ALGEBRES DE HEYTING, ALGEBRES DE BROUWER ET ALGEBRES TRIVALENTES DE LUKASIEWICZ

Denise BECCHIO

Introduction: Gr. C. Moisil et son école en Roumanie, A. Monteiro et ses élèves en Argentine ont étudié et développé la théorie des algèbres trivalentes de Lukasiewicz. Nous avons, récemment (1), fait une synthèse de ces divers travaux et exposé quelques résultats personnels sur ce sujet notamment une étude complète des algèbres de Wajsberg et les liens existant entre ces algèbres introduites par A. Monteiro et les algèbres trivalentes de Lukasiewicz introduites par Moisil. Nous allons nous intéresser ici aux rapports susceptibles d'exister entre les algèbres de Heyting et les algèbres trivalentes de Lukasiewicz d'une part et les algèbres de Brouwer et les algèbres trivalentes de Lukasiewicz d'autre part.

Dans (4) Moisil a montré que les algèbres trivalentes de Lukasiewicz sont, en particulier, des algèbres de Heyting en exprimant l'implication intuitionniste au moyen des opérations primitives de l'algèbre. Par dualité, les algèbres trivalentes de Lukasiewicz sont aussi des algèbres de Brouwer. Dans (3) L. Iturrioz a caractérisé les algèbres trivalentes de Lukasiewicz parmi les algèbres de Heyting-Brouwer (8) et en donne ainsi une définition utilisant les deux opérations binaires $\Rightarrow$ et $\dot{-}$ dites implication intuitionniste et pseudo-différence. Nous nous proposons d'abord de séparer les algèbres de Heyting des algèbres de Brouwer, c'est-à-dire de réaliser les deux choses suivantes:

— caractériser les algèbres trivalentes de Lukasiewicz parmi les algèbres de Heyting et en donner ainsi une définition sans utiliser l'opération binaire $\dot{-}$ mais simplement l'opération unaire $\ulcorner$ dite pseudo-complément dual,

— caractériser les algèbres trivalentes de Lukasiewicz parmi les algèbres de Brouwer et en donner ainsi une définition sans utiliser l'opération binaire $\Rightarrow$ mais simplement l'opération unaire $\neg$ dite pseudo-complément.

Nous établirons ensuite l'indépendance des axiomes obtenus.

DEFINITION 1. Dans un travail antérieur (1) nous avons repris les définitions d'une algèbre trivalente de Lukasiewicz données par Varlet dans (10) et (11) afin de résoudre le problème d'indépendance des axiomes posé par Varlet lui-même dans (10). Nous avons ainsi défini une algèbre trivalente de Lukasiewicz de la façon suivante:

Un système $(A, 0, 1, \wedge, \vee, {}^*, {}^+)$ *formé par un ensemble non vide* A, *deux éléments distincts* 0 *et* 1 *de* A, *deux opérations binaires* $\wedge$ *et* $\vee$ *définies sur* A *et deux opérations unaires* * *et* $^+$ *définies sur* A, *est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si les axiomes suivants sont vérifiés:*

V1. $x \wedge (x \vee y) = x$

V2. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

V3. $x \wedge x^* = 0$

V4. $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$

V5. $0^* = 1$

V6. $x \vee x^+ = 1$

V7. $(x \vee y)^+ = x^+ \wedge y^+$

V8. $1^+ = 0$

V9. $x \wedge x^+ \leqslant y \vee y^*$

Rappelons que les axiomes V1 - V8 érigent A en treillis distributif doublement pseudo-complémenté (10).

DEFINITION 2. Nous dirons, par définition, qu'*un système* $(A, 1, 0, \wedge, \vee, \Rightarrow, \sqcap)$ *formé par un ensemble non vide* A, *deux* *éléments distingués* 1 *et* 0 *de* A, *trois opérations binaires* $\wedge$, $\vee$ *et* $\Rightarrow$ *définies sur* A *et une opération unaire* $\ulcorner$ *définie sur* A *est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si les axiomes suivants sont vérifiés:*

A 1. $x \Rightarrow x = 1$

A 2. $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$

A 3. $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

A 4. $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$

A 5. $(x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$

A 6. $0 \wedge x = 0$

A 7. $x \vee \ulcorner x = 1$

A 8. $\ulcorner(x \vee y) = \ulcorner x \wedge \ulcorner y$

A 9. $\ulcorner 1 = 0$

A10. $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow (\ulcorner x \Rightarrow 0)) = 1$

THEOREME. Nous allons démontrer *l'équivalence des définitions* 1 *et* 2.
Soit (A, 1, 0, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sqcap$) une algèbre vérifiant les axiomes A1 - A10. Rappelons d'abord que d'après les cinq axiomes A1 - A5, (A, 1, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) est une algèbre de Hilbert-Bernays (5) et d'après les six axiomes A1 - A6, (A, 1, 0, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) est une algèbre de Heyting (5). (A, 1, 0, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sqcap$) possède donc toutes les propriétés des algèbres de Heyting (2) (7). Nous supposons ces propriétés établies et écrivons simplement celles qui nous serviront par la suite:

P 1. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$

P 2. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

P 3. $1 \wedge x = x$, $1 \vee x = 1$, 1 est le plus grand élément.

P 4. $x \vee 0 = x$, $0 \leqslant x$, 0 est le plus petit élément.

P 5. Si $x \leqslant y$ alors $z \vee x \leqslant z \vee y$

P 6. $x \leqslant y$ est équivalent à $x \Rightarrow y = 1$

P 7. Si $y \leqslant z$ alors $(x \Rightarrow y) \leqslant (x \Rightarrow z)$

P 8. $x \leqslant (y \Rightarrow x)$

P 9. $(x \vee y) \leqslant ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y)$

P10. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x \wedge y) \Rightarrow z = (y \wedge x) \Rightarrow z = y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

En posant $\neg x = x \Rightarrow 0$ nous pouvons alors établir les théorèmes suivants:

T1. $x \wedge \neg x = 0$

1. $x \wedge (x \Rightarrow 0) = x \wedge 0$ — **A3.**
2. $x \wedge \neg x = 0$ — 1.A6.P1

T2. $\ulcorner x \wedge \ulcorner\ulcorner x = 0$

1. $\ulcorner(x \vee \ulcorner x) = \ulcorner 1$ — A7.
2. $\ulcorner x \wedge \ulcorner\ulcorner x = 0$ — 1.A8.A9.

T3. $\ulcorner\ulcorner x \leqslant x$

1. $x \vee (\ulcorner x \wedge \ulcorner\ulcorner x) = (x \vee \ulcorner x) \wedge (x \vee \ulcorner\ulcorner x)$ — P2.
2. $x \vee 0 = 1 \wedge (x \vee \ulcorner\ulcorner x)$ — 1.T2.A7.
3. $x = x \vee \ulcorner\ulcorner x$ — 2.P4.P3.

T4. $\ulcorner x = x \Rightarrow \ulcorner x$

1. $\ulcorner x \leqslant (x \Rightarrow \ulcorner x)$ — P8.
2. $(x \Rightarrow \ulcorner x) \Rightarrow \ulcorner x = 1$ — A7.P9.P3.
3. $(x \Rightarrow \ulcorner x) \leqslant \ulcorner x$ — 2.P6.

T5. $\neg x \leqslant \ulcorner x$

1. $0 \leqslant \ulcorner x$ — P4.
2. $(x \Rightarrow 0) \leqslant (x \Rightarrow \ulcorner x)$ — 1.P7.
3. $\neg x \leqslant \ulcorner x$ — 2.T4.

T6. $\neg\ulcorner x \leqslant x$

1. $\neg\ulcorner x \leqslant \ulcorner\ulcorner x$ — T5.
2. $\ulcorner\ulcorner x \leqslant x$ — 1.T3.

T7. $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$

1. $(y \Rightarrow \neg \ulcorner x) \leqslant (y \Rightarrow x)$ T6.P7.
2. $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow \neg \ulcorner x) \leqslant (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$ 1.P5.
3. $1 \leqslant (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$ 2.A10.
4. (T7) 3.P3.

A. Monteiro (6) a démontré que dans une algèbre de Hilbert-Bernays la condition $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$ est équivalente à

T8. $(x \wedge y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)$

ou à

T9. $x \Rightarrow (y \vee z) = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$

On a alors

T10. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ d'après T8.

T11. $(x \Rightarrow y) \vee (\ulcorner x \Rightarrow \neg y) = 1$

1. $y \Rightarrow (\ulcorner x \Rightarrow 0) = \ulcorner x \Rightarrow (y \Rightarrow 0)$ P10.
2. (T11) 1.A10.

T12. $x \wedge \ulcorner x \leqslant y \vee \neg y$

1. $(x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow \neg y) \vee (\ulcorner x \Rightarrow y) \vee (\ulcorner x \Rightarrow \neg y) = 1$ T11.P3.
2. $(x \Rightarrow (y \vee \neg y)) \vee (\ulcorner x \Rightarrow (y \vee \neg y)) = 1$ 1.T9.
3. $(x \wedge \ulcorner x) \Rightarrow (y \vee \neg y) = 1$ 2.T8.

$(A, 1, 0, \wedge, \vee, \Rightarrow, \ulcorner)$ étant une algèbre de Heyting est en particulier un treillis distributif et par suite d'après Sholander (9) on a les axiomes V1 et V2. De plus en posant $\neg x = x^*$ et $\ulcorner x = x^+$, T1 et V3 sont identiques; T10 et V4 sont identiques; V5 se déduit directement de A1; A7, A8 et A9 sont respectivement identiques à V6, V7 et V8; T12 et V9 sont identiques. Réciproquement, soit $(A, 0, 1, \wedge, \vee, {}^*, {}^+)$ une algèbre vérifiant les axiomes V1 - V9. Dans (4) Moisil a montré que les algèbres trivalentes de Lukasiewicz sont en particulier des algèbres de

Heyting et par suite on a les axiomes A1 - A6 en posant $x \Rightarrow y = (x^* \vee y^{**}) \wedge (x^+ \vee y)$ (12). V6, V7 et V8 sont respectivement identiques à A7, A8 et A9 en posant $x^* = \neg x$ et $x^+ = \ulcorner x$. Il suffit donc de démontrer A10 à partir des axiomes V1 - V9. Pour cela nous établirons au préalable trois égalités:

(i) $x^{***} = x^*$. Cette égalité est vraie dans tout treillis pseudo-complémenté donc à fortiori dans le treillis doublement pseudo-complémenté $(A, 0, 1, \wedge, \vee, {}^*, {}^+)$.

(ii) $y^* \wedge y^+ = y^*$ car $y^* = y^* \wedge 1 = y^* \wedge (y \vee y^+) = (y^* \wedge y) \vee (y^* \wedge y^+) = y^* \wedge y^+$.

(iii) $x^{+*} = x^{++}$. Cette égalité est vraie dans tout treillis distributif doublement pseudo-complémenté vérifiant $x^+ \wedge x^{++} = 0$ donc en particulier dans $(A, 0, 1, \wedge, \vee, {}^*, {}^+)$.

On a alors:

$$
\begin{aligned}
& ((x^* \vee y^{**}) \wedge (x^+ \vee y)) \vee ((y^* \vee x^{+***}) \wedge (y^+ \vee x^{+*})) \\
= \; & ((x^* \vee y^{**}) \wedge (x^+ \vee y)) \vee ((y^* \vee x^+) \wedge (y^+ \vee x^{+*})) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{(i)} \\
= \; & ((x^* \vee y^{**}) \wedge (x^+ \vee y)) \vee ((y^* \wedge y^+) \vee x^{+*}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{distributivité} \\
= \; & ((x^* \vee y^{**}) \wedge (x^+ \vee y)) \vee (y^* \vee x^{+*}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{(ii)} \\
= \; & (x^* \vee y^{**} \vee y^* \vee x^{+*}) \wedge (x^+ \vee y \vee y^* \vee x^{+*}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{distributivité} \\
= \; & (x^* \vee y^{**} \vee y^* \vee x^{+*}) \wedge (x^+ \vee y \vee y^* \vee x^{++}) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{(iii)} \\
= \; & 1 \wedge 1 = 1
\end{aligned}
$$

Les définitions 1 et 2 sont donc bien équivalentes.

INDEPENDANCE DES AXIOMES DE LA DEFINITION 2. Nous avons démontré dans (1) l'indépendance des axiomes V1 - V9, démontrons maintenant l'indépendance des axiomes A1 - A10.

Indépendance de A1:

Soient 1, a et 0 trois éléments distincts .On désigne par T_1 l'ensemble $\{1, a, 0\}$.

Dans T_1 on pose:

$\Rightarrow$	1	a	0
1	1	a	0
a	1	a	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	a	0
1	1	a	0
a	a	a	0
0	0	0	0

$\vee$	1	a	0
1	1	1	1
a	1	1	1
0	1	1	0

	$\ulcorner$
1	0
a	0
0	1

Les axiomes A2 - A10 sont vérifiés dans T_1 alors que l'axiome A1 ne ne l'est pas car $a \Rightarrow a = a \neq 1$.
Indépendance de A2:
Soient 0 et 1 deux éléments distincts. On désigne par T_2 l'ensemble $\{1, 0\}$.

Dans T_2 on pose

$\Rightarrow$	1	0
1	1	1
0	1	1

$\wedge$	1	0
1	1	1
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	1

	$\ulcorner$
1	0
0	0

Les axiomes A1, A3 - A10 sont vérifiés dans T_2 alors que l'axiome A2 ne l'est pas car $(0 \Rightarrow 0) \wedge 0 = 1 \neq 0$.
Indépendance de A3:
Soient 1 et 0 deux éléments distincts. On désigne par T_3 l'ensemble $\{1, 0\}$.

Dans T_3 on pose

$\Rightarrow$	1	0
1	1	1
0	1	1

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

	$\ulcorner$
1	0
0	1

Les axiomes A1, A2, A4 - A10 sont vérifiés dans T_3 alors que l'axiome A3 ne l'est pas car $1 \wedge (1 \Rightarrow 0) = 1 \wedge 1 = 1 \neq 1 \wedge 0$.
Indépendance de A4:
Soient 1, a et 0 trois éléments distincts. On désigne par T_4 l'ensemble $\{1, a, 0\}$.

Dans T_4 on pose

$\Rightarrow$	1	a	0
1	1	a	0
a	1	1	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	a	0
1	1	a	0
a	a	a	a
0	0	0	0

$\vee$	1	a	0
1	1	1	1
a	1	a	a
0	1	a	0

	$\neg$
1	0
a	1
0	1

Les axiomes A1 - A3, A5 - A10 sont vérifiés dans T_4 alors que l'axiome A4 ne l'est pas car $a \Rightarrow (a \wedge 0) = 1$ et $(a \Rightarrow 0) \wedge (a \Rightarrow a) = 0 \wedge 1 = 0 \neq 1$.
Indépendance de A5:
Soient 1, a et 0 trois éléments distincts. On désigne par T_5 l'ensemble $\{1, a, 0\}$.

Dans T_5 on pose

$\Rightarrow$	1	a	0
1	1	a	0
a	1	1	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	a	0
1	1	a	0
a	a	a	0
0	0	0	0

$\vee$	1	a	0
1	1	1	1
a	1	a	0
0	1	a	0

	$\neg$
1	0
a	1
0	1

Les axiomes A1 - A4, A6 - A10 sont vérifiés dans T_5 alors que l'axiome A5 ne l'est pas car $(a \vee 0) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1$ et $(a \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 0) = 0 \wedge 1 = 0 \neq 1$.
Indépendance de A6:
Soient 1, a et 0 trois éléments distincts. On désigne par T_6 l'ensemble $\{1, a, 0\}$.

Dans T_6 on pose

$\Rightarrow$	1	a	0
1	1	a	0
a	1	1	1
0	1	a	1

$\wedge$	1	a	0
1	1	a	0
a	a	a	a
0	0	a	0

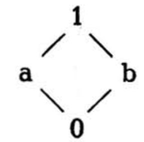
$\vee$	1	a	0
1	1	1	1
a	1	a	0
0	1	0	0

	$\neg$
1	0
a	1
0	1

Les axiomes A1 - A5, A7 - A10 sont vérifiés dans T_6 alors que l'axiome A6 ne l'est pas car $0 \wedge a = a \neq 0$.

Indépendance de A7:

Soit T_7 le treillis distributif dont le diagramme est



Dans T_7 on pose

$\Rightarrow$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	1	1	b	b
b	1	a	1	a
0	1	1	1	1

	$\neg$
1	0
a	0
b	a
0	1

Les axiomes A1 - A6, A8 - A10 sont vérifiés dans T_7 alors que l'axiome A7 ne l'est pas car $a \vee \neg a = a \vee 0 = a \neq 1$.

Indépendance de A8:

Soit T_8 le treillis distributif ayant même diagramme que T_7 et même tableau de définition de $\Rightarrow$ mais dans lequel on pose $\neg 1 = 0$, $\neg a = 1$, $\neg b = a$, $\neg 0 = 1$.
Les axiomes A1 - A7, A9 et A10 sont vérifiés dans T_8 alors que l'axiome A8 ne l'est pas car $\neg(a \vee b) = \neg 1 = 0$ et $\neg a \wedge \neg b = 1 \wedge a = a \neq 0$.

Indépendance de A9:

Soit T_9 le treillis distributif ayant même diagramme et même tableau de définition de $\Rightarrow$ que T_7 mais dans lequel on pose $\neg x = 1$ pour tout x.
Les axiomes A1 - A8, A10 sont vérifiés dans T_9 alors que l'axiome A9 ne l'est pas car $\neg 1 = 1 \neq 0$.
Indépendance de A10:
Soient 1, a, b et 0 quatre éléments distincts. Soit T_{10} la chaîne

$$\begin{array}{c}1\\ |\\ a\\ |\\ b\\ |\\ 0\end{array}$$

dans laquelle on pose

$\Rightarrow$	1	a	b	0
1	1	a	b	0
a	1	1	b	0
b	1	1	1	0
0	1	1	1	1

	$\ulcorner$
1	0
a	1
b	1
0	1

Les axiomes A1 - A9 sont vérifiés dans T_{10} alors que l'axiome A10 ne l'est pas car $(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow (\ulcorner a \Rightarrow 0)) = b \vee (b \Rightarrow 0) = b \vee 0 = b \neq 1$.

DUALISATION DE LA DEFINITION 2. Nous venons de donner une nouvelle définition des algèbres trivalentes de Lukasiewicz à partir des algèbres de Heyting et par dualité nous pouvons également donner une nouvelle définition des algèbres trivalentes de Lukasiewicz à partir des algèbres de Brouwer.

Un système $(A, 1, 0, \wedge, \vee, \dot{-}, \neg)$ *formé par un ensemble non vide* A, *deux éléments* 1 *et* 0 *de* A, *trois opérations binaires* $\wedge$, $\vee$ *et* $\dot{-}$ *définies sur* A *et une opération unaire* $\neg$ *définie sur* A *est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si les axiomes suivants sont vérifiés:*

B 1. $x \dot{-} x = 0$

B 2. $x \vee (x \dot{-} y) = x$

B 3. $(x \dot{-} y) \vee y = x \vee y$

B 4. $(x \vee y) \div z = (y \div z) \vee (x \div z)$

B 5. $x \div (y \wedge z) = (x \div y) \vee (x \div z)$

B 6. $x \vee 1 = 1$

B 7. $x \wedge \neg x = 0$

B 8. $\neg (x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

B 9. $\neg 0 = 1$

B 10. $(x \div y) \wedge ((1 \div \neg y) \div x) = 0$

D'après les cinq axiomes B1 - B5, $(A, 1, 0, \wedge, \vee, \div)$ est une algèbre de Brouwer (5). Les opérations unaires $\ulcorner$ et $\neg$ apparaissent comme duales d'après les axiomes A7, A8, A9 et B7, B8, B9. Pour toutes les démonstrations formelles faites précédemment nous pouvons donc écrire les démonstrations formelles obtenues par dualité. De même à chacun des modèles utilisés pour démontrer l'indépendance des axiomes A1 - A10 on peut associer un modèle dual montrant respectivement l'indépendance des axiomes B1 - B10. Par suite les deux définitions utilisant respectivement les axiomes B1 - B10 et les axiomes V1 - V9 sont équivalentes.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Becchio D. Logique trivalente de Lukasiewicz. Annales Scientifiques de l'Université de Clermont. (à paraître).

(2) Birkhoff G. Lattice Theory. American Mathematical Society. Colloquium Publications. vol. XXV. 3° ed. Providence 1967.

(3) Iturrioz L. Les algèbres de Heyting-Brouwer et de Lukasiewicz trivalentes. Notre Dame Journal of Formal Logic. vol XVII. n° 1. (1976) p. 119-126.

(4) Moisil Gr.C. Les logiques non-chrysippiennes et leurs applications. Acta Philosophica Fennica. vol 16. (1963) p. 137-152.

(5) Monteiro A. Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer. Revista de la Union Matematica Argentina. vol 17. (1955) p. 149-160.

(6) Monteiro A. Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays. Revista de la Union Matematica Argentina. vol. 20. (1962) p. 308-309.

(7) RASIOWA H. and SIKORSKI R. The Mathematics of Metamathematics. Monografie Matematyczne. Tom 41. Warszawa. 1963.
(8) RAUSZER C. Semi-boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations. Fundamenta Mathematicae. vol LXXXIII. (1974) p. 219-249.
(9) SHOLANDER M. Postulates for distributive lattices. Canadian Journal of Mathematics 3. (1951) p. 28-30.
(10) VARLET J.C. Algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. 36ème année. nº 9-10. (1968) p. 399-408.
(11) VARLET J.C. Considérations sur les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. 38ème année. nº 9-10.

Université Claude Bernard - Lyon I Denise Becchio