

SEMANTIQUES POUR DES SYSTEMES DEONTIQUES INTEGRANT PERMISSION FAIBLE ET PERMISSION FORTE

P. BAILHACHE

Au chapitre II de [2], Jean-Louis Gardies présente un «calcul déontique élémentaire» fort intéressant à plusieurs égards, mais qui nous semble critiquable en quelques points. Nous n'entendons pas ici reprendre les critiques exprimées par M. Kalinowski ⁽¹⁾ que M. Gardies lui-même a pris le soin de commenter ⁽²⁾. Nos considérations sont plus «formelles» et, par là-même d'ailleurs, plus précises et plus radicales. Parmi les reproches que nous adressons donc au système de M. Gardies, le principal est le suivant.

Pour la permission conditionnelle P (*weak permission*), M. Gardies pose notamment les deux axiomes ⁽³⁾:

$$A1 \quad (p \supset q) \supset (Pp \supset Pq)$$

$$A3 \quad \sim Pp \supset P \sim p$$

à partir desquels nous pouvons faire les déductions suivantes:

- | | | |
|----|--|--------------------------------------|
| 1. | $\sim (Pp \supset P \sim q) \supset \sim (p \supset \sim q)$ | [A1, contraposition, $q/\sim q$] |
| 2. | $\sim (Pp \supset \sim Sq) \supset \sim (p \supset \sim q)$ | [1, Déf. S] |
| 3. | $(Pp \cdot Sq) \supset (p \cdot q)$ | [2, calcul des propositions] |
| 4. | $(Pp \cdot Sp) \supset p$ | [3, q/p , $(p \cdot p) \equiv p$] |
| 5. | $Sp \supset Pp$ | [A3, $p/\sim p$, Déf. S] |
| 6. | $Sp \supset (Pp \cdot Sp)$ | [5, calcul des propositions] |
| 7. | $Sp \supset p$ | [4, 6, syllogisme] |

Comme on le sait, cette dernière thèse, qui exprime que «s'il est obligatoire que p, alors p», ne doit pas être admise en logique déontique.

⁽¹⁾ [6].

⁽²⁾ [3].

⁽³⁾ [2], p. 173 et 175.

Cette critique nous conduit à tenter de reconstruire le calcul déontique élémentaire de M. Gardies sur d'autres bases.

La première question que nous nous posons est celle de savoir si nous allons choisir, pour le système de l'obligation inconditionnelle S , outre l'équivalent $Sp \supset \sim S \sim p$ de l'axiome A3 de M. Gardies:

a) ou bien l'axiome $S(p \cdot q) \equiv (Sp \cdot Sq)$ accompagné de la règle d'extensionnalité $\vdash \alpha \equiv \beta \rightarrow \vdash S\alpha \equiv S\beta$;

b) ou bien l'axiome $S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$ accompagné de la règle $\vdash \alpha \rightarrow \vdash S\alpha$.

Divers auteurs, on le sait, ont opté pour la première possibilité ⁽⁴⁾ et d'autres pour la seconde ⁽⁵⁾. Or, à partir de b) on prouve aisément a) ⁽⁶⁾, mais comme le rapporte Prior dans sa *Formal logic* ⁽⁷⁾, Hintikka a montré que, en logique modale, la règle $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \Box \alpha$ est dérivable de l'axiome $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$ accompagné de la règle $\vdash \alpha \equiv \beta \rightarrow \vdash \Diamond \alpha \equiv \Diamond \beta$ à la condition de leur ajouter l'axiome $\sim \forall p \Diamond p$. Il est facile d'en déduire ici que pour dériver b) de a), il faut ajouter à ce dernier l'axiome $\exists p Sp$ ⁽⁸⁾. Ceci peut du reste être rapidement montré par un raisonnement informel, comme suit. Partant de l'axiome de a), nous déduisons la thèse:

$$S(p \cdot q) \supset (Sp \cdot Sq)$$

soit, en substituant α , thèse, à q et en tenant compte de $(p \cdot \alpha) \equiv p$ et de la règle d'extensionnalité:

$$Sp \supset (Sp \cdot S\alpha)$$

et donc:

$$Sp \supset S\alpha$$

⁽⁴⁾ Par exemple M. von WRIGHT in [11] et [12], et, pratiquement, M. GARDIES lui-même in [2].

⁽⁵⁾ Par exemple HANSON in [4]. La première possibilité offre l'avantage de permettre l'exclusion de formules comme SSp , ce que M. von WRIGHT appelle les *higher order expressions*.

⁽⁶⁾ Par exemple [5], pp. 33-34, où il suffit de remplacer partout l'opérateur de la nécessité par celui de l'obligation.

⁽⁷⁾ [9], p. 222.

⁽⁸⁾ *ibid.*

S'il y a une proposition p_1 rendant Sp_1 thèse, alors la dernière implication entraîne que $S\alpha$ est également thèse.

Quant à la déduction de l'axiome $S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$ à partir de a), elle peut être faite sans aucune condition supplémentaire. ⁽⁹⁾

Le fragment b) est donc légèrement plus «fort» que le fragment a). Cependant, comme l'axiome $\exists p Sp$ ne nous semble pas exprimer une exigence excessive mais plutôt traduire une condition de «bonne santé» du système (nous assurant que lorsque nous parlons d'obligation nous ne manipulons pas un concept-fantôme), et plus encore parce que le fragment b) permet d'introduire un type d'analyse sémantique clair et commode, devenu d'usage courant en logique modale, nous choisissons ce fragment axiomatique de préférence au premier.

Pour ce qui est des foncteurs déontiques «ordinaires», nous voulons dire ceux qui correspondent à l'obligation inconditionnelle, nous adoptons ainsi le système classique suivant, incluant le calcul propositionnel en son entier:

— terme indéfini

Sp : «il est inconditionnellement obligatoire que p »

— termes définis

$Lp = S \sim p$: «il est inconditionnellement interdit que p »

$Pp = \sim S \sim p$: «il est conditionnellement permis que p »

$Wp = \sim Sp$: «il est conditionnellement facultatif que p »

$Mp = (\sim S \sim p . \sim Sp)$: «il est conditionnellement bilatéralement permis que p »

— axiomes

$S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$

$Sp \supset \sim S \sim p$

⁽⁹⁾ Cf. de même [5], p. 124, où le même remplacement que celui de la note ⁽⁸⁾ est à faire.

— règle

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash S\alpha$$

Hanson [4] appelle ce système le système D — notation que nous reprendrons — et donne une sémantique (inspirée de celles de Kripke ⁽¹⁰⁾), dont nous parlerons plus loin.

Etudions maintenant le cas des foncteurs déontiques «non ordinaires», c'est-à-dire ceux que M. Gardies, à la suite de M. von Wright [12], fait correspondre à la permission inconditionnelle. En notant P' ce foncteur, M. Gardies lui assigne de vérifier la thèse ⁽¹¹⁾:

$$T' \text{ 401 } P'(p \vee q) \equiv (P'p \cdot P'q)$$

que nous prendrons comme formule de base sans chercher à la mettre en doute ⁽¹²⁾. Dès lors, la définition du facultatif inconditionnel $W'p = P' \sim p$ nous permet d'écrire:

1. $W' \sim (p \vee q) \equiv (W' \sim p \cdot W' \sim q)$ [T' 401, Déf. W']
2. $W' (\sim p \cdot \sim q) \equiv (W' \sim p \cdot W' \sim q)$ [1, loi de De Morgan]
3. $W'(p \cdot q) \equiv (W'p \cdot W'q)$ [2, $p/\sim p, q/\sim q$]

La thèse que nous obtenons pour W' est donc formellement semblable à la thèse $S(p \cdot q) \equiv (Sp \cdot Sq)$ valable dans le système D. Alors, pour les raisons invoquées plus haut, nous nous voyons conduits à poser l'axiome et la règle:

$$\begin{aligned} W'(p \supset q) &\supset (W'p \supset W'q) \\ \vdash \alpha &\rightarrow \vdash W'\alpha \end{aligned}$$

ce choix impliquant que nous admettons qu'il existe au moins une proposition inconditionnellement facultative. ⁽¹³⁾

⁽¹⁰⁾ [7].

⁽¹¹⁾ [2], p. 180.

⁽¹²⁾ Les formulations réduites des foncteurs déontiques, que nous donnons plus loin et qui nous paraissent traduire de façon intéressante les intuitions déontiques fondamentales, représentent une autre voie qui conduit à cette formule.

⁽¹³⁾ Ou, ce qui revient au même, au moins une proposition inconditionnellement permise.

Le système axiomatique à envisager contient donc, outre le calcul propositionnel en son entier:

— terme indéfini

$W'p$: «il est inconditionnellement facultatif que p »

— termes définis

$P'p = W' \sim p$: «il est inconditionnellement permis que p »

$L'p = \sim W' \sim p$: «il est conditionnellement interdit que p »

$S'p = \sim W'p$: «il est conditionnellement obligatoire que p »

$M'p = (W' \sim p . W'p)$: «il est inconditionnellement bilatéralement permis que p »

— axiome

$W'(p \supset q) \supset (W'p \supset W'q)$

— règle

$\vdash \alpha \rightarrow \vdash W'\alpha$

Formellement, ce système axiomatique est semblable au système F (fondamental) de Hanson ⁽¹⁴⁾. Pour le distinguer de ce dernier, qui, lui, porte sur l'obligatoire S, nous l'appellerons le système F'.

Étudions maintenant la contrepartie sémantique de F'. Pour F, rappelons en quelques mots comment se définit la sémantique ⁽¹⁵⁾. Elle est constituée d'un ensemble de F-modèles, chacun de ceux-ci étant un triplet ordonné $\langle W, R, V \rangle$ dans lequel W représente un ensemble de «mondes» w_i , R une relation binaire non réflexive définie dans W, et V un assignement de valeurs (1 et 0 pour le vrai et le faux) répondant aux règles habituelles valables pour les foncteurs propositionnels et à la règle suivante pour l'opérateur S: $V(S\alpha, w_i) = 1$ ssi, pour tout w_j tel que $w_i R w_j$, $V(\alpha, w_j) = 1$.

⁽¹⁴⁾ [4], p. 178.

⁽¹⁵⁾ Ici, nous nous écartons légèrement de la conception de HANSON pour nous rapprocher de celle, plus commode selon nous, de HUGHES et CRESSWELL, [5], pp. 71 et ss., en particulier, nous n'introduisons pas le monde réel G de HANSON. Toutes les notations que nous utilisons sont issues de [5].

On définit la validité en posant qu'une formule est F-valide ssi il lui est assigné 1 dans tout F-modèle.

Intuitivement, puisque l'obligatoire c'est ce que l'on imagine comme réalisé dans tout monde déontiquement (= moralement ou juridiquement) bien fait (indiquant ce que l'on peut ou doit faire), « $w_i R w_j$ » doit être lue «les gens du monde w_i perçoivent le monde w_j comme bon».

Notons avec Hanson [4] que la supposition de l'existence pour tout w_i d'un w_j tel que $w_i R w_j$ revient à poser l'axiome supplémentaire $Sp \supset \sim S \sim p$, transformant le système F en système D. Cet axiome, comme on le sait, exprime l'implication du permis (conditionnel) par l'obligatoire (inconditionnel).

Semblablement, nous définissons un F'-modèle comme un triplet ordonné $\langle W', R', V' \rangle$ dans lequel W' (différent bien sûr du foncteur représenté par le même symbole) est un ensemble de «mondes» w'_i , R' une relation binaire non réflexive définie dans W' , et V' un assignement de valeurs (1 et 0) répondant aux règles habituelles et à la règle suivante pour l'opérateur du facultatif inconditionnel W' :

$$V(W'\alpha, w'_i) = 1 \text{ ssi, pour tout } w'_j \text{ tel que } w'_i R' w'_j, V(\alpha, w'_j) = 1.$$

Une formule est F'-valide ssi il lui est assigné 1 dans tout F'-modèle.

Intuitivement, puisque l'inconditionnellement facultatif c'est ce que l'on imagine comme réalisé dans tout monde déontiquement mal fait (indiquant ce que l'on peut ou doit ne pas faire), « $w'_i R' w'_j$ » doit être lue «les gens du monde w'_i perçoivent le monde w'_j comme mauvais».

Là aussi, notons que la supposition de l'existence pour tout w'_i d'un w'_j tel que $w'_i R' w'_j$ revient à poser l'axiome supplémentaire $W'p \supset \sim W' \sim p$, transformant le système F' en système D'. Cet axiome, compte tenu des définitions, équivaut à la formule $W'p \supset Lp$ signifiant «s'il est inconditionnellement facultatif que p, alors il est conditionnellement interdit que p»,

formule qui ne doit sans doute son allure paradoxale qu'au fait que le facultatif est plus souvent compris comme conditionnel qu'inconditionnel, et l'interdit comme inconditionnel que conditionnel. Car, à cela près, elle veut dire que si p est réalisé en tout monde «contre-modèle» mauvais, alors p est réalisé dans au moins un tel monde (et ainsi doit être interdit, à la condition de se restreindre à la loi dictée par ce seul monde).

Au reste, dans le simple système F' , en ce qui concerne l'opérateur M' de la permission bilatérale inconditionnelle, nous pouvons déduire une thèse fort intéressante:

1. $(p \cdot \sim p) \supset (q \cdot \sim q)$ [calcul des propositions]
2. $W'[(p \cdot \sim p) \supset (q \cdot \sim q)]$ [1, règle $\vdash \alpha \rightarrow \vdash W'\alpha$]
3. $W'(p \cdot \sim p) \supset W'(q \cdot \sim q)$ [axiome $W'(p \supset q) \supset (W'p \supset W'q)$, $p/p \cdot \sim p$, $q/q \cdot \sim q$; 2, Détachement]
4. $(W'p \cdot W' \sim p) \supset (W'q \cdot W' \sim q)$ [thèse $W'(p \cdot q) \equiv (W'p \cdot W'q)$]
5. $M'p \supset M'q$ [4, Déf. M']

Ainsi, puisque, dans cette dernière thèse, p et q sont des variables propositionnelles, si, dans le système F' , une seule proposition est inconditionnellement bilatéralement permise, alors tout est inconditionnellement bilatéralement permis et donc rien n'est conditionnellement obligatoire ou conditionnellement interdit. Cette dernière éventualité nous paraissant particulièrement contraire à la rationalité juridique ou morale ordinaire, nous nous voyons conduit à écarter celle où il existerait une seule proposition inconditionnellement bilatéralement permise, c'est-à-dire conduit à admettre la thèse $\sim M'p$. Mais précisément, celle-ci n'est rien d'autre que l'axiome propre du système D' :

1. $\sim M'p$
2. $\sim (W'p \cdot W' \sim p)$ [1, Déf. M']
3. $\sim W'p \vee \sim W' \sim p$ [2, loi de De Morgan]
4. $W'p \supset \sim W' \sim p$

Le système D' nous paraît donc mieux capter le sens intuitif

ordinaire, autant que faire se peut, du concept de la permission inconditionnelle que le système F'.

Mais reste à voir à présent comment le système F' (ou D') et le système D de l'obligation inconditionnelle peuvent être rapprochés et fondus en un seul système, et si cette fusion n'introduit pas de nouvelles difficultés d'interprétation.

Les relations attendues entre les deux systèmes sont en tout premier lieu des relations d'implication entre les opérateurs inconditionnels et conditionnels de même nom. Il faut donc examiner si nous pouvons poser comme axiome $Sp \supset S'p$ ⁽¹⁶⁾ (formule de laquelle découlent $P'p \supset Pp$, $Lp \supset L'p$, $W'p \supset Wp$). Transcrite à l'aide de l'opérateur primitif W' , cette implication s'écrit:

$$Sp \supset \sim W'p$$

Mais tout de suite, les deux règles «d'obligation» et de «facultation» ⁽¹⁷⁾

$$\begin{aligned} \vdash \alpha &\rightarrow \vdash S\alpha \\ \vdash \alpha &\rightarrow \vdash W'\alpha \end{aligned}$$

nous conduisent à une inconsistance:

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash S\alpha \rightarrow \vdash \sim W'\alpha$$

A partir de n'importe quelle thèse α on pourrait déduire à la fois $W'\alpha$ et $\sim W'\alpha$.

Ce résultat déconcertant pourrait nous suggérer d'interdire la substitution de propositions thèses à la place des arguments des opérateurs déontiques. De fait, nous verrons plus loin que, sans en venir à une solution aussi tranchée, il est possible d'établir une relation entre Sp et $S'p$ dans laquelle intervient en outre la supposition que p est contingente.

L'impossibilité de poser $Sp \supset S'p$ comme axiome entraîne celle de poser de même $Sp \supset P'p$ ⁽¹⁸⁾. Car nous avons vu plus

⁽¹⁶⁾ C'est la thèse T'' 201 de M. GARDIES, [2], p. 181.

⁽¹⁷⁾ Nous proposons ces termes que, bien sûr, nous calquons sur le mot "nécessitation".

⁽¹⁸⁾ C'est la thèse T'' 101 de M. GARDIES, [2], p. 180.

haut que si l'on veut construire un système reflétant la structure de la rationalité déontique ordinaire, il est nécessaire d'admettre l'axiome $W'p \supset \sim W' \sim p$, qui a pour équivalent $P'p \supset S'p$. Alors, de $Sp \supset P'p$ et $P'p \supset S'p$, nous conclurons $Sp \supset S'p$ qui, nous venons de le voir, rend le système inconsistent.

Et quand bien même n'admettrions-nous pas $P'p \supset S'p$, il nous serait toujours possible à partir de $Sp \supset P'p$, de faire les déductions suivantes conduisant à la thèse $W'p$ exprimant que tout est inconditionnellement facultatif, ce qui serait inadmissible:

- | | |
|---|---|
| 1. α | |
| 2. $\sim \alpha \supset p$ | [1, calcul des propositions] |
| 3. $W'(\sim \alpha \supset p)$ | [2, règle de «facultation»] |
| 4. $W'(\sim \alpha \supset p) \supset (W' \sim \alpha \supset W'p)$ | [axiome $W'(p \supset q) \supset (W'p \supset W'q)$, $p/\sim \alpha$, q/p] |
| 5. $W' \sim \alpha \supset W'p$ | [3, 4, Détachement] |
| 6. $S\alpha$ | [1, règle d'«obligation»] |
| 7. $W' \sim \alpha$ | [6, axiome $Sp \supset W' \sim p$, p/α , Dét.] |
| 8. $W'p$ | [5, 7, Détachement] |

En revanche, des formules aussi choquantes intuitivement que $Sp \supset L'p$, $Sp \supset W'p$, $W'p \supset Sp$ pourraient être admises comme axiomes, ce que nous montrerons plus loin. Mais faire ceci serait à peu près aussi fâcheux que de poser en logique modale l'axiome $p \supset \Box p$ qui, on le sait, entraîne l'anéantissement du concept même de modalité.

Abordons la question par une autre voie. Soit X l'opérateur propositionnel qui par définition fait passer de p à $p \cdot Sp \cdot W'p$:

$$Xp = (p \cdot Sp \cdot W'p)$$

Si α est thèse, alors $S\alpha$ et $W'\alpha$ le sont aussi et donc:

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash X\alpha$$

D'autre part, de toute évidence, nous avons la thèse:

$$Xp \supset p$$

Et enfin, de $S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$,

$$W'(p \supset q) \supset (W'p \supset W'q),$$

$$(p \supset q) \supset (p \supset q)$$

nous pouvons déduire à l'aide du seul calcul propositionnel:

$$[(p \supset q) \cdot S(p \supset q) \cdot W'(p \supset q)] \supset$$

$$[(p \cdot Sp \cdot W'p) \supset (q \cdot Sq \cdot W'q)]$$

soit:

$$X(p \supset q) \supset (Xp \supset Xq)$$

Ainsi, l'opérateur X vérifie les propriétés caractéristiques de la nécessité $\Box$ dans le système T ⁽¹⁹⁾ et ceci nous suggère de poser la définition:

$$\Box p = (p \cdot Sp \cdot W'p)$$

Quels attendus intuitifs et sémantiques contient cette définition? Elle exprime d'une part que s'il est réalisé en tout monde que p , alors il l'est dans le monde réel, dans les mondes-modèles bons et dans les mondes-contre-modèles mauvais [$\Box p \supset (p \cdot Sp \cdot W'p)$]; elle impose d'autre part qu'il suffit qu'il soit réalisé que p dans le monde réel et dans ces deux dernières catégories de mondes pour qu'il le soit dans tous les mondes [$(p \cdot Sp \cdot W'p) \supset \Box p$], autrement dit qu'il n'existe pas d'autre monde que le réel, les bons et les mauvais. A vrai dire, la première implication n'apporte qu'une information très faible: celle que le monde réel et les mondes bons et mauvais sont bien des mondes; il est tout à fait nécessaire de la poser si l'on veut relier la sémantique du système D à celle du système F' ou D' . A l'inverse, la seconde paraît moins essentielle et c'est elle qui, si on la pose, relie étroitement le système D au système F' ou D' . De l'implication $(p \cdot Sp \cdot W'p) \supset \Box p$, nous tirons aussitôt cette autre, équivalente:

$$(Sp \cdot p \cdot \sim \Box p) \supset S'p$$

⁽¹⁹⁾ Cf. par exemple [5], p. 31.

C'est là une formule qui, comme nous l'avions annoncé, «sauve» en quelque sorte l'implication fautive $Sp \supset S'p$. Elle signifie que, à la condition qu'il soit réalisé de façon contingente que p , s'il est inconditionnellement obligatoire que p , alors il est conditionnellement obligatoire que p . On dira que nous n'énonçons là qu'une simple tautologie puisqu'en posant une condition à l'obligation inconditionnelle nous la rendons conditionnelle: mais la condition « $p \cdot \sim \Box p$ » n'est pas de ce type de conditions qui sont comprises implicitement dans l'opérateur S' de l'obligation conditionnelle; elle possède un degré de généralité plus élevé, elle porte sur des ensembles de mondes et non sur tel monde en particulier. Nous serions tenté d'avancer que l'exclusion des propositions nécessaires dans l'implication de $S'p$ par Sp signifie que l'obligation résultant de la nécessité n'est qu'un cas dégénéré de la rationalité déontique où le libre arbitre ne s'applique pas. ⁽²⁰⁾

Nous sommes en mesure à présent de rassembler nos deux systèmes D et F' (ou D et D') en un unique système DF' (ou DD').

LES SYSTEMES DF' ET DD'

Outre le calcul propositionnel en son entier, les deux systèmes contiennent:

— termes indéfinis

Sp et $W'p$

— termes définis

$Lp = S \sim p$, $Pp = \sim S \sim p$, $Wp = \sim Sp$,

$Mp = (\sim S \sim p \cdot \sim Sp)$, $P'p = W' \sim p$,

$L'p = \sim W' \sim p$, $S'p = \sim W'p$, $M'p =$

$(W' \sim p \cdot W'p)$, $\Box p = (p \cdot Sp \cdot W'p)$

— axiomes

$S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$

$Sp \supset \sim S \sim p$

⁽²⁰⁾ Cf. en note (31) une explication semblable que nous donnons pour la formule un peu plus "forte" $(Sp \cdot W'p) \supset \Box p$

$$W'(p \supset q) \supset (W'p \supset W'q)$$

— règles

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash S\alpha$$

$$\vdash \alpha \rightarrow \vdash W'\alpha$$

Seul le système DD' contient l'axiome supplémentaire:

$$W'p \supset \sim W' \sim p$$

Consistance

La consistance de ces systèmes se prouve immédiatement par la méthode de la «PC-transformation»⁽²¹⁾. Les PC-transformées des axiomes de DD' (et donc de DF') sont toutes thèses du calcul des propositions, tandis que les PC-transformées des règles établissent bien une correspondance uniquement entre des thèses du calcul des propositions.

De plus, une formule contraire à l'intuition comme $Sp \supset L'p$, ayant pour PC-transformée $p \supset p$, ne rend pas nos systèmes inconsistants. Sans entraîner leur «collapse» général, elle produit néanmoins leur effondrement sémantique (comme en logique modale, plus gravement, la formule $p \supset \Box p$). Notons du reste que, puisqu'elle s'écrit $Sp \supset \sim W' \sim p$, elle est liée à l'existence d'au moins un monde à la fois bon et mauvais⁽²²⁾, ce qui ruine la valeur de modèle déontique d'un tel monde. De façon analogue, $Sp \supset W'p$, sans impliquer l'inconsistance, signifie que tout monde bon est mauvais — hypothèse également ruineuse sémantiquement. Etc.

Validité dans DF' et DD'

Nous définissons un DF'-modèle comme un quadruplet ordonné $\langle W, R, R', V \rangle$ dans lequel W représente un ensemble de «mondes» w_i , R et R' sont deux relations binaires non réflexives définies dans W , telles que quels que soient w_i, w_j appar-

⁽²¹⁾ [5], pp. 41-42.

⁽²²⁾ Pour être plus précis, il faudrait dire que pour tout w_i il existerait un monde w_j tel que $w_i R w_j$ et $w_i R' w_j$.

tenant à W si $w_i R w_j$ alors non $w_i R' w_j$, et V un assignement de valeurs (1 et 0) répondant aux règles habituelles pour le calcul propositionnel et, en outre, aux règles suivantes pour S et W' :

$V(S\alpha, w_i) = 1$ ssi, pour tout w_j tel que $w_i R w_j$, $V(\alpha, w_j) = 1$

$V(W'\alpha, w_i) = 1$ ssi, pour tout w_j tel que $w_i R' w_j$, $V(\alpha, w_j) = 1$

Dans DF' il est requis que pour tout w_i il existe au moins un w_j tel que $w_i R w_j$. Dans DD' il est requis *en outre* que pour tout w_i il existe au moins un w_j tel que $w_i R' w_j$.

Une formule α est DF' -valide (ou DD' -valide) ssi pour tout DF' -modèle (ou DD' -modèle) et pour tout w_i , $V(\alpha, w_i) = 1$.

Notons qu'un DF' -modèle (ou DD' -modèle) se distingue de la simple réunion d'un D -modèle et d'un F' -modèle (ou d'un D -modèle et d'un D' -modèle). Dans cette réunion en effet, il y aurait deux ensembles de mondes totalement distincts W et W' , alors que dans un DF' -modèle (ou DD' -modèle) tous les mondes appartiennent au même ensemble W . Comme conséquence importante, s'il est exclu qu'un même monde soit perçu à la fois comme bon et mauvais par un même autre monde, il ne l'est pas en revanche qu'il le soit par deux mondes différents: vérité en deçà des Pyrénées, erreur au delà. Mais dans des systèmes plus forts où les relations R et R' seraient symétriques et «quasi-transitives» (étant exclu qu'elles soient réflexives), cela ne serait pas.

Procédure de décision

Nous décalquons notre procédure sur celle qu'emploient Hughes et Cresswell en [5] ⁽²³⁾. Notons tout de suite qu'il serait possible d'établir un calcul par «rectangles» dans lequel tous les opérateurs S, L, P, W, M, W', P' , etc. seraient conservés ⁽²⁴⁾. Mais nous préférons pour la simplicité de l'exposé supposer que seuls figurent les deux opérateurs primitifs S et W' et que tous les autres ont été transcrits à l'aide de leurs définitions à partir de ceux-ci.

Dès lors, comme pour le système T , nous avons à donner

⁽²³⁾ pp. 82 et ss.

⁽²⁴⁾ Comme il est fait en [5] pour les modalités "nécessaire" et "possible".

trois règles: I. Règle pour le placement des astérisques; II. Règles pour un nouveau monde; III. Règles pour les cas multiples ⁽²⁵⁾.

I. Règle pour le placement des astérisques

Un astérisque est placé *au dessus* de chaque S et de chaque W' qui ont un 1 au dessous d'eux. Un astérisque est placé *au dessous* de chaque S et de chaque W' qui ont un 0 au dessous d'eux.

II. Règles pour un nouveau monde

A. Si dans un monde w_i figure une formule $S\alpha$ avec un astérisque au dessus de S, alors en tout monde bon accessible à w_i (monde noté w_{jG} ⁽²⁶⁾ et distinct de w_i lui-même) à α doit être assigné 1.

B. Si dans un monde w_i figure une formule $W'\alpha$ avec un astérisque au dessus de W', alors en tout monde mauvais accessible à w_i (monde noté w_{jB} et distinct de w_i lui-même) à α doit être assigné 1.

C. Si dans un monde w_i figure une formule $S\alpha$ avec un astérisque au dessous de S, alors il doit y avoir un monde bon accessible à w_i (pas w_i lui-même) dans lequel à α est assigné 0.

C'. Si dans un monde w_i ne figure pas de formule $S\alpha$ avec un astérisque au dessous de S, mais une formule $S\alpha$ avec un astérisque au dessus de S, alors il doit y avoir un monde bon accessible à w_i (pas w_i lui-même) dans lequel à α est assigné 1.

D. Si dans un monde w_i figure une formule $W'\alpha$ avec un astérisque au dessous de W', alors il doit y avoir un monde mauvais accessible à w_i (pas w_i lui-même) dans lequel à α est assigné 0.

⁽²⁵⁾ [5], p. 86 et p. 94.

⁽²⁶⁾ La notation w_{jG} signifie que $w_i R w_{jG}$ est vrai. Puisqu'il n'est pas exclu qu'un monde w_j soit accessible comme bon pour un monde donné et comme mauvais pour un autre, les notations w_{jG} et w_{kB} peuvent se trouver dans un même diagramme.

Et seulement pour le système DD' :

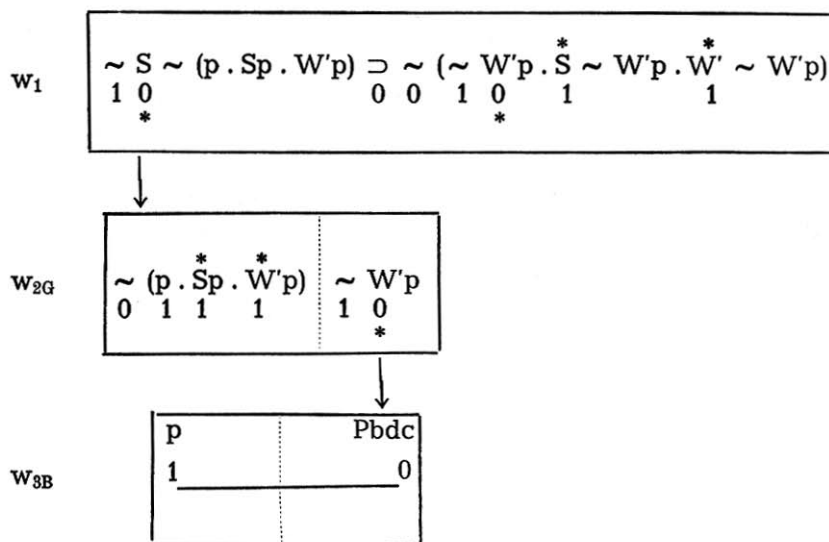
D'. Si dans un monde w_i ne figure pas de formule $W'\alpha$ avec un astérisque au dessous de W' , mais une formule $W'\alpha$ avec un astérisque au dessus de W' , alors il doit y avoir un monde mauvais accessible à w_i (pas w_i lui-même) dans lequel α est assigné 1.

III. Règle pour les cas multiples: inchangée par rapport à [5], p. 94.

Définitions d'un système complet de DF' - ou DD' -diagrammes pour α et d'un rectangle inconsistant: semblables à celles données dans T.

Exemple

Soit à tester la formule $P \Box p \supset \Diamond W'p$ qui se lit «S'il est conditionnellement permis que p nécessairement, alors il est possible qu'il soit inconditionnellement facultatif que p ». Nous l'écrivons en notation primitive et calculons:



Comme nous n'avons pas fait usage de la règle II.D', cette formule, qui conduit à un rectangle inconsistant, est valide dans le système DF' (et donc aussi dans DD').

Qu'une telle méthode fournisse bien une procédure de décision est suffisamment clair. Toutes choses égales d'ailleurs, il en va comme pour le système modal T⁽²⁷⁾. Au degré modal d'un rectangle dans T nous faisons correspondre ici le *degré déontique d'un rectangle* dans DF' ou DD': ce degré sera nul dans les derniers rectangles du diagramme.

Complétude

Comme dans le cas d'un système modal, nous allons montrer que DF' et DD' sont « faiblement » complets: c'est-à-dire que toute formule DF'-(ou DD')-valide est une thèse du système axiomatique DF' (ou DD'). Notre preuve, elle aussi, est décalquée sur la preuve de complétude pour T donnée par Hughes et Cresswell. Nous supposons qu'on a sous les yeux cette preuve-ci et qu'on l'a déjà étudiée⁽²⁸⁾.

Nous reprenons les quatre lemmes utilisés en [5]. Seul est profondément changé le lemme 2. Le lemme 4, relatif aux cas multiples est totalement inchangé. Le lemme 1, fondé sur le lemme 3, est également totalement inchangé. En revanche, pour le lemme 3 (p. 98) l'énoncé n'est pas modifié, mais la démonstration ne requiert plus l'introduction des $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ car l'opérateur $\Box$ ne figure pas dans nos formules et $S\gamma \supset \gamma$, $W'\gamma \supset \gamma$ ne sont pas thèses. Le lemme 3 se réduit donc seulement à ceci que si à β de w_j est assignée la valeur 0 (ou 1), alors $\beta \supset w'_j$ (ou $\sim \beta \supset w'_j$) est thèse du calcul des propositions, et donc

de DF' ou de DD'. Enfin, pour le lemme 2 l'énoncé n'est pas modifié, mais la preuve est différente: c'est ce que nous allons exposer maintenant.

D'après nos « règles pour un nouveau monde », une flèche

⁽²⁷⁾ [5], pp. 95-96.

⁽²⁸⁾ [5], pp. 96-104.

peut avoir été tirée d'un rectangle w_i vers un rectangle w_j dans quatre cas: ceux qui correspondent aux quatre dernières règles C, C', D, D'.

1er cas (règle C)

Les formules initiales de w_{jG} sont les suivantes:

a) un ensemble de formules $\beta_1, \dots, \beta_k$ à chacune desquelles est assigné 1 dans w_{jG} et telles qu'à $S\beta_1, \dots, S\beta_k$ est assigné 1 dans w_i ($k \geq 0$);

b) une formule γ à laquelle est assigné 0 dans w_{jG} et telle qu'à $S\gamma$ est assigné 0 dans w_i .

Dans ce premier cas, la démonstration est tout à fait analogue à celle de [5] (p. 100) à ceci près que l'opérateur de la nécessité doit partout être remplacé par S.

2ème cas (règle C')

Les formules initiales de w_{jG} sont seulement un ensemble de formules $\beta_1, \dots, \beta_k$ à chacune desquelles est assigné 1 dans w_{jG} et telles qu'à $S\beta_1, \dots, S\beta_k$ est assigné 1 dans w_i ($k > 0$).

Alors: $\vdash_{DD'} w'_{jG} \text{ (}^{29}\text{) avec } w'_{jG} = \sim\beta_1 \vee \dots \vee \sim\beta_k$

Par la règle d'«obligation»:

$$\vdash_{DD'} S(\sim\beta_1 \vee \dots \vee \sim\beta_k)$$

Par Déf. $\supset$:

$$\vdash_{DD'} S\{\beta_1 \supset [\dots \supset (\beta_{k-1} \supset \sim\beta_k) \dots]\}$$

Par application répétée de $S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$:

$$\vdash_{DD'} S\beta_1 \supset [\dots (S\beta_{k-1} \supset S\sim\beta_k) \dots]$$

(²⁹) Partout dans ce passage nous écrivons $\vdash_{DD'}$, mais il va de soi que le symbole $\vdash_{DF'}$ conviendrait aussi.

Par Déf. $\supset$ et Déf... :

$$\frac{}{DD'} (S\beta_1 \dots (S\beta_{k-1}) \supset S \sim \beta_k$$

Par l'axiome $Sp \supset \sim S \sim p$ et le calcul propositionnel:

$$\frac{}{DD'} S \sim \beta_k \supset \sim S\beta_k$$

Par syllogisme:

$$\frac{}{DD'} (S\beta_1 \dots S\beta_{k-1}) \supset \sim S\beta_k$$

Par Déf. $\supset$ et Déf... :

$$\frac{}{DD'} \sim S\beta_1 \vee \dots \vee \sim S\beta_{k-1} \vee \sim S\beta_k$$

Or, d'après le lemme 3:

$$\frac{}{DD'} \sim S\beta_1 \supset w'_1, \dots, \frac{}{DD'} \sim S\beta_k \supset w'_1,$$

donc, par le calcul propositionnel:

$$\frac{}{DD'} (\sim S\beta_1 \vee \dots \vee \sim S\beta_k) \supset w'_1$$

D'où, par détachement:

$$\frac{}{DD'} w'_1 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le 3ème cas (règle D) est évidemment analogue au 1er, w_{jG} et $S\beta_1, \dots, S\beta_k, Sy$ étant seulement à remplacer par $w_{jB}, W'\beta_1, \dots, W'\beta_k, W'\gamma$. Le 4ème cas (règle D'), qui n'est à envisager que pour le système DD', est analogue au 2ème.

*
**

Nous avons expliqué plus haut comment, lorsque nous posons l'équivalence de $\Box p$ et de $p \cdot Sp \cdot W'p$, des deux implications que cette équivalence contient, $(p \cdot Sp \cdot W'p) \supset \Box p$ paraît nettement moins évidente que sa converse. Elle signifie en effet que les seuls mondes accessibles au monde réel sont le réel lui-même, les «modèles» bons et les «contre-modèles» mauvais. Or ne peut-on imaginer que d'autres mondes, ni bons ni mauvais mais semblables au réel lui-même, ne soient acces-

sibles ? La question est importante, car si nous répondons par l'affirmative, nous supprimons du même coup le lien déjà assez fragile que nous avons établi entre l'inconditionnellement obligatoire et le conditionnellement obligatoire: $(Sp.p. \sim \Box p) \supset S'p$. Il semble que nous rencontrions là une véritable «aporie», deux intuitions d'un degré d'évidence du même ordre entrant en contradiction. Nous allons tenter de résoudre cette aporie par le biais de la réduction des foncteurs déontiques à la logique modale.

En ce qui concerne la logique de l'obligation inconditionnelle, on sait comment Anderson [1] a effectué une telle réduction. Il a posé la définition et l'axiome:

$$\begin{array}{l} \text{Déf.} \\ Sp = \Box (\sim p \supset \sigma) \\ \sim \Box \sigma \end{array}$$

où σ est une constante propositionnelle se lisant à peu près «une sanction s'ensuit», et tels que l'axiome $\sim \Box \sigma$ est équivalent à l'axiome $Sp \supset \sim S \sim p$ (la définition, elle, revenant à l'axiome $S(p \supset q) \supset (Sp \supset Sq)$ et à la règle $\vdash \alpha \rightarrow \vdash S\alpha$).

Puisque le facultatif inconditionnel W' possède une structure semblable à celle de S , nous pouvons poser à notre tour:

$$W'p = \Box (\sim p \supset \tau)$$

et, seulement dans le cas où l'axiome $W'p \supset \sim W' \sim p$ est admis (système DD'), l'axiome:

$$\sim \Box \tau$$

Pour interpréter la nouvelle constante τ , nous remarquerons que, par la définition de P' , nous obtenons pour la permission inconditionnelle:

$$P'p = \Box (p \supset \tau)$$

Mais que signifie qu'il est inconditionnellement permis que p sinon que, dans tous les cas, si p alors il s'ensuit l'absence de toute sanction ? Ainsi τ doit être identifiée à $\sim \sigma$.⁽³⁰⁾ Une thèse remarquable découle alors de cette identification:

1. $(Sp . W'p) \equiv [\Box (\sim p \supset \sigma) . \Box (\sim p \supset \sim \sigma)]$
[Déf. S, Déf. W']
2. $(Sp . W'p) \equiv \Box [(\sim p \supset \sigma) . (\sim p \supset \sim \sigma)]$
[$\Box (a . b) \equiv (\Box a . \Box b)$]
3. $[(\sim p \supset \sigma) . (\sim p \supset \sim \sigma)] \equiv p$
[calcul des propositions]
4. $(Sp . W'p) \equiv \Box p$
[2, 3, extensionnalité]

Conclusion: la réduction effectuée, loin d'«affaiblir» la formule $(p . Sp . W'p) \supset \Box p$, la renforce au contraire en $(Sp . W'p) \supset \Box p$. Dans la mesure où cette réduction, bien que critiquable, représente un schéma rationnel de nos intuitions déontiques, nous pouvons admettre la nouvelle formule qui en résulte. Examinons alors quels résultats entraîne celle-ci du point de vue de la sémantique de nos précédents systèmes.

Nous devons supposer qu'il y a trois types de mondes: les modèles bons, les contre-modèles mauvais et les «ni bons ni mauvais» parmi lesquels le réel. Prouver l'implication $(Sp . W'p) \supset \Box p$ consiste à montrer que si p dans les deux premiers types de mondes, alors p dans le dernier. La seule preuve que nous apercevons comme possible est la suivante, qui repose sur l'hypothèse de la *bivalence déontique*. Relativement à chaque proposition prise en particulier, tout monde, de quelque type qu'il soit, peut être considéré comme un modèle bon ou un contre-modèle mauvais. Alors Sp signifie sémantiquement que p est vrai dans tous les mondes perçus comme bons (par les gens du monde réel), mis à part la question de savoir si ces mondes sont des modèles ou de simples possibles, autrement dit si ces mondes sont bons en soi ou

$$\begin{array}{ll} Sp = \Box (\sim p \supset \sigma) & S'p = \Diamond (\sim p . \sigma) \\ Pp = \Diamond (p . \sim \sigma) & P'p = \Box (p \supset \sim \sigma) \end{array}$$

(30) Nous aboutissons ainsi aux quatre définitions principales:

ANDERSON [1], p. 80, proposait les termes de *prudent* et de *téméraire* pour P' et L' : "States-of-affairs which entail the denial of the sanction might, for example, be regarded as *prudent*, and those which do not may be regarded as *imprudent*, or *risky*, or *rash*". Dans le même passage, ANDERSON anticipe nos calculs en expliquant qu'à la condition de poser la possibilité

seulement comme «phénomènes»; et semblablement pour $W'p$. Alors si l'on suppose $Sp \cdot W'p$, c'est que p est vrai dans tous les mondes possibles et donc que l'on a $\Box p$. La validité de la formule $(Sp \cdot W'p) \supset \Box p$ se trouve ainsi mise en rapport avec un certain subjectivisme de la norme. Si l'on estime que le devoir-être a par essence une origine distincte de celle de l'être, alors doit être rejetée non seulement cette dernière formule, mais encore celle rencontrée plus haut $(p \cdot Sp \cdot W'p) \supset \Box p$. Car il faut envisager dans ce cas, outre le bon et le mauvais, une troisième valeur déontique: l'indifférent⁽³¹⁾.

Nous allons maintenant donner deux systèmes tenant compte de la définition «renforcée» de $\Box p$.

Les systèmes DF'_1 et DD'_1

Par rapport aux systèmes DF' et DD' , les modifications sont les suivantes.

— Remplacement de la définition de $\Box p$ par:

$$\Box p = (Sp \cdot W'p)$$

— axiome nouveau:

de la sanction, la logique de la "témérité" (= interdiction conditionnelle) est isomorphe à celle de la permission (conditionnelle).

⁽³¹⁾ La formule $(Sp \cdot W'p) \supset \Box p$ a pour équivalente $(Sp \cdot \sim \Box p) \supset S'p$. A l'aide de la constante σ , $S'p$ s'exprime $\Diamond(\sim p \cdot \sigma)$, qui implique $\Diamond \sim p$, c'est-à-dire $\sim \Box p$. Si l'on veut poser que tel acte est conditionnellement obligatoire, il faut donc supposer qu'il peut ne pas être commis. Or cette possibilité n'est pas exprimée par Sp ; ainsi s'explique-t-on qu'elle doive être juxtaposée à Sp pour que $S'p$ soit impliqué.

ANDERSON [1] qui consacre tout un chapitre à la restriction de la logique déontique aux propositions purement contingentes (chap. IX, pp. 76-82) approche de très près notre formule en signalant la thèse "any contingency that is forbidden is rash" (p. 81) qui se symbolise dans notre notation $(\Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \supset (S \sim p \supset S' \sim p)$. S'il avait seulement écrit "any possibility that is forbidden is rash", il eût donné la formule citée plus haut. En revanche, lorsqu'il propose "any contingency that is obligatory is prudent", soit $(\Diamond p \cdot \Diamond \sim p) \supset (Sp \supset P'p)$, il se trompe car cette formule, une fois exprimée à l'aide de la constante σ , n'est pas valide. Nous pensons même qu'elle est contraire à l'intuition (cf. la fin de notre article).

$$(Sp . W'p) \supset p$$

Seul DD'_1 contient l'axiome $W'p \supset \sim W' \sim p$.

Là encore, on vérifie aisément que l'opérateur défini $\Box$ possède toutes les propriétés requises de la nécessité au sens du système modal T ⁽²²⁾.

Comme thèses immédiates de DF'_1 (et de DD'_1), nous avons:

$$(Sp . \sim \Box p) \supset S'p$$

$$(P'p . \Diamond p) \supset Pp$$

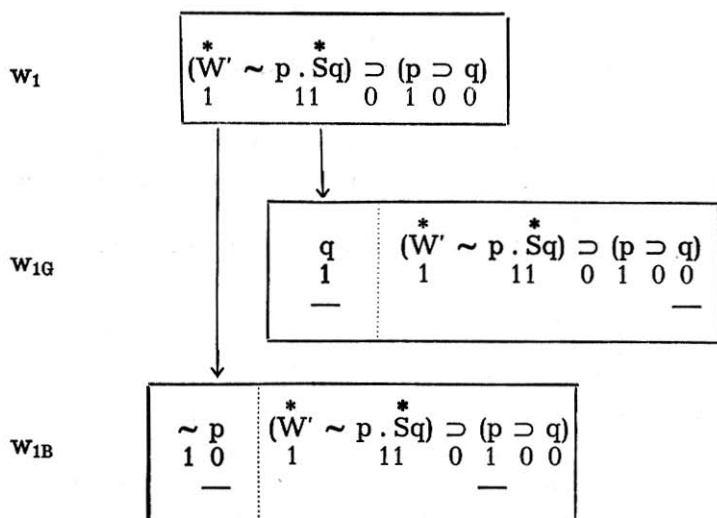
La *consistance* s'établit tout de suite par la méthode de la PC-transformation. Pour la *validité*, dans nos définitions et nos règles précédentes seules sont changées les propriétés des relations R et R' : ce sont toujours deux relations binaires non réflexives définies dans W , telles que quels que soient w_i et w_j appartenant à W si $w_i R w_j$ alors non $w_i R' w_j$; mais il faut maintenant en outre que pour tout w_i : soit $w_i R w_i$, soit $w_i R' w_i$.

Dans la *procédure de décision*, les quatre règles pour un nouveau monde A, B, C', D' ne comportent plus la restriction que le monde accessible à w_i ne soit pas w_i lui-même. Toutefois, lorsqu'on choisit w_i comme monde accessible à w_i , D' peut être appliquée même dans le système DF'_1 et l'on doit uniquement rechercher le «cas double» w_{iG} ou w_{iB} (w_i accessible comme bon ou accessible comme mauvais à lui-même), w_i n'étant inconsistant qu'à la condition que w_{iG} et w_{iB} le soient tous deux.

Exemple

Nous allons prouver la formule $(P'p . Sq) \supset (p \supset q)$ sur laquelle nous reviendrons. Elle donne:

⁽²²⁾ Le nouvel axiome permet justement d'établir $\Box p \supset p$.



Les deux rectangles w_{1G} , w_{1B} sont inconsistants, la formule testée est donc valide dans le système DF'_1 (et donc aussi dans DD'_1).

De toute évidence, le caractère décisore de la procédure employée n'est pas entamé par les modifications effectuées sur les règles.

Dans la *preuve de complétude*, il faut envisager un nouveau cas pour la démonstration du lemme 2. ⁽³³⁾ Si les flèches tirées de w_i vont vers w_i lui-même, alors il y en a deux, l'une vers w_{iG} , l'autre vers w_{iB} , et elles proviennent de l'application des règles C' et D' .

1) Les formules initiales de w_{iG} sont les suivantes.

a) un ensemble de formules $\beta_1, \dots, \beta_k$ à chacune desquelles est assigné 1 dans w_{iG} et telles qu'à $S\beta_1, \dots, S\beta_k$ est assigné 1 dans w_i ($k > 0$);

b) toutes les formules initiales de w_i .

2) Les formules initiales de w_{iB} sont les suivantes:

a) un ensemble de formules $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ à chacune desquelles

⁽³³⁾Cf. [5], pp. 99-100.

est assigné 1 dans w_{iB} et telles qu'à $W'_{\gamma_1}, \dots, W'_{\gamma_l}$ est assigné 1 dans w_i ($l > 0$);

b) toutes les formules initiales de w_i .

Alors: $\vdash_{DF'_1} w'_{iG}$ ⁽³⁴⁾ avec $w'_{iG} = \sim \beta_1 \vee \dots \vee \sim \beta_k \vee w'_i$

$\vdash_{DF'_1} w'_{iB}$ avec $w'_{iB} = \sim \gamma_1 \vee \dots \vee \sim \gamma_k \vee w'_i$

Par des démonstrations analogues à celles de [5] (p. 100) où l'opérateur de la nécessité est remplacé d'une part par S, d'autre part par W', nous parvenons à:

$\vdash_{DF'_1} \sim S\beta_1 \vee \dots \vee \sim S\beta_k \vee Sw'_i$

$\vdash_{DF'_1} \sim W'_{\gamma_1} \vee \dots \vee \sim W'_{\gamma_l} \vee W'w'_i$

et, par Déf. $\supset$ et Déf.:

$\vdash_{DF'_1} (S\beta_1 \dots S\beta_k) \supset Sw'_i$

$\vdash_{DF'_1} (W'_{\gamma_1} \dots W'_{\gamma_l}) \supset W'w'_i$

Or, d'après le lemme 3:

$\vdash_{DF'_1} \sim S\beta_1 \supset w'_i, \dots, \vdash_{DF'_1} \sim S\beta_k \supset w'_i$

$\vdash_{DF'_1} \sim W'_{\gamma_1} \supset w'_i, \dots, \vdash_{DF'_1} \sim W'_{\gamma_l} \supset w'_i$

donc par le calcul propositionnel:

$\vdash_{DF'_1} \sim w' \supset (S\beta_1 \dots S\beta_k)$

(34) Partout dans ce passage nous écrivons $\vdash_{DF'_1}$, mais le symbole

$\vdash_{DD'_1}$ conviendrait aussi.

$$\frac{\vdash \sim w'_i \supset (W'_i \gamma_1 \dots W'_i \gamma_1)}{DF'_i}$$

et par le rapprochement de ces dernières et des précédentes, par syllogisme:

$$\frac{\vdash \sim w'_i \supset Sw'_i}{DF'_i}, \frac{\vdash \sim \sim w'_i \supset W'_i w'_i}{DF'_i}$$

et donc (calcul des propositions):

$$\frac{\vdash \sim w'_i \supset (Sw'_i \cdot W'_i w'_i)}{DF'_i}$$

Mais par l'axiome $(Sp \cdot W'p) \supset p$ avec p/w'_i et par syllogisme:

$$\frac{\vdash \sim w'_i \supset w'_i}{DF'_i}$$

c'est-à-dire (calcul des propositions):

$$\frac{\vdash w'_i}{DF'_i} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En établissant notre procédure de décision, nous avons peut-être semblé compliquer les choses à plaisir puisque la formulation «réduite» des foncteurs déontiques à l'aide de la constante σ nous fournissait immédiatement, de façon évidente, une telle procédure. Cependant, si nous avons opéré autrement, c'est que nous voulions précisément fournir un système axiomatique indépendant de la réduction andersonnienne. La question que nous posons maintenant est de savoir si nos systèmes DF'_i et DD'_i sont complets par rapport à la formulation réduite, autrement dit si nous pouvons obtenir dans nos systèmes toutes les thèses que celle-ci produit. Or, chacun de leur côté, les deux sous-systèmes D et F' sont complets par rapport aux deux sous-systèmes réduits ⁽³⁵⁾:

⁽³⁵⁾ Nous raisonnons ici sur D, F' et DF'_i , Mais bien entendu nous pourrions aussi le faire sur D, D' et DD'_i . En fait, la complétude de D et F' par rapport à leurs réductions est à prendre exactement dans le même sens que celui que nous allons définir pour DF'_i par rapport à DF'_i . Cette complétude est évidente sémantiquement. Soit Q la relation d'accès-

$$\begin{aligned} \text{Sp} &= \Box (\sim p \supset \sigma) & \text{W'p} &= \Box (\sim p \supset \tau) \\ &\sim \Box \sigma \end{aligned}$$

Le problème est de savoir quel rapport doit être établi au minimum entre les deux constantes σ et τ de façon à grouper D et F' dans l'unique système DF'_1 . En posant $\tau = \sim \sigma$, nous avons déduit $(\text{Sp} \cdot \text{W'p}) \supset p$; cette thèse entraîne-t-elle réciproquement l'identification de τ à $\sim \sigma$? La réponse est simple et s'obtient en testant dans le système modal T la formule $(\text{Sp} \cdot \text{W'p}) \supset p$ réduite:

$$w_1 \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} * \\ [\Box (\sim p \supset \sigma) \cdot \Box (\sim p \supset \tau)] \supset p \\ * \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Pour que le rectangle w_1 soit inconsistent, il faut et il suffit qu'il soit impossible d'obtenir dans w_1 à la fois $\sigma = 1$ et $\tau = 1$. Il faut et il suffit donc que $\sigma|\tau$ soit valide (σ incompatible avec τ). Mais identifier τ à $\sim \sigma$, c'est poser l'alternative $\sigma w \tau$, qui équivaut à $(\sigma|\tau) \cdot (\sigma \vee \tau)$. Si l'on veut construire un système totalement équivalent à la formulation réduite où $\tau = \sim \sigma$, il faut donc encore trouver un axiome équivalent à la formule $\sigma \vee \tau$, c'est-à-dire trouver une formule qui, testée dans le système T, donne les assignements $\sigma = 0$ et $\tau = 0$. Or, sans que nous cherchions à le démontrer ici, nous pensons qu'une telle formule est inexprimable à l'aide des foncteurs déontiques

sibilité pure et simple permettant de définir l'opérateur modal $\Box$ (système T). Se donner la constante σ équivaut à se donner une nouvelle relation d'accessibilité R "incluse" dans Q, $w_i R w_j$ signifiant que w_j est un monde accessible à w_i (c'est-à-dire $w_i Q w_j$), où de plus $\sim \sigma = 1$; et inversement se donnant R incluse dans Q, on peut toujours définir une "constante" propositionnelle $\sim \sigma$ valant 1 dans tous les mondes w_j tels que $w_i R w_j$ et 0 dans les autres. Ainsi, par exemple pour D, toutes les formules valides dans le système réduit D_R qui peuvent être écrites à l'aide de l'opérateur S sans la présence explicite de σ sont aussi valides dans D. Mais bien sûr D_R contient des formules valides dans lesquelles il est impossible d'éliminer σ en faisant seulement usage de S (comme par exemple $\Box [\sigma \supset (p \cdot q)] \supset [\Box (\sigma \supset p) \cdot \Box (\sigma \supset q)]$) et qui sont donc inexprimables dans D.

S, L, P, ..., W', P', ... seuls. Par exemple, la formule:

$$\Diamond[(\sim p . \sim \sigma) . (\sim q . \sim \tau)] \supset \Diamond(p \vee q)$$

conduit bien aux assignements $\sigma = 0$ et $\tau = 0$ dans un même monde, mais comme $\Diamond(a . b)$ n'équivaut pas à $\Diamond a . \Diamond b$, il est impossible d'écrire:

$$[\Diamond(\sim p . \sim \sigma) . \Diamond(\sim q . \sim \tau)] \supset \Diamond(p \vee q) \quad (36)$$

qui serait

$$(Wp . S'q) \supset \Diamond(p \vee q)$$

Ainsi pensons-nous que le système réduit — appelons-le DF'_{1R} — contient des thèses qui ne figurent pas dans notre système DF'_1 , mais que toutes les thèses de DF'_{1R} exprimables à l'aide des foncteurs déontiques sans la constante σ sont thèses de DF'_1 . En ce sens, DF'_1 est *complet* par rapport à DF'_{1R} ⁽³⁷⁾

*
**

Nous serions enfin tenté de chercher à établir un lien implicatif entre l'inconditionnellement obligatoire et l'inconditionnellement permis ⁽³⁸⁾. Aucune raison purement formelle ne nous interdirait par exemple de poser comme axiome:

$$(Sp . \sim \Box p) \supset P'p$$

car la «PC-transformée» de cette expression, qui s'écrit $(p . \sim p) \supset \sim p$, est thèse du calcul des propositions.

Seulement, si nous décidons de nous en tenir aux définitions réduites $Sp = \Box(\sim \sigma \supset p)$ et $P'p = \Box(p \supset \sim \sigma)$ en les con-

⁽³⁶⁾ Cette formule n'est pas thèse, même si l'on pose $\tau = \sim \sigma$.

⁽³⁷⁾ Au reste, il serait possible d'envisager une réduction entièrement équivalente à DF'_1 (ou DD'_1). Nous poserions les définitions des foncteurs déontiques en gardant les deux constantes σ et τ , et nous poserions les axiomes $\sim \Box \sigma$ (ou $\sim \Box \sigma$ et $\sim \Box \tau$) et $\sim(\sigma . \tau)$.

⁽³⁸⁾ Comme le fait M. GARDIES, [2], p. 180 en obtenant la thèse $Sp \supset P'p$.

sidérant comme assez pertinentes, nous ne nous engagerons pas dans une telle voie. En effet, que l'absence de sanction implique nécessairement $p(Sp)$, cela n'entraîne pas que si p alors il n'y a pas de sanction ($P'p$), même lorsqu'il n'est pas nécessaire que p . D'après la formule démontrée plus haut, $(P'p . Sq) \supset (p \supset q)$, qui pourrait même être renforcée en $(P'p . Sq) \supset \Box (p \supset q)$, un acte inconditionnellement permis implique tous les actes inconditionnellement obligatoires (pour éviter la sanction, il faut au moins commettre tous les actes inconditionnellement obligatoires) et l'on ne voit donc pas pourquoi du seul fait qu'un acte fût obligatoire il impliquerait tous les autres actes obligatoires.

Suggestions pour une logique du «monde déontique»

Nous avons vu plus haut comment le système DD'_1 admettait la «réduction»:

$$\begin{aligned} Sp &= \Box (\sim p \supset \sigma) \\ &\sim \Box \sigma \\ W'p &= \Box (\sim p \supset \sim \sigma) \\ &\sim \Box \sim \sigma \end{aligned}$$

Introduisons la constante $E = \sim \sigma$ de l'échappement à la sanction (Prior [8]) ⁽³⁹⁾; nous obtenons:

$$\begin{aligned} Sp &= \Box (E \supset p) \\ &\sim \Box \sim E \\ W'p &= \Box (\sim E \supset p) \\ &\sim \Box E \end{aligned}$$

En laissant de côté la définition de $W'p$, nous avons encore:

$$\begin{aligned} Sp &= \Box (E \supset p) \\ \Diamond E . \Diamond \sim E \end{aligned}$$

ou

⁽³⁹⁾ Cette constante E n'est donc rien d'autre que notre constante τ .

$$\Diamond (E . p) \equiv Pp$$

$$\Diamond E . \Diamond \sim E$$

Ces deux dernières thèses nous rappellent le couple d'assertions posé par Rescher et Urquhart [10] pour leur logique des états du monde ⁽⁴⁰⁾:

$$\Diamond (w . p) \supset p$$

$$\Diamond w . \Diamond \sim w$$

Si la première assertion n'est, dans ce cas, qu'une implication, et non une équivalence, c'est que l'implication converse se prouve à partir des deux assertions. Cependant, la véritable différence existant entre ces assertions et nos deux thèses, c'est que tandis que celles-là permettent de déduire la thèse w , celles-ci ne permettent pas d'inférer E mais seulement PE . Notre première thèse, ou son équivalente $Sp = \Box (E \supset p)$, définit E comme la conjonction de toutes les propositions inconditionnellement obligatoires: E est le «monde déontique», comme w , conjonction de toutes les propositions vraies, est le «monde» tout court. Et notre seconde thèse pose la pure contingence (ou possibilité bilatérale) de ce monde déontique, dont on peut du reste affirmer qu'il est permis mais non qu'il existe. En partant seulement du système DF'_1 (au lieu de DD'), nous n'aurions pas la thèse $\Diamond \sim E$ et le monde déontique apparaîtrait alors moins contingent que le monde réel, ou plus exactement possible mais pas contingent: certains trouveront peut-être cela plus conforme à l'idée qu'ils se font d'un tel monde.

Prise en charge des «paradoxes»

Comme on peut le voir immédiatement par des tests de validité dans DF' , des paradoxes comme celui «de Ross» $Sp \supset S(p \vee q)$, celui qu'exprime la formule $P'p \supset P'(p . q)$ et celui de l'obligation dérivée $\sim Pp \supset S(p \supset q)$ sont tous valides dans nos quatre systèmes. A cet égard, la situation est inchangée

⁽⁴⁰⁾ [10], p. 172.

par rapport à celle du système de M. Gardies dont la critique nous a inspiré cet article. Il est même certain que nos systèmes contiennent en germe de nouveaux paradoxes proprement «mixtes», c'est-à-dire qui ne se trouvent ni dans le système D ni dans F' ou D'. Nous pensons, comme M. Gardies, qu'une des meilleures manières de «lever» les paradoxes est encore de les «assumer» rationnellement.

*
**

Nous tenons à souligner, en guise de conclusion, le caractère schématique des systèmes que nous venons de proposer. La question la plus délicate est d'ordonner en un système unique les foncteurs définis à partir de l'obligatoire inconditionnel et ceux définis à partir du facultatif inconditionnel. Seule l'interprétation «à la manière d'Anderson» (utilisant la constante σ) autorise à poser l'axiome assez paradoxal $(Sp . W'p) \supset p$. Mais cette interprétation dont le défaut est notamment de ne prendre en compte qu'une seule sanction, constante, identique pour tous les actes commis, intemporelle, reste assez grossière. A ce point de vue, nos systèmes n'ont pas plus de valeur que leurs réductions andersonniennes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON, Alan Ross -- *The formal analysis of normative systems*, New Haven, Yale University, 1956.
- [2] GARDIES, Jean-Louis -- Logique déontique et théorie générale des fonctions complétives, *Logique et analyse*, 61-62, 1973, pp. 143-220.
- [3] GARDIES, Jean-Louis -- A propos de l'article de G. Kalinowski sur un nouveau système de logique déontique, *Logique et analyse*, 69-70, 1975, pp. 189-208.
- [4] HANSON, William H. -- Semantics for deontic logic, *Logique et analyse*, 31, 1965, pp. 177-190.
- [5] HUGHES, G. E. & CRESWELL, M. J. -- *An introduction to modal logic*, Methuen, London, 1968.

- [6] KALINOWSKI, Georges - - Sur un nouveau système de logique déontique, *Logique et analyse*, 67-68, 1974, pp. 343-387.
- [7] KRIPKE, Saul A. - - Semantical analysis of modal logic I, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, IX, 1963, pp. 67-96.
- [8] PRIOR, Arthur N. - - Escapism: the logical basis of ethics, *Essays in moral philosophy*, A. I. Melden, University of Washington Press, Seattle, 1958, pp. 135-146.
- [9] PRIOR, Arthur N. - - *Formal logic*, second edition, At the Clarendon Press, Oxford, 1962.
- [10] RESCHER, Nicholas & URQUHART, Alasdair - - *Temporal logic*, Springer-Verlag, Vienne, New York, 1971.
- [11] WRIGHT, Georg Henrik von - - Deontic logic, *Mind*, 60, 1951, pp. 1-15, réédité dans G.H. von Wright, *Logical studies*, Routledge and Kegan Paul, second edition, London, 1967, pp. 58-74.
- [12] WRIGHT, Georg Henrik von - - An essay in deontic logic and the general theory of action, *Acta philosophica fennica*, Fasc. XXI, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1968.

Université de Nantes

P. Bailhache