ALGEBRES DE POST ET DE MOISIL
TRIVALENTES MONADIQUES LIBRES (*)

Luiz Monteiro

1. INTRODUCTION

Un système (L, 1, $\sim$, $\wedge$, $\vee$, ∇) formé par 1°) un ensemble, non vide, L; 2°) un élément 1 de L; 3°) deux opérations unaires, $\sim$, ∇, définies sur A; 4°) deux opérations binaires, $\wedge$, $\vee$, définies sur L, sera dit une algèbre de Lukasiewicz trivalente si les axiomes suivants sont vérifiés (pour tout x,y,z de L): L1) $x \wedge (x \vee y) = x$; L2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$; L3) $\sim \sim x = x$; L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$; L5) $\sim x \vee \nabla x = 1$; L6) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$; L7) $\nabla (x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$. Pour simplifier nous dirons aussi que L est une *algèbre de Lukasiewicz*. Cette notion a été introduite par Gr. C. Moisil [5], Voir aussi [6], [7]. [8], [9], [12].

Dans une algèbre de Lukasiewicz ∇ est *l'opération de possibilité* et *l'opération de nécessité* Δ est définie par $\Delta x = \sim \nabla \sim x$. D'après Moisil [5] pour qu'un élément b de L soit booléen il faut et il suffit que $\nabla b = b$, ou ce qui revient au même $\Delta b = b$. Nous représenterons par B(L) l'ensemble de tous les éléments booléens de l'algèbre de Lukasiewicz L.

Si L a un centre, c'est-à-dire un élément $c \in L$ tel que $\sim c = c$, nous dirons que L est une algèbre de Lukasiewicz centrée et c est appelé le *centre* de l'algèbre L. Si L a un centre il est unique ([5], [6], [13], [14]). Les algèbres de Lukasiewicz (trivalentes) centrées coïncident avec les *algèbres de Post* (d'ordre trois ou trivalentes), voir par exemple [2] et [14].

Les algèbres de Lukasiewicz (trivalentes) axées ont été intro-

(*) Ce travail a été présenté au III Simpósio Latino Americano de Lógica Matemática, réalisé à l'Instituto de Matemática de l'Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, entre le 11 et 17 Juillet, 1976. Un résumé de cet article sera publié dans le Journal of Symbolic Logic.

duites par Gr. C. Moisil ([6], page 88). En accord avec les résultats indiquées dans notre travail [14] une algèbre de Lukasiewicz L est axée s'il existe un élément e de L, appelé *l'axe* de L, tel que 1°) $\Delta e = 0$, 2°) $x = (\Delta x \vee e) \wedge \nabla x$, quel que soit $x \in L$. Si L a un axe il est unique [14]. A. Monteiro [11] a donné à ces algèbres le nom *d'algèbres de Moisil trivalentes*.

Dans notre travail [14], nous avons introduit la notion *d'algèbre de Lukasiewicz (trivalente) monadique*, comme un couple $(A, \exists)$ où A est une algèbre de Lukasiewicz (trivalente) et $\exists$ un opérateur unaire défini sur A, tel que: $\exists 0 = 0$; $x = x \wedge \exists x$; $\exists (x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$; $\exists \nabla x = \nabla \exists x$; $\exists \Delta x = \Delta \exists x$, quels que soient $x, y \in A$. Si A est une algèbre de Post (trivalente) nous dirons que $(A, \exists)$ est une *algèbre de Post monadique* et si A est une algèbre de Lukasiewicz axée nous dirons que $(A, \exists)$ est une *algèbre de Moisil monadique.*

Nous allons déterminer dans ce travail les algèbres de Post et de Moisil monadiques avec un nombre fini n de générateurs libres, en notation PM(n), MM(n).

Nous utiliserons ici la terminologie et les résultats obtenus dans notre travail [14]. Rappelons seulement que les images homomorphes d'une algèbre de Lukasiewicz monadique L sont détérminées, à un isomorphisme près, par les systèmes déductifs monadiques, c'est-à-dire des filtres F de L qui verifient: Si $x \in F$, alors Δx, $\forall x \in F$, où $\forall x = \sim \exists \sim x$. Un système déductif monadique M de L est dit maximal si $M \neq L$ et si F étant un système déductif monadique de L tel que $M \subseteq F$, alors $F = M$ ou $F = L$.

Si L est une algèbre de Post, c le centre de L et h est un homomorphisme de L dans une algèbre de Post, alors h(c) est un centre de h(L).

Il est facile de voir qu'une algèbre de Post monadique A est simple si et seulement si $\exists A = \{0, c, 1\}$, où c est le centre de l'algèbre A.

Si X est un sous-ensemble d'une algèbre de Post monadique A, nous noterons par S(X) (respectivement SP(X)), la sous-algèbre de Post monadique (sous-algèbre de Post) engendrée par X. Si X est fini nous représenterons par N[X] le nombre de d'éléments de X.

Si A est une algèbre de Post monadique simple, et $G \subseteq A$ est tel que $S(G) = A$, alors $SP(G) = A$. Par conséquent si $N[G] = n$, n naturel, A est finie car $N[SP(G)] \leqslant 3^{(3\ )}$.

Il est bien connu que si A est une algèbre de Post finie alors $P \cong T^k$, où T est l'algèbre de Post $\{0, c, 1\}$ et T^k indique le produit cartésien de k algèbres égales à T.

Si M est un système déductif monadique maximal d'une algèbre de Post monadique A, alors l'algèbre quotient A/M est une algèbre de Post monadique simple. Alors si $G \subseteq A$ est tel que $S(G) = A$ et $N[G] = n$, l'algèbre A/M est finie. En effet, si h est l'homomorphisme naturel de A sur l'algèbre simple A/M, $A/M = S(h(G)) = SP(h(G))$ et comme $1 \leqslant N[h(G)] \leqslant n$, $3^1 \leqslant N[A/M] \leqslant 3^{(3\ )}$. En outre, comme A/M est simple $\exists\,(A/M) = \{0, c, 1\}$, où c est le centre de A/M. Nous noterons par $T_k^* = (T^k, \exists)$ l'algèbre de Post monadique où $\exists\, T^k = \{0, c, 1\}$. Alors $A/M \cong T_k^*$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$.

Si A est une algèbre de Lukasiewicz (trivalente) monadique nous avons démontré [14] que A est isomorphe à une sous-algèbre du produit cartésien $P = \prod_{M \in \mathcal{M}} A/M$, où $\mathcal{M}$ est la famille de tous les systèmes déductifs monadiques maximaux de A et que si A est finie, A est isomorphe à P.

2. LES ALGEBRES DE POST TRIVALENTES MONADIQUES AVEC UN NOMBRE FINI DE GENERATEURS LIBRES.

PM(n) est isomorphe à une sous-algèbre S de $P = \prod_{M \in \mathcal{M}} PM(n)/M$, où $\mathcal{M}$ est l'ensemble de tous les systèmes déductifs monadiques maximaux de PM(n). Comme chaque quotient PM(n)/M est un ensemble fini, si on montre que $\mathcal{M}$ est fini, alors P et PM(n) seront finies.

En effet si $M \in \mathcal{M}$, alors $PM(n)/M \cong T^*_k$ $1 \leqslant k \leqslant 3^n$. On peut supposer que T^*_k est une sous-algèbre de $T^* = T^*_{(3^n)}$. Soit G l'ensemble de générateurs libres de PM(n) et $(T^*)^G$ l'ensemble de toutes les applications de G dans T^*. Si $f \in (T^*)^G$, alors comme PM(n) est une algèbre libre, il existe un homomorphisme h_f de PM(n) dans T^* qui prolonge f. Le noyau de $h_f : N(h_f)$ est un système déductif maximal de PM(n). En effet $S = h_f(PM(n))$ est une sous-algèbre de Post monadique de T^* et comme T^* est simple, S est encore simple. Comme $PM(n)/N(h_f) \cong h_f(PM(n))$, alors $PM(n)/N(h_f)$ est simple, donc $N(h_f)$ est un système déductif monadique maximal de PM(n). Nous avons ainsi une fonction de $(T^*)^G$ dans $\mathcal{M}$, définie de la manière suivante: $\varphi(f) = N(h_f)$. Voyons si φ est surjective: étant donnée $M \in \mathcal{M}$, soit h l'homomorphisme naturel de PM(n) sur l'algèbre quotient PM(n)/M, comme PM(n)/M est isomorphe à une sous-algèbre de T^*, h est un homomorphisme de PM(n) dans T^*. Soit f la restriction à l'ensemble $G \subseteq PM(n)$, de la fonction h, alors $f \in (T^*)^G$. Comme PM(n) est une algèbre libre, la fonction f peut être prolongée à un seul homomorphisme h_f de PM(n) dans T^*. Alors h_f et h sont des homomorphismes qui prolongent f, donc $h_f = h$ et par conséquent $N(h_f) = N(h) = M$.

Comme $(T^*)^G$ est fini, alors $\mathcal{M}$ est fini. D'après ce resultat nous pouvons affirmer que PM(n) est finie et par conséquent:

$$PM(n) \cong \prod_{i=1}^{t} PM(n)/M_i, \text{ où } t = N[\mathcal{M}].$$

Si $M \in \mathcal{M}$, alors nous savons que $PM(n)/M \cong T^*_k$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$. Représentons par $\mathcal{M}_k$ l'ensemble $\{M \in \mathcal{M} : PM(n)/M \cong T^*_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$. Alors $\mathcal{M}$ est l'union disjointe des $\mathcal{M}_k$. Nous allons démontrer que chaque $\mathcal{M}_k$ est un ensemble non vide et déterminer $m_k = N[\mathcal{M}_k]$, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$.

Etant donné k, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$, soit Hom* $(PM(n) : T^*_k)$ l'ensemble de tous les épimorphismes monadiques de PM(n) dans T_k^*, et Aut (T_k^*) l'ensemble de tous les automorphismes monadiques de T_k^*. On montre que:

$$N[\mathcal{M}_k] = \frac{N[\mathrm{Hom}^*(PM(n) : T_k^*)]}{N[\mathrm{Aut}\,(T_k^*)]}, \; 1 \leqslant k \leqslant 3^n.$$

Il est facile de voir que si G est un ensemble de générateurs libres de PM(n) et P(n) la sous-algèbre (de Post) de PM(n) engendrée par G, alors G est un ensemble de générateurs libres de l'algèbre de Post P(n).

Soit $\mathrm{Hom}(P(n) : T^k)$ l'ensemble de tous les epimorphismes (de Post) de P(n) dans T^k, alors on montre que:

$$N[\mathrm{Hom}^*(PM(n) : T_k^*)] = N[\mathrm{Hom}(P(n) : T^k], \; 1 \leqslant k \leqslant 3^n.$$

Nous avons démontré [14] que:

$$N[\mathrm{Hom}(P(n) : T^k)] = N[\mathrm{Hom}(B(P(n)) : B(T^k))], \; 1 \leqslant k \leqslant 3^n,$$

où $\mathrm{Hom}(B(P(n)) : B(T^k))$ représente l'ensemble de tous les epimorphismes booléens de B(P(n)) dans $B(T^k)$.

Comme $B(T^k) \cong B^k$, où B^k est une algèbre de Boole avec k atomes, alors (voir [16], [17], [18]):

$$N[\mathcal{M}_k] = \frac{V_{3^n, k}}{k\,!} = \binom{3^n}{k}, \; 1 \leqslant k \leqslant 3^n,$$

donc

$$PM(n) \cong \prod_{i=1}^{3^n} [T_k^*]^{\binom{3^n}{k}}$$, et par conséquent:

$$N[PM(n))] = \prod_{i=1}^{3^n} [3^k]^{\binom{3^n}{k}} = 3^{[3^n \,.\, 2^{(3^n-1)}]}.$$

3. LES ALGEBRES DE MOISIL TRIVALENTES MONADIQUES AVEC UN NOMBRE FINI DE GENERATEURS LIBRES.

Pour déterminer MM(n), nous avons suivi tout d'abord, dans ses lignes générales, la méthode que nous venons d'indiquer pour déterminer PM(n), mais nous indiquerons ici une autre méthode plus brève.

Soit M une algèbre de Moisil, e l'axe de M et représentons par F(x) le filtre engendrée par l'élément $x \in M$. Nous avons montré [14] que: $B = M/F(\sim \nabla e)$ est une algèbre de Boole, $P = M/F(\nabla e)$ est une algèbre de Post et en outre $M \cong B \times P$.

A. Monteiro a montré [11] que si $M = M(\alpha)$ est l'algèbre de Moisil avec α générateurs libres (α étant un nombr ecardinal, $\alpha \geqslant 1$), alors B est isomorphe à l'algèbre de Boole $B(\alpha)$ avec α générateurs libres et P est isomorphe à l'algèbre de Post (trivalente) $P(\alpha)$ avec α générateurs libres.

Nous allons généraliser ce résultat en démontrant un théorème analogue pour les algèbres de Moisil monadiques, à savoir:

Si $MM(\alpha)$ *est l'algèbre de Moisil (trivalente) monadique avec* α *générateurs libres (*α *étant un nombre cardinal,* $\alpha \geqslant 1$*),* $BM(\alpha)$ *l'algèbre de Boole monadique avec* α *générateurs libres,* $PM(\alpha)$ *l'algèbre de Post (trivalente) monadique avec* α *générateurs libres, alors:*

$$MM(\alpha) \cong BM(\alpha) \times PM(\alpha).$$

Si M est une algèbre de Moisil monadique, d'après les résultats que nous avons indiqué dans [14] il est facile de voir que $M/F(\sim \nabla e)$ est une algèbre de Boole monadique et que $M/F(\nabla e)$ est une algèbre de Post monadique, et que M est aussi isomorphe au produit cartésien de ces algèbres. Alors: $MM(\alpha) \cong B^* \times P^*$, où $B^* = MM(\alpha)/F(\sim \nabla e)$ et $P^* = MM(\alpha)/F(\nabla e)$.

Nous avons montré que B^* est isomorphe à l'algèbre de Boole monadique $B = \{x \in MM(\alpha) : x \leqslant \sim \nabla e\}$ et que l'application $h_1(x) = x \wedge \sim \nabla e$, de $MM(\alpha)$ dans B est un epimorphisme. Voyons si sur l'ensemble G des générateurs libres de $MM(\alpha)$, la fonction h_1 est injective. Supposons que g, $g' \in G$ sont tels que $h_1(g) = h_1(g')$, c'est-à-dire: (1) $g \wedge \sim \nabla e = g' \wedge \sim \nabla e$. Soit $B(G_0)$ une algèbre de Boole monadique qui a un ensemble de générateurs libres G_0 avec une puissance cardinale égale à celle de G. Alors il existe une fonction bijective f_0 de G dans G_0. Comme $MM(\alpha)$ est une algèbre libre f_0 peut être prolongée à un homomorphisme h_0 de $MM(\alpha)$ sur $B(G^0)$.
Alors de (1) résulte que $h_0(g \wedge \sim \nabla e) = h_0(g' \wedge \sim \nabla e)$, c'est-à-dire, $h_0(g) \wedge \sim \nabla h_0(e) = h_0(g') \wedge \sim \nabla h_0(e)$. Comme h_0 est un homomorphisme, il transforme l'axe e de $MM(\alpha)$, dans l'axe $e_0 = 0$ de $B(G_0)$, donc: $h_0(g) = h_0(g) \wedge \sim 0 = h_0(g') \wedge \sim 0 = h_0(g')$, et comme sur G, $h_0 = f_0$, on a $f_0(g) = f_0(g')$ et f_0 étant injective alors $g = g'$. Donc h_1 est injective sur G et $G_B = h_1(G)$ a la même puissance cardinale que G. Il est clair que G_B est un ensemble de générateurs de B, voyons si G_B est un ensemble de générateurs libres de B. Pour cela soit A une algèbre de Boole monadique et f une fonction de G_B dans A. Nous allons montrer que f peut être prolongée à un homomorphisme monadique de B dans A. Soit $f' = f \circ h_1$, alors f' est une fonction de G dans A et comme $MM(\alpha)$ est libre, f' peut être prolongée à un homomorphisme (de Moisil) H' de $MM(\alpha)$ dans A. Observons que $N(h_1) \subseteq N(H')$, en effet si $h_1(x) = 1$, c'est-à-dire $x \wedge \sim \nabla e = 1$, donc $H'(x) \wedge \sim \nabla H'(e) = H'(x \wedge \sim \nabla e) = 1$ et comme $H'(e) = 0$, on a $H'(x) = 1$. Alors par un théorème de la théorie des homomorphismes il existe un et un seul homomorphisme de Moisil monadique (donc un homomorphisme monadique) H de B dans A tel que $H \circ h_1 = H'$. Voyons si $H'(g') = f(g')$ pour tout $g' \in G_B$. Soit $g' \in G_B = h_1(G)$, alors il existe $g \in G$ tel que $h_1(g) = g'$, donc $H(g') = H(h_1(g)) = H \circ h_1)(g) = H'(g) = f'(g) = (f \circ h_1)(g) = f(h_1(g)) = f(g')$.

Nous avons ainsi démontré que B est une algèbre de Boole monadique avec un ensemble de générateurs libres de puissance égale á celle de G. D'une façon analogue on peut mon-

trer que P^* est isomorphe a l'algèbre de Post monadique $PM(\alpha)$ avec α générateurs libres. Donc
$MM(\alpha) \cong BM(\alpha) \times PM(\alpha)$.

Dans le cas particulier où $\alpha = n$ est un nombre naturel, nous aurons:

$$MM(n) \cong BM(n) \times PM(n) \cong \prod_{k=1}^{2^n} [B^*_k]^{\binom{2^n}{k}} \times \prod_{k=1}^{3^n} [T^*_k]^{\binom{3^n}{k}} \quad , \text{ où}$$

$B^*_k = (B^k, \exists)$ est l'algèbre de Boole monadique formée par l'algèbre de Boole B^k, avec k atomes et $\exists B^k = \{0, 1\}$. Donc

$$N[MM(n)] = N[BM(n)] \,.\, N[PM(n)] = 2^{[2^n \,.\, 2^{(2^n - 1)}]} \,.\, 3^{[3^n \,.\, 2^{(3^n - 1)}]}.$$

Finalement observons que si nous représentons par $L(n)$, $LM(n)$, les algèbres de Lukasiewicz (trivalentes), Lukasiewicz monadiques, avec n générateurs libres, et si nous posons $b = 2^n$, $p = 3^n$, $b^* = 2^n \,.\, 2^{(2^n - 1)}$, $p^* = 3^n \,.\, 2^{(3^n - 1)}$, on a:

(1) $N[B(n)] = 2^b$; (1') $N[BM(n)] = 2^{b^*}$

(2) $N[P(n)] = 3^p$; (2') $N[PM(n)] = 3^{p^*}$

(3) $N[M(n)] = 2^b \,.\, 3^p$; (3') $N[MM(n))] = 2^{b^*} \,.\, 3^{p^*}$

(4) $N[L(n)] = 2^b \,.\, 3^{p-b}$; (4') $N[LM(n)] = 2^{b^*} \,.\, 3^{p^* - b^*}$.

Les résultats (1) et (2) sont bien connus. Pour (3) et (4) voir [10], [11]. Pour (1') voir [1], [3], et [15]. Pour (4') voir [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (H.). *Finite monadic algebras.* Proc. Am. Math. Soc. 9 Nº 2 (1958), 258-267.

[2] EPSTEIN (G.). *The lattice theory of Post Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 300-317.

[3] HALMOS (P.). *Free monadic algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 10 Nº 2 (1959), 219-227.

[4] HALMOS (P.). *Algebraic Logic.* Chelsea, New York, 1962.

[5] MOISIL (Gr. C.). *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes.* Ann. Sci. Univ. Jassy, 26 (1940), 431-436.

[6] MOISIL (Gr. C). *Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications.* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 12 (1941), 66-90.

[7] MOISIL (Gr. C.). *Sur les idéaux des algèbres Lukasiewicziennes trivalentes.* Analele Universitatii C. I. Parhon. Seria Acta Logica. 3 (1960), 83-95.

[8] MONTEIRO (A.). *Algèbres de Lukasiewicz Trivalentes.* Cours réalisé à l'Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina (1963).

[9] MONTEIRO (A.). *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roum., 7 (55) (1963), 3-12.

[10] MONTEIRO (A.). *Séminaire sur les algèbres de Lukasiewicz Trivalentes.* Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina 1966.

[11] MONTEIRO (A.). *Sur les algèbres de Moisil Trivalentes avec n générateurs libres.* (à paraître).

[12] MONTEIRO (L.). *Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz Trivalentes.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roum, 7(55) (1963), 199-202.

[13] MONTEIRO (L.). *Sur les algèbres de Lukasiewicz Injectives.* Proc. Japan Acad., 41 Nº 7 (1965), 578-581.

[14] MONTEIRO (L.). *Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas.* Notas de Lógica Matemática Nº 32 Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina (1974).

[15] MONTEIRO (L.). *Algèbres de Boole monadiques libres.* (à paraître).

[16] SIKORSKI (R.). *Boolean Algebras.* Berlin, Göttinguen, Heidelberg, 1964.

[17] SIKORSKI (R.). *On the inducing of homomorphisms by mappings.* Fund. Math. 36, (1949), 7-22.

[18] SIKORSKI (R.). *Algebras de Boole.* Notas de Lógica Matemática Nº 4, Univ. Nac, del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1968.

[19] TRACZYK (T.). *Axioms and some properties of Post algebras.* Colloq. Math., 10 (1963), 193-209.

Rodriguez nº 1551
8.000 BAHIA BLANCA
ARGENTINA