple pour toute proposition existentielle. Cet article aussi est donc justifié.

Venons maintenant au dernier point, à savoir à l'idée de prendre comme domaine d'objets pour y interpréter A^* l'ensemble de ses propres termes fermés. La chose peut sembler un peu étrange, bien qu'elle ait des analogies profondes avec des procédés qu'on adopte parfois dans les mathématiques abstraites, quand on admet comme représentation d'un groupe abstrait, par exemple, les permutations qu'on peut opérer sur un domaine qui a comme éléments les éléments mêmes du groupe qui fonctionnent, pour ainsi dire, comme représentantes de soi-mêmes. La légitimité strictement logique de cette façon de procéder peut être sans doute admise et, même si d'autres raisons devraient nous faire considérer avec une certaine prudence la signification de ce théorème, on ne saurait jamis sous-évaluer l'importance d'un résultat pareil pour la logique du premier ordre. Il faut surtout se rappeler que la «complétude sémantique» de ce calcul se trouve strictement liée à ce résultat et que les langages logiques d'un ordre de complexité supérieur ne possèdent pas le privilège que tout ensemble cohérent d'expressions a un modèle. Mais, cela dit, nous voulons poser une question plus profonde d'ordre philosophique et examiner en quel sens précis nous pouvons considérer avoir obtenu un «modèle» de notre ensemble de propositions.

Analyse du type de modèle trouvé dans le théorème précédent

L'hypothèse sémantique de base, qui nous a permis de trouver une interprétation capable de rendre vraies toutes les propositions de A*, est celle de faire correspondre à chaque terme fermé, comme sa dénotation, ce terme lui-même, considéré comme un des éléments du domaine des individus. Nous pouvons exprimer ceci en disant que notre interprétation a consisté à considérer chaque terme comme le nom métalinguistique de lui-même avec une sorte d'«autoréférence». Quelque chose de tout-à-fait pareil se produit avec l'interprétation des signes de prédicat: un prédicat n-adique P, par exemple, est caractérisé linguistiquement en A* par le fait d'être appliqué à tel ou à tel autre n-uple d'arguments $<t_1 \ldots t_n>$, $<t_i \ldots t_{i+n}>$ ...... $<t_1 \ldots t_{p+r}>$ ... etc. Dans l'interprétation, tout ce qu'on fait est de lui associer comme sa «signification» (en sens extensionnel) exactement l'ensemble de tous les n-uples de termes auxquels il se trouve appliqué en A*. Ici encore on a donc une «autoréférence», dans le sens que le fait qu'un prédicat soit ou non applicable à une certain n-uple d'éléments du domaine ne dépend pas de la constitution d'une possible structure intrinsèque du domaine, mais tout simplement de la constitution de A*. Bien plus, on doit admettre que le domaine, en tant que tel, ne possède aucune structure et qu'il la reçoit de A*, qui l'«induit» ou l'impose à T sur la base de prescriptions exprimées dans les propositions de A*. La même chose se répète telle quelle pour les fonctions.

Une fois cette double «autoréférence» admise, il devient un jeu d'enfants de démontrer que, grâce à cette interprétation, A* est un système de propositions vraies sur une structure à laquelle il a dicté toutes les conditions de structuration possibles.

Ce qui nous rend un peu soupçonneux en face de ce procédé est le fait que les conventions standard qui régissent la théorie sémantique de la «vérité» pour les langages formalisés se trouvent appliquées ici dans une sorte de «cas limite», dont on devrait tout au moins se rendre clairement compte. En effet, le trait distinctif de la définition classique de vérité pour les langages formalisés est l'assignation d'un domaine d'individus qui est distinct du langage qui doit être interprété sur lui. Le langage doit, en quelque sorte, être conduit à «parler à propos» du domaine; ses termes devront «dénoter» les individus du domaine (et pas soi-même) autant que les prédicats devront «dénoter», selon la conception extensionnelle qu'ici on ne met pas encore en question, des ensembles de n-uples ordonnés qu'on suppose préexistants et déjà constitués dans le domaine. Par conséquent, une proposition du langage sera reconnue comme vraie sur le domaine seulement si ce qu'elle affirme «à propos» du domaine se trouve réalisé dans la structure du domaine, laquelle est conçue comme donnée et organisée de façon indépendante du langage qui en parle (pour la bonne raison aussi, qu'une même structure pourrait être «décrite» à travers plusieurs langages différents).

Si nous considérons maintenant la construction du modèle pour A*, nous devons constater que presqu'aucune de ces conditions ne s'y trouve respectée: on y constate au contraire une coïncidence pratique entre le langage et la structure dont il doit parler, grâce à l'expédient ingénieux de la double «auto-référence» qu'on vient de décrire.

Conséquence sur le problème de la créativité ontologique de la cohérence

Si nous voulions exprimer d'une manière un peu ironique, mais très fidèle, le résultat contenu dans le théorème qu'on vient d'examiner, nous pourrions présenter la situation comme suit: dans le cas d'un langage du premier ordre, tout ensemble cohérent de propositions décrit un «monde possible»; on nous demande ensuite: «quel monde possible ?» et la reponse est: «mais le monde décrit par l'ensemble de propositions !». Présentée sous une perspective plus explicitement philosophique, cette situation revient à reconnaître que, même dans le cas du premier ordre, la cohérence n'arrive pas à nous assurer de l'existence d'un domaine d'individus autonome, «ontologiquement donné», à propos duquel les propositions d'un système cohérent arrivent à être vraies; la cohérence n'est donc pas douée de créativité ontologique même dans ce cas privilégié.

Allant plus loin dans l'analyse, nous pouvons facilement remarquer que le type de «vérité» qu'on a effectivement employé dans la démonstration de ce théorème n'a plus rien à faire avec l'idée de vérité comme «correspondance» entre le langage et des structures du réel, qui était plus ou moins implicite dans la définition de vérité donnée par Tarski. Il s'agit plutôt d'un type de vérité qu'on pourrait appeler «vérité par simple cohérence» ou «vérité analytique faible». En effet, si quelqu'un nous demandait: comment pouvez-vous être sûr que, suivant vos conventions pour interpréter les termes et les prédicats, il ne vous arrivera jamais de falsifier des propositions de A* ? Nous répondrions: comment ces propositions pourraient-elles être fausses, du moment qu'elles ne parlent à propos d'aucune structure d'objets indépendante qui puisse les «falsifier» et, d'autre part, qu'elles se trouvent aussi protégées contre l'unique source possible de «falsification linguistique», qui est la contradiction ? On voit donc facilement que la cohérence est en effet l'unique garantie qui nous est offerte pour affirmer la vérité de nos propositions.

Voilà donc la conclusion un peu surprenante à laquelle on est parvenu. Nous avions conçu au premier moment l'idée que, au moins dans le cas de premier ordre, la cohérence nous assurait une vérité sémantique authentique, à savoir l'existence d'un authentique modèle de tout ensemble cohérent de propositions. Nous devons reconnaître que cela n'arrive pas et par conséquent, même dans le cas de premier ordre, la cohérence ne nous assure pas quelque chose de différent d'une vérité analytique qu'il pourrait convenir d'appeller «analyticité faible», pour la distinguer de l'analyticité vraie et propre qui caractérise la «vérité logique» et qui, rappelons-le-nous, comporte en plus que la négation de la proposition en question soit contradictoire.

Un remarque mathématique

On pourrait penser que les objections d'ordre philosophique que nous avons adressées au «modèle» pour les ensembles cohérents de propositions du premier ordre, soient limitées au cas particulier du modèle des termes fermés représenté par la construction de Henkin, car en effet on sait que, par d'autres moyens, on arrive à prouver que tout ensemble cohérent d'expressions du premier ordre possède un modèle dans l'ensemble des nombres naturels et, cette fois-ci, ce domaine se présente comme quelque chose de différent des composantes du langage.

Contrairement à cette première impression, ce fait ne modifie pas la substance de nos considérations. En effet, ce genre d'«autoréférence» qu'on a remarquée dans le cas du modèle des termes ne cesse pas de fonctionner, bien que d'une façon plus cachée, même dans la démonstration de ce théorème apparemment différent. La chose est particulièrement claire si on suit la convention, habituelle, dans la démonstration en question, de substituer des chiffres à la place des variables individuelles dans les expressions du premier ordre. Après cette substitution, il devient très naturel d'associer à tout «chiffre» le «nombre» naturel qu'il désigne usuellement et, par cela, on arrive facilement à construire un modèle dans l'ensemble des nombres naturels. Ici, la distinction entre chiffres et nombres semble assurer l'approche sémantique correcte et éviter toute autoréférence; mais cette impression ne résiste pas à un examen plus approfondi. En effet, quand on arrive au point crucial d'interpréter les prédicats (et, par cela, à attribuer une valeur de vérité aux propositions) on voit encore que tout se passe en référence au langage et non à la structure vraie et propre des nombres naturels: à savoir, on «sélectionne» ou on «impose» la valeur de vérité indépendamment de toute considération «numérique», mais simplement en «manipulant» de façon arbitraire les nombres, les groupant en ensembles et en ensembles de n-uples ordonnés, exactement comme on faisait avec les termes dans le modèle de Henkin, de manière à obtenir par des moyens extensionnels des «propriétés» et des «relations» en accord avec les propositions du langage.

Il est très clair, par cela, qui tout ce qui importe sont les chiffres et non les nombres: nous pourrions convenir d'associer à chaque chiffre un animal, plutôt qu'un nombre naturel, et nous obtiendrions par cela un modèle «zoologique» de notre ensemble de propositions au même titre que nous pouvons prétendre en avoir trouvé un «numérique».

Une confirmation assez simple de tout cela peut être vue dans la considération suivante: si nous prenons l'ensemble de propositions du premier ordre $\{2 + 2 = 5, \ \forall x P(x)\}$, nous avons certainement un ensemble cohérent parce qu'il existe certainement des propositions qu'on ne peut pas déduire de cet ensemble. Conformément à notre théorème, cet ensemble de propositions doit donc posséder un modèle dans le domaine des nombres naturels, mais tout le monde voit que cela peut arriver seulement si les chiffres 2 et 5 ne dénotent pas les nombres naturels qu'ils dénotent usuellement, ou bien si la fonction + est interprétée de façon différente vis-à-vis de la fonction usuelle d'addition, etc. Tout cela signifie que notre modèle ne peut pas être trouvé dans la «structure» des nombres naturels, conçue comme un système indépendent et donné d'«entités», à propos desquelles nous connaissons un certain nombre de «propriétés» dont elles jouissent (y compris $2 + 2 = 4$) et que nous essayons de décrire, par exemple, à travers les axiomes de Peano. Notre modèle, pour être exact, peut plutôt être «construit» à l'intérieur d'un ensemble dénombrable de chose anonymes, que nous pouvons convenir d'appeler par simplicité «nombres naturels», pourvu qu'elles constituent seulement un ensemble non structuré, qui supporte n'importe quelle manipulation qui soit dictée par les conventions nécessaires à satisfaire les propositions qui nous intéressent. Mais reconnaître tout ceci revient à dire que nous «décrétons» que nos propositions sont vraies sur la base pure et simple qu'elles constituent un ensemble cohérent et, après, nous imposons à une réalité fictive toutes les conditions suffisantes pour rendre nos propositions vraies à propos d'elle.

Nous pouvons essayer de donner une image intuitive et un peu trop simplifiée de cette situation. Considérons la proposition du langage ordinaire: «il existe un hippogriffe». Elle n'est pas incohérente en soi-même et nous pourrions essayer d'en trouver un modèle en considérant comme domaine d'individus un ensemble d'objets dans lequel nous plaçons des chevaux, des aigles, des ailes, etc.; nous «mettons ensemble», après, un corps de cheval avec une paire d'ailes d'aigle et nous obtenons un exemple d'hippogriffe, satisfaisant par cela notre proposition. Si quelqu'un nous fait remarquer que nous n'avions pas un animal pareil dans notre domaine, nous pouvons lui répondre que cela est vrai, mais que rien ne nous empêche d'en «construire» un, suivant les instructions cohérentes contenues dans notre proposition. Quelque chose d'essentiellement pareil arrive quand on «construit» un modèle suivant les prescriptions d'un ensemble cohérent de propositions en disposant comme «matériel de construction» de l'ensemble des termes, ou même de l'ensemble des nombres naturels, conçu comme ensemble non structuré d'individus.

Si les considérations qui précèdent sont correctes, nous en devons déduire que la cohérence n'a jamais une créativité ontologique et cela dans un double sens: premièrement, le fait d'avoir un ensemble cohérent de conditions revient tout simplement à avoir un ensemble cohérent de conditions, mais non à posséder une structure indépendante d'objets (que ceux-ci soient concrets ou abstraits) qui constituent la «réalisation» de ces conditions. Cette remarque peut avoir une implication mathématique de quelque importance, comme évaluation de la portée et de la signification mathématique de la méthode formelle et de la tendence formalisatrice elle-même. Beaucoup de mathématiciens semblent incliner aujourd'hui à donner une valeur peut-être excessive aux axiomatisations, à la construction de systèmes formels purs, dont on présuppose la cohérence et dont on peut tirer toute une série de conséquences plus ou moins compliquées et curieuses. Mais quel droit a-t-on d'appeler «mathématiques» ces systèmes ? Leur nature mathématique devrait résulter de leur possibilité de «parler avec vérité» à propos de structures mathématiques déjà données, ou (si on préfère ne pas se mettre sur ce terrain, qui risque de paraître trop engageant du point de vue ontologique) de traiter avec efficacité des «problèmes» mathématiques ouverts et sérieux (où le sérieux serait indiqué par le fait même que ces problèmes ne sont pas posés simplement à l'intérieur du formalisme qui doit les résoudre).

Des savants tels que Jean Dieudonné et René Thom ont justement plaidé contre les abstractions «gratuites» et contre l'axiomatique de théories «insignifiantes et inintéressantes»: les considérations qu'on vient de développer leur donnent raison et montrent les racines logiques qui justifient cette protestation intuitive du mathématicien.

On pourrait ajouter encore d'autres considérations, tirées des résultats de la logique mathématique, qui nous montrent cette divergence entre langage et structure dans les mathématiques. Par exemple, le fait d'avoir une description cohérente d'une structure mathématique donnée ne nous assure pas d'en avoir une description «fidèle». Il suffit pour s'en convaincre de penser au théorème de Gödel sur l'incomplétude sémantique de l'arithmétique, qui nous montre comment aucun système cohérent d'axiomes pour l'arithmétique n'arrive à couvrir toutes les vérités arithmétiques qu'on arrive à découvrir par des moyens métathéoriques. Cela peut correctement être interprété comme le symptôme que ces axiomes ne constituent pas une description fidèle du modèle standard des nombres naturels. En plus, cela nous confirme le manque de créativité ontologique de la cohérence: si un système cohérent d'axiomes était en mesure de «créer» la structure des nombres naturels, il n'y aurait pas de propriété de ces nombres qui ne soit pas déductible des axiomes, mais cela n'arrive pas en effet.

Comme conclusion de nos réflexions nous pouvons poser la question: comment la persuasion que la cohérence possède une sorte le créativité ontologique a-t-elle pu se produire (c'est-à-dire qu'elle est en mesure de produire un modèle véritable d'un système de propositions, au moins en certains cas) ? La réponse semble se relier à la conception extensionnelle qui est à la base de la sémantique traditionnelle. Si, suivant cette conception, on conçoit les propriétés et les relations comme étant tout simplement des ensembles d'individus ou des ensembles d'n-uples d'individus appartenant à un certain domaine, on se trouve relié à une perspective «empirique» et «contingente», dans laquelle on ne saurait pas justifier le fait que ces ensembles sont de quelque façon «fixes» et «donnés». Du point de vue intensionnel, au contraire, nous devons admettre qu'un certain individu «doit» ou «ne doit pas» appartenir à un certain ensemble, suivant le fait qu'il jouit ou qu'il ne jouit pas d'une certaine propriété. Du point de vue extensionnel, au contraire, la possession d'une propriété est la conséquence d'appartenir à un ensemble donné et cela laisse toute liberté de créer de nouveaux ensembles et, par cela même, de nouvelles propriétés. Dans une perspective pareille, le fait de grouper ensemble de façon arbitraire des individus ou des n-uples d'individu apparaît comme parfaitement légitime, parce qu'aucune obligation n'est imposée aux individus et, sous cet angle de vue, nous pouvons bien comprendre comment on peut procéder à construire» un modèle grâce au fait de grouper ensemble des individus quelconques selon les prescriptions contenues dans un ensemble cohérent d'instructions.

Mais maintenant la question capitale se pose: peut-on envisager les théories mathématiques selon une conception extensionnelle pareille ? Il est fort probable que le mathématicien «au travail» ne soit pas prêt à admettre une conception de ce genre, parce qu'il a une «expérience» des entités mathématiques, parce qu'il ne dépend pas de lui de leur attribuer ou nier des propriétés, parce qu'il reconnaît que son type de recherche possède les caractères de la «découverte» à côté de ceux de l'«invention». En d'autres termes, il incline à penser que les nombres naturels, pour nous limiter à l'exemple que nous avons déjà pris, nous apparaissent non comme un ensemble déstructuré d'éléments, mais au contraire avec des propriétés et relations qui les caractérisent et que nous essayons de saisir et exprimer. Et la chose est comme ça, on ne peut pas être sûr qu'un système cohérent de propositions exprime vraiment des vérités mathématiques, sauf si nous n'arrivons aussi à gagner un «aperçu» intuitif sur ces entités un peu mystérieuses dont les mathématiques s'engagent à nous parler. Il est utile de souligner que les considérations et les analyses qu'on vient de présenter dans ce papier ne rencontrent pas de difficulté dans le fait que, employant la méthode de Henkin, il est possible de quelque façon d'étendre le théorème de complétude sémantique aussi bien à la logique du second ordre et même à la théorie des types. Dans des cas pareils, en effet, le caractère pour ainsi dire «artificiel» et «linguistique» du modèle qu'on obtient s'en trouve ultérieurement exalté. Car les univers qu'on utilise sont non-standard, c'est-à-dire tels que, tout en gardant la condition fondamentale que les règles de déduction conduisent à obtenir des propositions qui soient vraies en eux si on part de propositions pareillement vraies, ils ne sont toutefois pas maximaux. En plus, même la conservation du caractère d'extensionalité n'est plus assurée. Sans entrer dans la discussion technique de ces aspects, facilement repérables dans les manuels, il nous suffit de remarquer que les critères qui nous dirigent dans la construction de tels modèles et rendent pour ainsi dire «raisonnable» l'écart vis-à-vis des stipulations sémantiques usuelles, sont dictés exactement par l'exigence d'assurer la correspondence la plus étroite possible (qui, en général, n'arrive même pas à être biunivoque) entre les composants du langage et ceux de l'univers, de nature un fois encore linguistique, sur lequel il est «interprété».