

REFLEXIONS SUR UN SYSTEME DE MATRICES
A HUIT VALEURS PROPOSE PAR
N. D. BELNAP

M. SERGANT

1. Introduction

A. R. Anderson et N. D. Belnap ⁽¹⁾ dévient aux implications présentées dans des systèmes logiques (implication classique, implication stricte et autres implications) le caractère d'implication véritable. Ils cherchent à dégager la notion « naturelle » de déductibilité telle qu'elle apparaît dans les raisonnements familiers et ils considèrent l'*entailment* comme la relation inverse de celle de la déductibilité.

En élaborant leur système E d'*entailment*, ils ont le souci constant d'empêcher que l'on puisse prouver des expressions de forme implicationnelle, dont le conséquent ne pourrait pas être déduit « à partir » de l'antécédent. Ils justifient ce souci par le principe suivant: une expression $P \rightarrow Q$ n'est valide que si P est relevant pour Q. Cette notion informelle de relevance inspire les particularités des règles de la formation intelim E* par lesquelles ils visent à obtenir un théorème dit « de la relevance »: Pour que $P \rightarrow Q$ soit démontrable en logique propositionnelle il est nécessaire que P et Q contiennent au moins une variable commune (*share a variable*).

Ce théorème peut également s'exprimer par: il suffit que $P \rightarrow Q$ soit démontrable dans E, pour que P et Q contiennent au moins une variable commune.

Dans un article intitulé « Entailment and relevance » ⁽²⁾, Belnap prouve ce théorème pour le système propositionnel E complet, en utilisant un système de matrices à huit valeurs, qui satisfait tous les axiomes et toutes les règles du système E. Une expression est dite satisfaite par une matrice lorsque

⁽¹⁾ ANDERSON A. R. et BELNAP N. D., Jr., *The pure calculus of entailment*. — The Journal of Symbolic Logic 27 (1961), p. 19-52.

⁽²⁾ BELNAP N. D.: *Entailment and relevance*, The Journal of Symbolic Logic, 25 (1960), pp. 144-146.

pour toute assignation de valeurs à ses variables élémentaires, cette expression reçoit dans la matrice une valeur désignée.

Etant donné l'intérêt capital des conditions de relevance pour les systèmes de l'*entailment* nous étudierons ces matrices et tenterons d'expliquer la nature de ces fonctions d'évaluation et la diversité des valeurs dont se compose leur domaine.

2. Le système de matrices

Ce système comporte six matrices :

- une pour l'implication
- une pour la négation
- une pour la conjonction
- une pour la disjonction
- une pour la nécessité (N) : cette matrice n'est pas fondamentale mais peut être dérivée de celle de l'implication puisque NP se définit par $(P \rightarrow P) \rightarrow P$.
- une pour la possibilité (M) : cette matrice peut être dérivée à partir de celles de la négation et de la nécessité, puisque MP se définit par $\sim N \sim P$.

3. Conventions de terminologie et remarques générales

3.1 Nous proposons la terminologie suivante:

3.11 Parmi les huit valeurs matricielles, quatre valeurs sont « positives » et quatre valeurs sont « négatives ». Chaque valeur a donc un signe (+ ou —) et un mode. (0, 1, 2, 3)

Deux valeurs de même mode mais de signe différent sont dites « conjuguées ».

Les quatre valeurs positives sont des valeurs « désignées ». Les valeurs positives sont interprétées comme étant des va-

$P \rightarrow Q$

Q \ P	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3
-3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3
-2	-3	+2	-3	+2	-3	-3	+2	+3
-1	-3	-3	+1	+1	-3	+1	-3	+3
-0	-3	-3	-3	+0	-3	-3	-3	+3
+0	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3
+1	-3	-3	-1	-1	-3	+1	-3	+3
+2	-3	-2	-3	-2	-3	-3	+2	+3
+3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	+3

P	$\sim P$	NP	MP
-3	+3	-3	-3
-2	+2	-2	-2
-1	+1	-1	-1
-0	+0	-0	-0
+0	-0	+0	+0
+1	-1	+1	+1
+2	-2	+2	+2
+3	-3	+3	+3

 $P \& Q$

Q \ P	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-2	-2
-1	-3	-3	-1	-1	-3	-1	-3	-1
-0	-3	-2	-1	-0	-3	-1	-2	-0
+0	-3	-3	-3	-3	+0	+0	+0	+0
+1	-3	-3	-1	-1	+0	+1	+0	+1
+2	-3	-2	-3	-2	+0	+0	+2	+2
+3	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3

 $P \vee Q$

Q \ P	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3
-3	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3
-2	-2	-2	-0	-0	+2	+3	+2	+3
-1	-1	-0	-1	-0	+1	+1	+3	+3
-0	-0	-0	-0	-0	+3	+3	+3	+3
+0	+0	+2	+1	+3	+0	+1	+2	+3
+1	+1	+3	+1	+3	+1	+1	+3	+3
+2	+2	+2	+3	+3	+2	+3	+2	+3
+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3

Valeurs désignées : +0, +1, +2, +3.

leurs pour propositions vraies, et les valeurs négatives comme étant des valeurs pour propositions fausses. On ne doit rien préjuger de plus sur la nature de ces valeurs et sur leurs relations.

3.12 Les matrices étant complètes (toutes les cases sont complétées) font de $\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\sim$, N, M, des foncteurs de vérité pour un domaine de huit valeurs possibles.

3.13 Nous écrirons $P = \{-3, \dots, +3\}$ pour exprimer que P est susceptible de prendre chacune des valeurs : -3, -2, -1, -0, +0, +1, +2, +3.

3.14 Nous écrirons (par exemple) $-2 \rightarrow \{-3, \dots, +3\}$

pour signifier une séquence d'implications dans lesquelles une même proposition (P) qui reçoit toujours la valeur -2 , impliquerait une proposition (Q) qui recevrait respectivement pour valeur les valeurs allant de -3 à $+3$.

3.2 Remarques générales sur ces matrices

3.21 En examinant ce système de matrices nous pouvons constater que la conjonction et la disjonction sont des fonctions commutatives respectant les lois de Morgan.

$$\begin{aligned}(P \& Q) &\leftrightarrow (Q \& P) \\ (P \vee Q) &\leftrightarrow (Q \vee P) \\ (P \& Q) &\leftrightarrow \sim (\sim P \vee \sim Q) \\ (P \vee Q) &\leftrightarrow \sim (\sim P \& \sim Q).\end{aligned}$$

Ces équivalences définitionnelles se manifestent selon les matrices, où pour toute assignation de valeurs aux variables les deux expressions prennent les mêmes valeurs.

3.22 La négation d'une proposition s'évalue toujours au moyen de la valeur conjuguée.

3.23 La loi de la contraposition est valable pour l'entailment.

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$$

Cette équivalence résulte de la matrice.

3.24 Dans ce système de matrices les valeurs de mode 1 et 2 sont dites indépendantes ; toute implication, dont l'antécédent a une de ces deux valeurs et dont le conséquent a l'autre valeur, s'évalue par une valeur non-désignée.

Dans sa preuve du théorème dit de la relevance Belnap attribue ces valeurs à des propositions qui ne contiennent aucune variable commune.

Si toutes les variables de P prennent la valeur ± 1 et si tou-

tes celles de Q prennent la valeur ± 2 , P s'évaluera toujours par ± 1 et Q par ± 2 .

Or, d'après la matrice, les implications ($\pm 1 \rightarrow \pm 2$) s'évaluent toujours par -3 .

Donc, si P et Q n'ont pas de variable commune, $P \rightarrow Q$ n'est pas démontrable dans E .

4. *Commentaire de la matrice pour l'implication*

4.1 L'examen de la matrice pour l'implication nous permet de dresser le tableau suivant :

la valeur	implique	est impliquée par
-3	toute valeur	aucune valeur (autre qu'elle-même)
$+3$	aucune valeur (autre qu'elle-même)	toute valeur
-0	aucune valeur (autre que $+3$ et elle-même)	toute valeur négative aucune valeur positive
$+0$	toute valeur positive aucune valeur négative	aucune valeur (autre que -3 et elle-même)
-1 $+1$	aucun 2	aucun 2
-2 $+2$	aucun 1	aucun 1

Nous pouvons constater de plus que

1. toute implication entre une valeur et elle-même s'évalue toujours par la valeur positive correspondant à son mode ;

2. une implication dont l'antécédent a une valeur désignée alors que le conséquent a une valeur non-désignée s'évalue toujours par une valeur non-désignée.

4.2 Règles proposées pour l'évaluation de propositions de forme $P \rightarrow Q$.

4.21 Lorsqu'une valeur n'implique aucune valeur autre qu'elle-même (c.-à-d. $+3$), alors toute implication dont l'antécédent a cette valeur s'évalue par -3 .

4.22 Lorsqu'une valeur n'est impliquée par aucune valeur autre qu'elle-même (c.-à-d. -3) alors toute implication dont le conséquent a cette valeur s'évalue par -3 .

4.23 Lorsqu'une valeur est impliquée par toute valeur ($+3$), alors toute implication dont le conséquent a cette valeur s'évalue par $+3$.

4.24 Lorsqu'une valeur implique toute valeur (-3), alors toute implication dont l'antécédent a cette valeur s'évalue par $+3$.

4.25 L'implication entre une valeur et elle-même s'évalue par la valeur positive de même mode.

4.26 a. Toute implication entre deux valeurs indépendantes, c.-à-d. dont aucune n'implique l'autre (ce sont les valeurs de mode 1 et 2), s'évalue par -3 .

b. Les implications entre une de ces valeurs indépendantes avec signe négatif (comme antécédent) et son conjugué positif (comme conséquent) s'évalue par la valeur indépendante avec signe positif.

4.27 Lorsqu'une valeur n'est impliquée que par des valeurs

négatives (c'est le cas de -0), alors toute implication dont le conséquent a cette valeur prendra pour valeur: si l'antécédent est négatif, la valeur désignée de même mode que l'antécédent,

si l'antécédent est positif, la valeur désignée de même mode que l'antécédent.

4.28 Lorsqu'une valeur n'implique que des valeurs positives (c'est le cas de $+0$), alors toute implication, dont l'antécédent a cette valeur, prendra pour valeur:

si le conséquent est positif, la valeur désignée de même mode que ce conséquent,

si le conséquent est négatif, la valeur non-désignée de même mode que le conséquent.

4.3 Vérification de ces règles en justifiant chacune des évaluations dans la matrice pour $P \rightarrow Q$.

$$+3 \rightarrow \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, +3\} \quad (4.41-4.25)$$

$$-3 \rightarrow \{-3, \dots, +3\} = \{+3, +3, +3, +3, +3, +3, +3, +3\} \quad (4.24-4.25)$$

$$\{-3, \dots, +3\} \rightarrow -3 = \{+3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3\} \quad (4.25-4.22)$$

$$\{-3, \dots, +3\} \rightarrow +3 = \{+3, +3, +3, +3, +3, +3, +3, +3\} \quad (4.23-4.25)$$

$$\pm 2 \rightarrow \pm 1 = -3 \quad (4.26a) \quad \left| \quad -1 \rightarrow +1 = +1 \quad (4.26b) \right.$$

$$\pm 1 \rightarrow \pm 2 = -3 \quad (4.26a) \quad \left| \quad -2 \rightarrow +2 = +2 \quad (4.26b) \right.$$

$$\{-3, \dots, +3\} \rightarrow -0 = \{+3, +2, +1, +0, -0, -1, -2, -3\} \quad (4.27)$$

$$+0 \rightarrow \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -2, -1, -0, +0, +1, +2, +3\} \quad (4.28)$$

$$-0 \rightarrow \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -3, -3, +0, -3, -3, -3, +3\} \quad (4.21-4.25-4.23)$$

$$\{-3, \dots, +3\} \rightarrow +0 = \{+3, -3, -3, -3, +0, -3, -3, -3\} \quad (4.23-4.21-4.25)$$

Les valeurs non-expliquées sont les valeurs prises par l'implication entre une valeur et elle-même. Ces évaluations se justifient par la règle 4.25.

5. Commentaire de la matrice pour la conjonction

5.1 Règles proposées pour l'évaluation des propositions de forme P&Q.

5.10 La conjonction entre deux valeurs dont une d'elles n'est impliquée par aucune autre qu'elle-même ou que -3 , (c.-à-d. -3 et $+0$), s'évalue par -3 dès qu'une des deux valeurs reliées est négative, et par $+0$ si et seulement si les deux valeurs reliées sont positives.

5.11 La conjonction entre deux valeurs dont une d'elles n'implique aucune autre mais est impliquée par toutes les valeurs (c.-à-d. $+3$) prend la valeur de même mode que la valeur à laquelle elle est reliée.

La valeur adoptée sera positive si et seulement si les deux valeurs reliées sont positives.

5.12 La conjonction de deux valeurs dont une d'elles n'implique aucune autre mais est impliquée par certaines autres seulement (et pas par toutes) (c.-à-d. -0), prend la valeur de même mode que la valeur à laquelle elle est reliée par conjonction, à moins que les règles 5.10 et 5.11 ne lui aient déjà attribué une autre valeur.

5.13 a. La conjonction de deux valeurs indépendantes (c.-à-d. de mode 1 et 2), s'évalue par -3 lorsqu'une des valeurs reliées est négative et par $+0$ lorsque les deux valeurs reliées sont positives.

b. La conjonction entre une de ces valeurs indépendantes et son conjugué s'évalue par la valeur ayant même mode et signe négatif.

5.14 La conjonction entre deux valeurs identiques s'évalue par la valeur de même mode. Le signe sera positif si et seulement si les valeurs reliées sont toutes deux positives.

5.2 Vérification de ces règles en justifiant chacune des évaluations dans la matrice pour P&Q.

$$-3 \& \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -3, -3, -3, -3, -3, -3, -3\} \quad (5.10)$$

$$+3 \& \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -2, -1, -0, +0, +1, +2, +3\} \quad (5.11)$$

$$+0 \& \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -3, -3, -3, +0, +0, +0, +0\} \quad (5.10)$$

$$-0 \& \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -2, -1, -0, -3, -1, -2, -0\} \quad (5.12)$$

$$(2 \text{ exceptions justifiées par } 5.10 (+0 \& -0 = -3) \\ 5.11 (+3 \& -0 = -0))$$

$$+1 \& +2 = +0 \quad (5.13a)$$

$$\pm 1 \& -2 = -3 \quad (5.13a)$$

$$\pm 2 \& -1 = -3 \quad (5.13a)$$

$$-2 \& +2 = -2 \quad (5.13b)$$

$$-1 \& +1 = -1 \quad (5.13b)$$

Les valeurs matricielles non-expliquées jusqu'ici sont les valeurs adoptées par la conjonction d'une valeur matricielle avec elle-même.

Ces évaluations se justifient toutes par 5.14.

6. *Commentaire de la matrice pour la disjonction*

6.1. Règles proposées pour les évaluations des propositions de forme PvQ.

6.10. Une disjonction entre deux valeurs dont une valeur n'implique aucune autre que +3, (c.-à-d. +3, -0), s'évalue par +3 lorsqu'au moins une des valeurs reliées est positive, par -0 lorsque les deux valeurs reliées sont négatives.

6.11. Une disjonction entre deux valeurs dont une valeur n'est impliquée par aucune autre (mais qui les implique toutes) (c.-à.-d. -3) prend la valeur de celle à laquelle elle est reliée.

6.12. Une disjonction entre deux valeurs dont une valeur n'est impliquée par aucune autre mais qui en implique certaines (c.-à.-d. $+0$) prend pour valeur la valeur désignée de même mode que celle à laquelle elle est reliée, à moins que les règles 6.10 et 6.11 ne lui aient déjà attribué une autre valeur.

6.13. a. Une disjonction entre deux valeurs indépendantes (c.-à.-d. de mode 1 et 2) s'évalue par $+3$ lorsqu'une des valeurs reliées est positive, par -0 lorsque les deux valeurs reliées sont négatives.

b. Une disjonction entre une de ces valeurs et son conjugué positif ou négatif (si la première valeur est positive) s'évalue par la valeur de même mode et de signe positif.

6.14. Une disjonction entre deux valeurs identiques s'évalue par cette valeur.

6.2. Vérification de ces règles en justifiant chacune des évaluations dans la matrice pour PvQ .

$$-3v \{-3, \dots, +3\} = \{-3, -2, -1, -0, +0, +1, +2, +3\} \quad (6.11)$$

$$+3v \{-3, \dots, +3\} = \{+3, +3, +3, +3, +3, +3, +3, +3\} \quad (6.10)$$

$$-0v \{-3, \dots, +3\} = \{-0, -0, -0, -0, +3, +3, +3, +3\} \quad (6.10)$$

$$+0v \{-3, \dots, +3\} = \{+0, +2, +1, +3, +0, +1, +2, +3\} \quad (6.12)$$

$$(2 \text{ exceptions : } +0 v -3 = +0 \quad (6.11)$$

$$+0 v -0 = +3 \quad (6.10))$$

$$\pm 2 v + 1 = +3 \quad (6.13a)$$

$$\pm 1 v + 2 = +3 \quad (6.13a)$$

$$-1 v -2 = -0 \quad (6.13a)$$

$$-2v + 2 = +2 \quad (6.13b)$$

$$-1v + 1 = +1 \quad (6.13b)$$

Les valeurs des évaluations non expliquées jusqu'ici s'expliquent ou bien par la commutativité du v , ou bien par la règle 6.14.

7. *Nature des valeurs désignées et non-désignées*

A partir de la matrice pour l'implication, nous pouvons énoncer les hypothèses suivantes concernant la nature des valeurs désignées et non-désignées:

7.1 Puisque pour toute assignation de valeurs donnant à Q la valeur -3 , $P \rightarrow Q$ prend une valeur non-désignée, à moins que P lui-même ne s'évalue par -3 , nous pouvons interpréter -3 comme étant la valeur caractéristique d'une fausseté formelle, c.-à.-d. d'une expression toujours fausse, qui ne peut être déduite valablement à partir d'aucun P , qui ne soit lui aussi une fausseté formelle.

7.2. Puisque pour toute assignation de valeurs donnant à P la valeur $+3$, $P \rightarrow Q$ prend une valeur non-désignée, à moins que Q lui-même ne s'évalue par $+3$, nous pouvons interpréter $+3$ comme étant la valeur caractéristique d'une vérité formelle, c.-à.-d. d'une expression toujours vraie, à partir de laquelle on ne peut déduire valablement aucun Q qui ne soit une vérité formelle.

7.3. Puisque pour toute assignation de valeurs donnant à Q la valeur $+0$, $P \rightarrow Q$ prend une valeur non-désignée, à moins que P ne soit ou bien également peu vrai que Q ou bien une fausseté formelle, nous pouvons interpréter $+0$ comme étant la valeur caractéristique d'une vérité contingente, d'un moindre vrai, qui ne peut être impliquée avec vérité par un plus grand vrai, ou par un faux autre que la fausseté formelle.

Par ce caractère, la valeur $+0$ ressemble très fort à la valeur -3 ; toutefois, à la différence de -3 , une proposition s'évaluant $+0$, peut impliquer (avec vérité) d'autres propositions vraies. Cette implication sera d'autant plus vraie que la proposition impliquée est plus vraie.

7.4. Puisque, pour toute assignation de valeurs donnant à P la valeur -0 , $P \rightarrow Q$ prend une valeur non-désignée, à moins que Q ne soit pas moins faux (c.-à.-d. s'évalue également par -0) ou ne soit une vérité formelle (c.-à.-d. s'évalue par $+3$), nous pouvons interpréter -0 comme étant la valeur caractéristique d'une fausseté contingente, d'un moindre faux (que la fausseté formelle), qui ne peut impliquer avec vérité un plus grand faux ou un vrai autre que la vérité formelle. Par ce caractère, la valeur -0 ressemble très fort à la valeur $+3$, mais à la différence de cette dernière, une proposition s'évaluant par -0 peut être impliquée (avec vérité) par d'autres propositions fausses. Cette implication sera d'autant plus vraie que l'antécédent est plus faux.

7.5. A ces hypothèses 7.3 et 7.4, nous croyons pouvoir ajouter que 0 désigne des valeurs de vérité non réservées à des propositions logiquement indépendantes de toute autre, puisque -0 est impliqué par les valeurs négatives et $+0$ implique les valeurs positives.

Cependant, une proposition s'évaluant par -0 est logiquement indépendante de toute proposition vraie, tandis qu'une proposition s'évaluant par $+0$ est logiquement indépendante de toute proposition fausse. (Par deux propositions logiquement indépendantes, nous entendons deux propositions qui ne s'impliquent jamais, et ce dans les deux sens de l'implication).

7.6. Puisque pour toute assignation de valeurs donnant à P une valeur de mode 1 et à Q une valeur de mode 2 (et vice versa), $P \rightarrow Q$ prend une valeur non-désignée, nous pouvons dire que ces valeurs de mode 1 et 2 sont les valeurs à attribuer à des propositions radicalement indépendantes. Toutes les valeurs ($+1$, $+2$, -1 , -2) sont de plus impliquées par

—3, parce qu'elles sont de moindres faux ou vrais. Nous croyons pouvoir dire de plus que :

- a. —0 est un moindre faux que —1 et —2 puisque dans la matrice de $P \rightarrow Q$ il est impliqué (avec vérité) par —1 et —2. Si —0 peut être considéré comme un moindre faux que —1 et —2, c'est sans doute en raison du fait que ceux-ci sont des faux logiquement indépendants.
- b. +0 est un moindre vrai que +1 et +2, puisque dans la matrice de $P \rightarrow Q$, +0 les implique (avec vérité) ; +1 et +2 seraient des vrais logiquement indépendants.
- c. Toutes les évaluations des implications envisagées dans a et b auraient pour mode le mode de la proposition logiquement indépendante reliée, ceci afin de garder la trace du caractère logiquement indépendant de cette proposition complexe, par rapport à l'autre valeur indépendante.
- d. Les notions de «plus vrai» et plus faux» pourront être saisies plus intuitivement dans le diagramme de la lattice Mo (voir 8.2).

8. La lattice intensionnelle Mo

8.1. N. D. Belnap, Jr. présente ⁽³⁾ ce système de matrices comme une lattice intensionnelle complétée et distributive Mo ⁽⁴⁾, se définissant comme suit:

- Mo (le domaine des éléments) = —3, —2, —1, —0, +0, +1, +2, +3
- T (le sous-domaine non-vide et non-total des éléments désignés) = +0, +1, +2, +3.

⁽³⁾ BELNAP N. D. Jr., *Intensional models for first degree formulas*, The Journal of Symbolic Logic, 32 (1967), pp. 1-22.

⁽⁴⁾ Dans cette lattice, l'*entailment* n'est plus un «connecteur», c.-à-d. un opérateur fabriquant un élément de la lattice à partir de deux éléments de la lattice (comme il l'est dans E), mais un «prédicat» binaire défini sur la lattice Mo, c.-à-d. un prédicat fabriquant une «assertion de la théorie» sur deux éléments de la lattice.

— Opérations :

meet : $c \leq (a \wedge b)$ ssi $c \leq a$ et $c \leq b$ (pour tout c)

join : pour tout a, b, c , de Mo ,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

complémentation : $N(+a) = -a$ et $N(-a) = +a$, avec pour postulats :

$$N_1 : NNa = a,$$

$$N_2 : \text{pour tous } a, b \text{ de } Mo : a \leq b \Rightarrow Nb \leq Na.$$

— La relation $\leq$ (réflexive, anti-symétrique et transitive) est définie par les clauses suivantes :

$a \leq b$ si et seulement si

1) ou bien $a = b$,

2) ou bien $a = -3$.

3) ou bien $a = +0$ et b est désigné (est dans T),

4) ou bien $a = -1$ et $b = +1$,

5) ou bien $a = -2$ et $b = +2$,

6) enfin encore si en vertu de 2) ou de 3) $Nb \leq Na$

c.à.d. ou bien si $b = +3$,

ou bien si a n'est pas désigné et $b = -0$.

8.2. Représentation de la lattice Mo au moyen d'un diagramme de Hasse.

Dans ce diagramme les différents éléments de la lattice sont représentés par des points différents.

$a \leq b$ est représenté par une ou des lignes ascendantes reliant a à b .

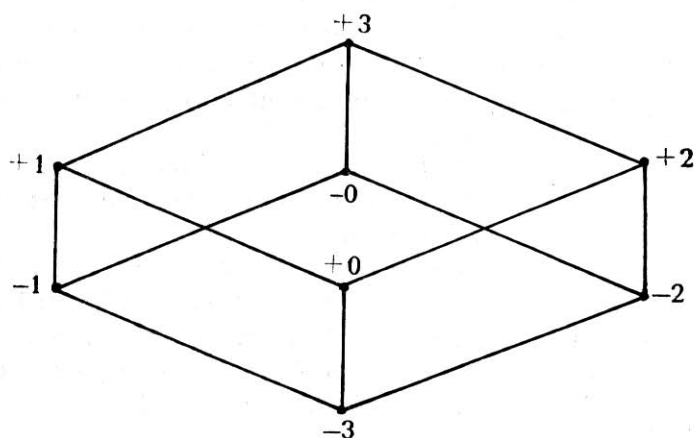
$a \leq a$ n'est pas représenté ; on suppose que chaque point est relié à lui-même par une ligne «extra courte».

Le fait qu'un point a est placé plus bas qu'un point b dans un tel diagramme, ne garantit pas que $a \leq b$. Mais on a $a \leq b$ si et seulement si il existe un chemin de lignes ascendantes partant de a et aboutissant à b .

Le diagramme de Mo est le suivant :

où $N(\pm a) = \pm a$,

et $T = \{+0, +1, +2, +3\}$



Ce diagramme livre le sens de la notion de «plus vrai» et «plus faux».

8.21. Dans ce diagramme on peut lire quand un *entailment* $P \rightarrow Q$ prend une valeur désignée :

$P \rightarrow Q$ a un signe positif si et seulement si dans le diagramme une ligne ascendante partant de P aboutit à Q , c.-à.-d. si et seulement si

1. ou bien $P = Q$ (même valeur, même mode et même signe),
2. ou bien $P = -3$,
3. ou bien $P = +0$ et Q a un signe positif,
4. ou bien $P = -1$ et $Q = +1$,
5. ou bien $P = -2$ et $Q = +2$,
6. ou bien on a déjà que $\sim Q \rightarrow \sim P$ en vertu d'une des clauses qui précèdent.

(D'après 6, $P \rightarrow Q$ a un signe positif :

si $Q = +3$ (par 2),

si P est négatif et $Q = -0$ (par 3))

Ce diagramme permet donc de déterminer le signe d'un *entailment* (mais pas son mode).

8.22. Dans ce diagramme on peut lire le mode et le signe des valeurs prises par la conjonction $P \& Q$ et par la disjonction $P \vee Q$. La valeur prise par $P \& Q$ est la valeur (même mode et même signe) du point situé le plus haut sur le chemin ascendant de lignes reliant ces deux points.

La valeur prise par $P \vee Q$ est la valeur (même mode et même signe) du point situé le plus haut sur le chemin ascendant de lignes reliant ces deux points.

Lorsque les deux valeurs ne sont reliées par aucun chemin de ligne (c'est le cas pour les valeurs $+0$ et -0), alors leur conjonction prend la valeur du point situé le plus bas dans le diagramme (c.à.d. -3). Leur disjonction prend la valeur du point situé le plus haut dans le diagramme (c.à.d. $+3$).

8.23. Pour déterminer le mode d'un *entailment* nous proposons les règles suivantes.

Chacune des règles ne peut être appliquée que si aucune des règles qui la précèdent n'a pu être appliquée.

1. Tout *entailment* dont un des termes a le mode 3 prend le mode 3.
2. Tout *entailment* dont un des termes a le mode 1 et l'autre le mode 2 prend le mode 3.
3. Tout *entailment* dont l'antécédent est de valeur -0 et dont le conséquent est d'un des modes 1 ou 2 prend le mode 3.
4. Tout *entailment* dont l'antécédent est de valeur $+0$ et dont le conséquent est d'un des modes 1 ou 2 prend le mode du conséquent.
5. Tout *entailment* dont le conséquent est de valeur -0 et dont l'antécédent est d'un des modes 1 ou 2 prend le mode de l'antécédent.
6. Tout *entailment* dont le conséquent est de valeur $+0$ et dont l'antécédent est d'une valeur quelconque autre que $+0$ prend toujours le mode 3.
7. Tout *entailment* dont l'antécédent a le même mode que le conséquent conserve ce mode (à l'exception du cas $-0 \rightarrow +0$ déjà réglé par la règle 6).