

UNE FORMALISATION DE QUELQUES SYLLOGISMES MODAUX

Gérolde STAHL

1. *Introduction*: On peut traiter une grande partie de la syllogistique traditionnelle dans un système spécial qui ne se distingue pas beaucoup du système fonctionnel élémentaire. Pour établir cela, les sections 2 et 3 de cet exposé présentent une formalisation générale des phrases et syllogismes *de re*; les sections 4 et 5 font la même chose pour les phrases et syllogismes *de dicto*. La théorie des syllogismes combinés est développée dans les sections 6 et 7. Après une brève considération sur les modalités superposées (section 8), le traitement formel des sections antérieures est appliqué à la syllogistique modale d'Aristote (section 9), Théophraste (section 10) et Occam (section 11), ce qui permet une analyse critique des travaux considérés.

Pour traiter en peu de pages une matière aussi volumineuse que la syllogistique modale, il est utile de faire trois restrictions.

Restriction *a*: Les phrases («jugements» en terminologie traditionnelle) singulières ne seront pas considérées. D'un côté cela correspond à une tradition qui commençait avec Aristote, d'un autre côté un certain nombre de résultats présentés ici peut s'étendre sans grande difficulté aux syllogismes modaux avec des phrases singulières.

Restriction *b*: Les syllogismes catégoriques justifiés par conversion *per accidens*, c'est-à-dire Darapti III, Felapton III, Bamalip IV et Fesapo IV, ne sont pas considérés, ni leurs analogues modaux. On ne peut pas justifier ces syllogismes (de même que la subalternation et la conversion *per accidens*) dans le traitement moderne si l'on n'adjoint pas une prémisses existentielle spéciale; par «traitement moderne» ou «traitement logique mathématique» on entend ici que les phrases uni-

verselles sont considérées comme affirmations de sous-classe et les particulières comme affirmations qu'une intersection de classes n'est pas vide. Avec la restriction *b* il reste 15 syllogismes catégoriques qui suivent en principe les mêmes lignes et donnent les mêmes résultats en logique traditionnelle et en logique mathématique, ce qui nous permet d'utiliser librement les techniques de la logique mathématique sans déformer trop la pensée traditionnelle.

Restriction *c*: Seulement les termes modaux principaux, c'est-à-dire «nécessaire», «non nécessaire», «possible» et «non possible» («impossible») seront considérés, où «possible» est pris au sens «non nécessairement non». Cette convention exclut explicitement le terme «contingent» utilisé fréquemment en Aristote comme «possible (bilatéralement)», c'est-à-dire «possible et possiblement non». Egalement seront exclus «non contingent» et un grand nombre de termes modaux qu'on peut trouver par exemple en Occam (quelques exemples seront mentionnés dans la section 11).

La logique mathématique permet d'utiliser diverses symbolisations pour exprimer les phrases universelles affirmatives (abrégées par «A»), universelles négatives («E»), particulières affirmatives («I») et particulières négatives («O»). Ici nous préférons utiliser «S», «P», «M» etc. comme symboles de classes ⁽¹⁾, « $\subset$ » comme symbole de sous-classe (non nécessairement propre), « $\neg$ » pour le complément d'une classe, « $\cap$ » pour l'intersection de classes et «E!» pour indiquer que la classe (intersection) respective n'est pas vide. Ainsi on a:

$$S \subset P \quad (A)$$

c'est-à-dire: Tous les (éléments de) *S* sont (des éléments de) *P*.

$$S \subset \neg P \quad (E)$$

$$E! S \cap P \quad (I)$$

⁽¹⁾ Dans le contexte de *re* il s'agit de symboles de variables dans le contexte de *dicto* (et combiné), de symboles de constantes; pour un traitement détaillé voir [18].

c'est-à-dire: Au moins un (élément de) S est (élément de) P .
Et plus librement: Quelques S sont P .

$$E! S \cap -P \quad (O)$$

On peut démontrer tant en logique traditionnelle qu'en logique mathématique que les phrases «A» sont les négations des phrases «O» correspondantes et vice versa (les «A» et les «O» sont contradictoires) et on a le même résultat pour les phrases «E» et «I», c'est-à-dire, avec « $\sim$ » pour la négation des phrases et « $\equiv$ » pour l'équivalence (nous utiliserons largement les parenthèses):

$$\begin{aligned} S \subset P &\equiv \sim (E! S \cap -P) \\ S \subset -P &\equiv \sim (E! S \cap P) \end{aligned}$$

Il ne faut pas confondre la négation de la phrase entière avec la négation du prédicat (si l'on nie le prédicat dans une phrase «A» on obtient une phrase «E» et vice versa; la même relation se trouve entre les «I» et les «O»).

Deux autres équivalences utiles (traditionnellement appelées «conversion (pure) de E» et «conversion (pure) de I») sont:

$$\begin{aligned} S \subset -P &\equiv P \subset -S \\ E! S \cap P &\equiv E! P \cap S \end{aligned}$$

Les 15 syllogismes catégoriques que nous considérons ici sont en forme symbolique:

$$\begin{array}{rcl} M \subset P & & \\ S \subset M & & \text{Barbara I} \\ \hline S \subset P & & \end{array}$$

A partir des deux prémisses « $M \subset P$ » et « $S \subset M$ » on obtient la conclusion « $S \subset P$ ». Un théorème correspondant de logique mathématique avec « $\cdot$ » pour la conjonction et « $\supset$ » pour l'implication serait:

$$(M \subset P \cdot S \subset M) \supset S \subset P$$

De façon analogue il y a des théorèmes pour les 14 autres syllogismes («I», «II», «III» et «IV» indiquent la «figure» à laquelle appartiennent les syllogismes mentionnés, une classification qui dépend du placement de la «M»):

$M \subset -P$		$M \subset P$		$M \subset -P$	
$S \subset M$	Celarent I	$E!S \cap M$	Darii I	$E!S \cap M$	Ferio I
$S \subset -P$		$E!S \cap P$		$E!S \cap -P$	
$P \subset M$		$P \subset M$		$P \subset M$	
$E!S \cap -M$	Baroco II	$S \subset -M$	Camestres II	$S \subset -M$	
$E!S \cap -P$		$S \subset -P$		$S \subset -P$	
$P \subset -M$		$P \subset -M$		$P \subset -M$	
$S \subset M$	Cesare II	$E!S \cap M$	Festino II	$E!S \cap M$	
$S \subset -P$		$E!S \cap -P$		$E!S \cap -P$	
$E!M \cap -P$		$M \subset P$		$M \subset P$	
$M \subset S$	Bocardo III	$E!M \cap S$	Datisi III	$E!M \cap S$	
$E!S \cap -P$		$E!S \cap P$		$E!S \cap P$	
$E!M \cap P$		$M \subset -P$		$M \subset -P$	
$M \subset S$	Disamis III	$E!M \cap S$	Ferison III	$E!M \cap S$	
$E!S \cap P$		$E!S \cap -P$		$E!S \cap -P$	
$P \subset M$		$E!P \cap M$		$P \subset -M$	
$M \subset -S$	Calemes IV	$M \subset S$	Dimatis IV	$E!M \cap S$	Fresison IV
$S \subset -P$		$E!S \cap P$		$E!S \cap -P$	

2. *Phrases modales de re*: Dans cette section et les suivantes, quelques résultats présentés en [17] et [18] (voir bibliographie) pour les systèmes FTR, FTD et FTD + seront utilisés. Pour comprendre le présent travail il n'est pas nécessaire d'avoir lu les exposés mentionnés; cependant les démonstrations et les détails techniques ne seront pas répétés ici. Les systèmes mentionnés, qui ont pour point de départ le système fonctionnel élémentaire et permettent d'introduire les modalités par définition, ne constituent pas une construction *ad hoc* pour forma-

liser la syllogistique modale d'un logicien traditionnel déterminé. Néanmoins ils faciliteront une formalisation et une analyse des syllogismes modaux (dans les limites de l'introduction) d'Aristote, Théophraste et Occam.

Supposons que nous ayons une classe P , c'est-à-dire la collection des individus qui appartiennent à P (qui satisfont la condition caractérisant P). Nous symboliserons par « P_n » la collection des individus qui appartiennent nécessairement à P et par « P_p » la collection des individus qui appartiennent possiblement à P . Nous appellerons les symboles des classes avec index « n » ou « p » des symboles «modalisés» et parlerons aussi de «classes modalisées». Les théorèmes T14 et T15 de [18], appelés ici «théorèmes de graduation», représentent la relation assez intuitive entre les trois classes:

$$\begin{aligned} P_n &\subset P \\ P &\subset P_p \end{aligned}$$

La modalisation peut s'appliquer aussi aux compléments de classes, de façon que nous ayons « $\neg P_n$ » et « $\neg P_p$ », et naturellement on peut former aussi les compléments des classes modalisées comme « $\neg P_n$ » (au sens de « $\neg (P_n)$ ») et « $\neg P_p$ ». Les théorèmes T16, T17 et T18 de [18], appelés ici «théorèmes de négation modale», indiquent quelques identités utiles entre compléments modalisés et compléments des classes modalisées:

$$\begin{aligned} \neg P_n &= (\neg P)_p \\ \neg P_p &= (\neg P)_n \\ P_p &= \neg (\neg P)_n \end{aligned}$$

Ce qui est non nécessairement P est possiblement non $\neg P$.
Ce qui est non possiblement P est nécessairement non $\neg P$.
Ce qui est possiblement P est non nécessairement non $\neg P$.

Dans ce qui suit non seulement les phrases «A», «E», «I» et «O», qui ont été indiquées dans l'introduction seront traitées, mais aussi celles où « S » ou « P » ou les deux sont modalisées. Toutes ces phrases seront appelées «phrases modales de *re*». Tandis que pour les phrases catégoriques nous avons eu seule-

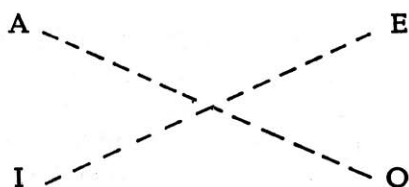
ment le cas « P », ici nous avons trois cas « P_n », « P » et « P_p ». On fait exactement la même distinction pour « S ». Cela donne par rapport aux phrases « A » neuf cas, qui seront distingués à l'aide des indices « n », « a » (pour «actuellement») et « p »:

$S_n \subset P_n$	(1)	A_{nn}
$S \subset P_n$	(2)	A_{an}
$S_p \subset P_n$	(3)	A_{pn}
$S_n \subset P$	(4)	A_{na}
$S \subset P$	(5)	A_{aa}
$S_p \subset P$	(6)	A_{pa}
$S_n \subset P_p$	(7)	A_{np}
$S \subset P_p$	(8)	A_{ap}
$S_p \subset P_p$	(9)	A_{pp}

Les mêmes neuf cas existent aussi par rapport aux « E », « I » et « O », de sorte qu'ici 36 types de phrases modales *de re* seront considérées. Dans les phrases « E » et « O » nous aurons toujours « $(-P)_n$ » et « $(-P)_p$ » et non « $-P_p$ » et « $-P_n$ »; le dernier couple d'expressions peut se réduire au premier par les théorèmes de négation modale.

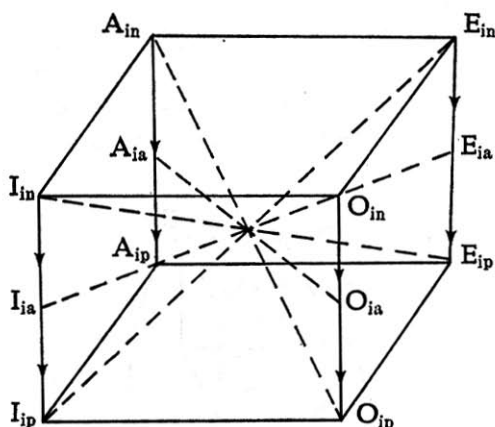
Les chiffres de «1» à «9», indiqués entre parenthèses, seront utilisés fréquemment dans le reste de cet exposé pour faire référence aux phrases respectives de la liste; par exemple si l'on mentionne une phrase « E » du type 7 on fait référence à une phrase « E_{np} », c'est-à-dire à « $S_n \subset (-P)_p$ ».

Nous avons vu, pour les phrases catégoriques, que les « A » sont contradictoires aux « O » et les « E » aux « I ». Traditionnellement on représente cette relation par le *carré de l'opposition*:



La ligne discontinue représente la relation symétrique *être le contradictoire de*. D'une façon analogue on peut construire

trois cubes de l'opposition pour les phrases modales de *re*. Pour le moment un seul cube général sera indiqué, mais si l'on remplace le «i» dans tous les premiers indices par «n» on obtient le premier cube, si l'on fait le même remplacement par «a» on obtient le deuxième et si l'on écrit «p» on obtient le troisième:



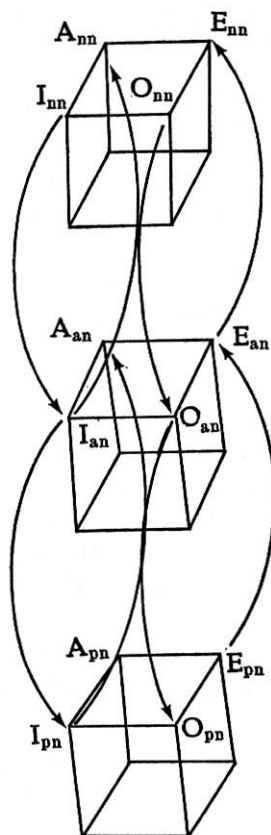
Sont contradictoires les couples suivants: « A_{ia} » — « O_{ia} », « E_{ia} » — « I_{ia} » (les deux diagonales se trouvent dans le plan horizontal qui coupe le cube en deux; avec «a» pour «i» on a le traditionnel carré de l'opposition), « A_{in} » — « O_{ip} », « A_{ip} » — « O_{in} », « E_{in} » — « I_{ip} », « E_{ip} » — « I_{in} ». Toutes ces non-équivalences (« $\equiv \sim$ ») peuvent être démontrées par substitution à partir des non-équivalences du traditionnel carré de l'opposition. Exemple pour le couple du deuxième cube « A_{ap} » — « O_{an} »: «Tous les philosophes sont possiblement sages» est contradictoire à «Quelques philosophes sont nécessairement non-sages».

Les flèches de haut en bas représentent des théorèmes en forme d'implication, appelés ici «théorèmes de descente interne». On les démontre à partir des théorèmes de graduation (au fond pour les démontrer on a recours à certains syllogismes modaux de type Barbara et Darii qu'on verra; mais il n'y a rien de circulaire dans tout cela):

$$S_i \subset P_n \supset S_i \subset P$$

$$\begin{aligned}
 S_i &\subset P \supset S_i \subset P_p \\
 E! S_i \cap P_n &\supset E! S_i \cap P \\
 E! S_i \cap P &\supset E! S_i \cap P_p
 \end{aligned}$$

On trouve aussi des relations intéressantes entre les trois cubes. Pour commencer il y a un type de descente entre les phrases «I» du premier cube et les phrases «I» correspondantes du deuxième et également entre les phrases «I» du deuxième et celles du troisième cube (ici sera indiquée la descente pour «I_{in}» : «I_{nn}» — «I_{an}» et «I_{an}» — «I_{pn}»). On a exactement les mêmes implications pour les phrases «O»:



Les deux théorèmes correspondants à cette descente appelés «théorèmes de descente externe» sont presque les mêmes que les antérieurs (on peut les démontrer grâce à la commutativité de l'intersection):

$$E! S_n \cap P_i \supset E! S \cap P_i$$

$$E! S \cap P_i \supset E! S_p \cap P_i$$

Par rapport aux phrases «A» et «E» des trois cubes, il n'y a pas descente mais quelque chose d'opposé, qui sera appelé ici «ascension»; les phrases «A» et «E» du dernier cube impliquent les phrases correspondantes du deuxième et les phrases «A» et «E» du deuxième cube impliquent celles du premier, tout cela selon les théorèmes:

$$S_p \subset P_i \supset S \subset P_i$$

$$S \subset P_i \supset S_n \subset P_i$$

qui sont démontrés à partir des théorèmes de graduation.

Une convention utile: Si une phrase implique une autre selon descente (interne ou externe) ou ascension, nous écrirons quelquefois « $B^+ \supset B$ » ou « $B \supset B^-$ », « B^+ » serait la phrase qui implique, appelée ici «la plus forte» et « B^- », l'impliquée, «la plus faible».

Par rapport aux conversions des «E» et des «I» on peut constater qu'elles changent dans beaucoup de cas le caractère modal d'une phrase. Ainsi, pour les phrases «I» nous avons (si l'on écrit «i» et «j» pour des indices quelconques):

$$E! S_i \cap P_j \equiv E! P_j \cap S_i$$

par exemple:

$$E! S \cap P_n \equiv E! P_n \cap S$$

c'est-à-dire une phrase «I» de type 2 (« I_{an} ») est transformée dans une phrase «I» de type 4 (« I_{na} »). Seulement « I_{nn} » (1), « I_{aa} » (5) et « I_{pp} » (9) ne changent pas leur caractère modal si l'on applique la conversion.

La conversion des «E» (dans la forme définitive) se présente de la façon suivante (nous écrivons «'» pour l'index inverse, où «n» et «p» sont inverses, tandis que l'inverse de «a» est «a» même); à partir de:

$$S_i \subset -P_j \equiv P_j \subset -S_i$$

nous avons dans la forme définitive:

$$S_i \subset (-P)_{j'} \equiv P_j \subset (-S)_{i'}$$

par exemple:

$$S_n \subset (-P)_n \equiv P_p \subset (-S)_p$$

Seulement «E_{pn}» (3), «E_{aa}» (5) et «E_{np}» (7) ne changent pas leur caractère modal si l'on applique la conversion.

3. *Les syllogismes modaux de re*: Au commencement de cette section on verra les syllogismes modaux qu'on peut former à partir des syllogismes catégoriques par substitution. Dans un certain sens (très strict) on pourrait établir qu'ils sont les seuls syllogismes modaux *de re*. Néanmoins, si l'on admet dans la construction syllogistique la descente et l'ascension (dans ce cas on pourrait penser qu'il n'y a pas seulement trois termes mais quatre par exemple «S», «M», «P» et «P_p») alors un grand nombre de syllogismes additionnels peut être démontré.

Avant d'entrer dans les détails, quelques conventions utiles de notations seront indiquées: (a) Le nombre des figures ne sera plus indiqué. (b) Aux trois phrases qui constituent le syllogisme, les chiffres de «1» à «9» seront assignés selon que les indices sont «nn» («1»), «an» («2») etc. (voir section 2). Par exemple «Celarent 252» signifie que nous avons une prémisse «E» (selon «Ce») avec l'index «an», une prémisse «A» selon «la») avec l'index «aa» et une conclusion «E» (selon «rent») avec l'index «an»:

$$\begin{array}{l} M \subset (-P)_n \\ S \subset M \\ \hline S \subset (-P)_n \end{array}$$

Les 15 syllogismes catégoriques ont tous le nombre 555, de façon que Barbara 555, Celarent 555, Darii 555, etc. sont déjà justifiés.

Prenons les syllogismes catégoriques comme point de départ, quelles sont les substitutions possibles ? Dans un syllogisme sans phrase négative on peut placer « S_n » ou « S_p » au lieu de « S » (les deux fois où « S » apparaît) et procéder de la même façon avec « M » et « P ». Ainsi pour chaque syllogisme sans phrase négative nous avons 27 possibilités (3 possibilités pour « S » : pour chaque possibilité de « S » 3 possibilités pour « M » ; pour chacune des 9 combinaisons 3 possibilités pour « P »). Nous avons aussi 27 possibilités pour les syllogismes avec des phrases négatives, sauf qu'après avoir choisi une possibilité il faut remplacer « $\neg S_p$ » par « $(\neg S)_n$ » et « S_n » par « $(\neg S)_p$ » (la même chose avec « M » et « P ») selon les théorèmes de négation modale. Ainsi, par exemple, la forme définitive d'un syllogisme de type Cesare serait :

forme initiale	forme définitive (Cesare 922)
$P_p \subset \neg M_n$	$P_p \subset (\neg M)_p$
$S \subset M_n$	$S \subset M_n$
$\hline S \subset \neg P_p$	$\hline S \subset (\neg P)_n$

(seulement la forme initiale est un syllogisme au sens très strict avec trois termes « S », « M_n » et « P_p », tandis que pour la forme définitive on pourrait penser en cinq termes ; ce point sera précisé plus bas dans cette section).

Ainsi le nombre des syllogismes formés par substitution (y compris la substitution zéro, c'est-à-dire les syllogismes catégoriques) est $27 \times 15 = 405$ (dans ce nombre entrent 144 syllogismes des figures II et IV qui dans la forme définitive pourraient être considérés comme ayant plus de trois termes).

Si l'on utilise maintenant le numérotage indiqué on a pour chaque syllogisme catégorique 27 nombres, qui permettent d'individualiser les syllogismes modaux respectifs. La séquence de 27 nombres, qui sera indiquée tout de suite, est la même quelque soit le syllogisme catégorique de la figure I qui serait

le point de départ (Barbara, Celarent, Darii ou Ferio). Un résultat analogue vaut aussi pour les syllogismes de la figure II et pour ceux de la figure III, mais non pour la figure IV. Dans ce cas seulement les 27 nombres de Calemes seront indiqués et en plus une règle pour déterminer les nombres de Dimatis et une pour les nombres de Fresison.

Tout cela est présenté dans le schéma général suivant et dans les deux règles pour Dimatis et Fresison:

figure I	figure II	figure III	Calemes
111	177	111	119
122	188	142	148
133	199	173	177
241	274	221	216
252	285	252	245
263	296	283	274
371	371	331	313
382	382	362	342
393	393	393	371
414	447	414	429
425	458	445	458
436	469	476	487
544	544	524	526
555	555	555	555
566	566	586	584
674	641	634	623
685	652	665	652
696	663	696	681
717	717	717	739
728	728	748	768
739	739	779	797
847	814	827	836
858	825	858	865
869	836	889	894

977	911	937	933
988	922	968	962
999	933	999	991

Règle pour Dimatis: Seulement le dernier chiffre de chaque expression numérique des trois chiffres de Calemes peut changer et cela selon la formule:

$$\text{dim} = 10 - \text{cal}$$

par exemple, «119» devient «111» («9» est remplacé par «1»), «148» devient «142», etc.

Règle pour Fresison: Seulement les deux derniers chiffres de chaque expression numérique de Calemes peuvent changer et cela de façon suivante: «2», «5» et «8» restent inchangés, les voisins immédiats supérieurs de ces trois chiffres («3», «6», «9») changent en inférieurs («1», «4», «7») et vice versa. Par exemple «119» change en «137», «148» en «168», etc.

Les 405 syllogismes qu'on peut former de cette façon seront appelés «syllogismes primaires». Nous verrons ensuite comment former les autres syllogismes *de re*.

Une des conditions fondamentales de la logique traditionnelle pour qu'un syllogisme soit en règle est qu'il n'ait pas plus de trois termes. Regardons par exemple Barbara 558:

$$\begin{array}{l} M \subset P \\ S \subset M \\ \hline S \subset P_p \end{array}$$

C'est une déduction absolument correcte (à partir de « $S \subset P$ » on obtient « $S \subset P_p$ » par descente), mais grâce aux «quatre» termes « S », « M », « P » et « P_p » on pourrait penser que ce n'est pas un syllogisme. Le point en discussion est s'il faut considérer « P » et « P_p » réellement comme termes différents. On accepte traditionnellement que quoiqu'un terme apparaisse une fois affirmé et une fois nié, il s'agit toujours du même terme exemple: « P » et « $\neg P$ » ou « $\neg M$ » et « M » en Cesare). De la même façon on accepte aussi qu'un seul terme apparaisse une

fois modalisé et une fois non modalisé, ou une fois modalisé avec «n» et une fois avec «p»; Barbara 558 est alors un syllogisme avec trois termes; «P» et «P_p» constituent un seul terme (sous deux formes différentes). En adoptant ce point de vue, on verra qu'un grand nombre de syllogismes additionnels peut se former par descente et ascension. Ces syllogismes seront appelés ici «syllogismes secondaires».

Il y a deux formes de justification des syllogismes secondaires (toujours par une démonstration formelle avec descente ou ascension). Forme (i) (applicable dans la justification de tout syllogisme secondaire): Une des deux prémisses sera remplacé par une plus forte, c'est-à-dire au lieu de:

$$\begin{array}{c} B \\ C \\ \hline D \end{array}$$

on aura:

$$\begin{array}{c} B \\ C^+ \\ \hline D \end{array}$$

(à partir de «(B . C) $\supset$ D» et de «C⁺ $\supset$ C» on obtient «(B . C⁺) $\supset$ D»). Par exemple à partir de Barbara 555 on démontre Barbara 525:

$$\begin{array}{c} M \subset P \\ S \subset M \\ \hline S \subset P \end{array}$$

$$\begin{array}{c} M \subset P \\ S \subset M_n \\ \hline S \subset P \end{array}$$

Forme (ii) (applicable seulement dans la justification d'une partie des syllogismes secondaires): La conclusion sera remplacée par une plus faible. Au lieu de:

$$\begin{array}{c} B \\ C \\ \hline D \end{array}$$

on aura:

$$\frac{B}{\frac{C}{D}}$$

Par exemple à partir de Barbara 555 on démontre Barbara 558:

$$\frac{M \subset P}{\frac{S \subset M}{S \subset P}}$$

$$\frac{M \subset P}{\frac{S \subset M}{S \subset P_p}}$$

On peut obtenir un syllogisme secondaire en modifiant une des deux occurrences de «*P*» (si l'on modifie les deux dans le même sens on parviendra simplement à un autre des syllogismes primaires), soit la de la première prémisse (selon la forme (i)) soit la de la conclusion (selon la forme (ii)). Chaque syllogisme secondaire construit par changement de «*P*» peut se justifier de ces deux façons. Par exemple Barbara 558:

$$\frac{M \subset P}{\frac{S \subset M}{S \subset P_p}}$$

peut être obtenu à partir du syllogisme primaire Barbara 555 selon la forme (ii) (ce cas a été indiqué) et à partir du syllogisme primaire Barbara 858:

$$\frac{M \subset P_p}{\frac{S \subset M}{S \subset P_p}}$$

selon la forme (i) (plaçant «*M* $\subset$ *P*» ou lieu de «*M* $\subset$ *P_p*»).

De la même façon on obtient des syllogismes secondaires en modifiant une des deux occurrences de «*S*».

Pour modifier une des occurrences de «*M*» il faut le faire dans la première ou dans la deuxième prémisse (les deux modifications doivent se faire selon la forme (i)). Ainsi pour obtenir Barbara 525:

$$\frac{M \subset P}{S \subset M_n} \\ \hline S \subset P$$

on peut partir ou bien de Barbara 425 (modification de la prémisses majeure) ou bien de Barbara 555 (modification de la mineure):

$$\frac{M_n \subset P}{S \subset M_n} \\ \hline S \subset P$$

$$\frac{M \subset P}{S \subset M} \\ \hline S \subset P$$

Ici nous choisissons, pour des raisons de facilité d'exposition, le procédé suivant: «S» et «P» seront modifiés dans la conclusion et «M» dans la deuxième prémisses.

En ce qui concerne la conclusion, par rapport à «P» il faut appliquer toujours la descente interne (exemple: « $S_i \subset P \supset S_i \subset P_p$ »), tandis que par rapport à «S» il faut appliquer l'ascension si la conclusion est une phrase «A» ou «E» (exemple: « $S_p \subset P_i \supset S \subset P_i$ ») ou la descente externe si la conclusion est une phrase «I» ou «O» (exemple: « $E! S \cap P_i \supset E! S_p \cap P_i$ »).

Que signifie tout cela numériquement si l'on combine les considérations par rapport à «P» avec celles par rapport à «S»? Supposons que pour une phrase «A» ou «E» nous avons le cas 5 («aa»). Par descente interne on peut obtenir 8 et par l'ascension 4 (à partir de 5) et 7 (à partir de 8). Ainsi au lieu de la seule conclusion 5 on peut avoir les conclusions 4, 5, 7, 8 (nous exprimons cela par «5 : 4, 7, 8»). Supposons que nous avons le même cas 5 pour une phrase «I» ou «O». Par descente interne nous avons de nouveau 8 et par descente externe 6 (à partir de 5) et 9 (à partir de 8), c'est-à-dire: 5 : 6, 8, 9. Ces deux types de changement s'appliquent aux derniers chiffres des syllogismes dans le schéma général parce qu'il s'agit de la conclusion. Par exemple, au lieu du seul syllogisme modal Barbara 555 nous avons maintenant en plus Barbara 554, Barbara 557 et Barbara 558 et au lieu de Darii 555 nous avons en plus Darii 556, Darii 558 et Darii 559.

En résumé, le changement du dernier chiffre, opéré selon

les critères mentionnés, indique les nouveaux syllogismes (secondaires) qu'on peut obtenir par descente ou ascension appliquées à «*P*» ou à «*S*» dans la conclusion; on a la règle (a) pour les phrases «*A*» et «*E*» et la règle (b) pour les phrases «*I*» et «*O*»:

règle (a)	règle (b)
1 : 4, 7	1 : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
2 : 1, 4, 5, 7, 8	2 : 3, 5, 6, 8, 9
3 : 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9	3 : 6, 9
4 : 7	4 : 5, 6, 7, 8, 9
5 : 4, 7, 8	5 : 6, 8, 9
6 : 4, 5, 7, 8, 9	6 : 9
7 : —	7 : 8, 9
8 : 7	8 : 9
9 : 7, 8	9 : —

En ce qui concerne le «*M*» dans la deuxième prémisses, il y a trois possibilités: (c) La deuxième prémisses est de la forme « $S \subset M$ » ou « $E! S \cap M$ » («*M* éventuellement nié»), alors la nouvelle prémisses doit être plus forte selon la descente interne, par exemple: 5 : 2. (d) La deuxième prémisses est de la forme « $M \subset S$ » («*S*» éventuellement nié»), alors la nouvelle prémisses doit être plus forte selon l'ascension, par exemple: 5 : 6. (e) La deuxième prémisses est de la forme « $E! M \cap S$ » («*S*» éventuellement nié»), alors la nouvelle prémisses doit être plus forte selon la descente externe, par exemple: 5 : 4. Ces trois changements s'appliquent aux deuxièmes chiffres du schéma général, parce qu'il s'agit de la deuxième prémisses. Par exemple au lieu du syllogisme secondaire (introduit par changement de conclusion) Barbara 558 nous avons maintenant aussi le syllogisme secondaire Barbara 528, au lieu de Disamis (secondaire) 559 nous avons aussi Disamis 569 et au lieu de Ferison (primaire) 555 nous avons aussi Ferison 545.

En résumé, le changement du deuxième chiffre indique les nouveaux syllogismes secondaires qu'on peut obtenir si l'on remplace la deuxième prémisses par une plus forte par rapport «*M*». Il est utile de se rendre compte que (c) se réfère aux fi-

gures I et II, (d) aux deuxièmes prémisses de la forme «A» et «E» dans les figures III et IV et (e) aux deuxièmes prémisses de la forme «I» et «O» dans les figures III et IV. Alors nous avons les trois règles correspondantes:

règle (c)	règle (d)	règle (e)
1 : —	1 : 2, 3	1 : —
2 : —	2 : 3	2 : 1
3 : —	3 : —	3 : 1, 2
4 : 1	4 : 5, 6	4 : —
5 : 2	5 : 6	5 : 4
6 : 3	6 : —	6 : 4, 5
7 : 1, 4	7 : 8, 9	7 : —
8 : 2, 5	8 : 9	8 : 7
9 : 3, 6	9 : —	9 : 7, 8

Les modifications possibles de la conclusion signifient, comme on voit, la quadruplication du nombre des syllogismes, et les modifications de la deuxième prémisses signifient encore une duplication. Ainsi au lieu des 405 syllogismes primaires on a 3240 syllogismes modaux *de re* (y compris les primaires).

4. *Phrases modales de dicto*: Dans ce qui suit nous considérons les affirmations de vérité (et de fausseté) qu'on peut faire sur les phrases de type «A», «E», «I» et «O». Quoique la phrase dont on affirme la vérité ou la fausseté soit universelle ou particulière, l'affirmation même, en métalangue, est une phrase singulière (la phrase «...» est vraie, ou: la phrase «...» appartient à la classe des phrases vraies). L'affirmation de la vérité d'une phrase *s* (symboliquement «*Vs*») ou de la non-vérité ou fausseté de *s* («*cVs*») peut être modalisée de façon que dans certains cas *s* est nécessairement vraie («*V_ns*») ou nécessairement non-vraie («*(cV)_ns*») ou possiblement vraie («*V_ps*»), etc. Il peut arriver aussi que *s* soit non nécessairement vraie («*cV_ns*»), etc. Nous disposons ainsi d'un certain nombre de classes de phrases comme *V*, *cV*, *V_n* etc., d'une façon analogue aux classes d'un niveau plus bas comme *P*, — *P*, *P_n* etc.

Les théorèmes 14 et 15 démontrés dans [18] sont applicables aussi aux classes *V_n*, *V* et *V_p* de façon que nous avons *de dicto*

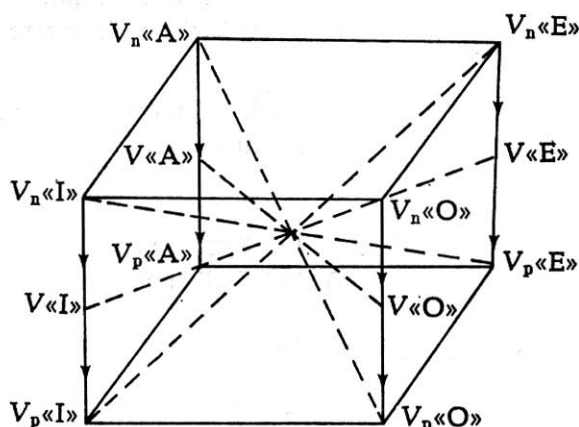
également les théorèmes de graduation:

$$\begin{array}{ll} V_n \subset V & (\text{c'est-à-dire: } V_n s \supset Vs) \\ V \subset V_p & (\text{c'est-à-dire: } Vs \supset V_p s) \end{array}$$

Les théorèmes de négation *de dicto* permettent de réduire toutes les formes niées des prédicats « V_n », « V » et « V_p » aux formes non niées. Dans ces «métaexpressions», «neg» symbolise le signe de la négation de phrases, «conj» le signe de la conjonction, «imp» celui de l'implication et «eq» celui de l'équivalence. Nous utiliserons les parenthèses pointues pour délimiter clairement la partie qui fait référence à la phrase respective si elle est formée de plus d'un symbole. Ainsi nous avons (à partir des théorèmes AP1, T19, T23 de [18]):

$$\begin{array}{l} Vs \equiv \sim V \langle \text{neg } s \rangle \\ V_n s \equiv \sim V_p \langle \text{neg } s \rangle \end{array}$$

Cela signifie: $V\langle A \rangle$ et $V\langle O \rangle$ sont contradictoires (« $\equiv \sim$ ») de même que $V\langle E \rangle$ et $V\langle I \rangle$ (parce que, comme nous avons vu dans la section 1, « O » est neg « A » et « I » est neg « E »). Sont également contradictoires les paires: $V_n\langle A \rangle - V_p\langle O \rangle$, $V_p\langle A \rangle - V_n\langle O \rangle$, $V_n\langle E \rangle - V_p\langle I \rangle$ et $V_p\langle E \rangle - V_n\langle I \rangle$. En utilisant tous ces résultats on peut construire un nouveau cube de l'opposition (analogue aux antérieurs de la section 2). On peut introduire aussi des flèches pour représenter maintenant les théorèmes de graduation:



Un autre théorème important, AR de [18], (avec «B» comme *abréviation* d'une phrase et « s_B » comme expression qui *symbolise* la phrase) est:

$$B \equiv Vs_B$$

C'est-à-dire, la phrase «B» seule est équivalente à l'affirmation de la vérité de «B»; par exemple:

$$S \subset P \equiv V\langle S \subset P \rangle$$

Par des résultats élémentaires de la logique mathématique et le théorème antérieur on démontre que si « Vs » et « $V\langle s \text{ eq } t \rangle$ », alors « Vt ».

Deux résultats similaires pour V_n et V_p (T30 et T31 de [18]) sont: Si « V_ns » et « $V_n\langle s \text{ eq } t \rangle$ » alors « V_nt ». Si « V_ps » et « $V_n\langle s \text{ eq } t \rangle$ » (avec «nécessaire») alors « V_pt ». Les trois règles seront appelées ici «règles de l'équivalence».

La plupart des logiciens aussi bien traditionnels que modernes ont considéré que (au moins) les vérités de la logique sont des vérités nécessaires. Une grande partie de la syllogistique modale ne peut pas être justifiée si l'on n'accepte pas ce principe au moins pour la partie fondamentale de la logique. C'est ce qu'établit la «règle de nécessitation», justifiée dans [18]: Si la phrase s correspond à un théorème du système fonctionnel élémentaire alors « V_ns » est un théorème de notre système modal.

Par exemple les théorèmes de la conversion de «E» et «I» appartiennent au système fonctionnel élémentaire, de façon que nous avons:

$$\begin{aligned} V_n\langle S \subset \neg P \rangle &\equiv P \subset \neg S \\ V_n\langle E! S \cap P \rangle &\equiv E! P \cap S \end{aligned}$$

Supposons que nous ayons en plus:

$$V_n\langle S \subset \neg P \rangle$$

alors on obtient selon la règle de l'équivalence pour V_n :

$$V_n \langle P \subset \neg S \rangle$$

Supposons que nous ayons:

$$V_p \langle S \subset \neg P \rangle$$

alors on obtient de la même façon (règle de l'équivalence pour V_p):

$$V_p \langle P \subset \neg S \rangle$$

Des résultats analogues peuvent s'obtenir par rapport à la conversion de «I», c'est-à-dire de:

$$V_n \langle E ! S \cap P \rangle$$

on obtient:

$$V_n \langle E ! P \cap S \rangle$$

et la même chose avec « V_p ». Ainsi, contrairement à la situation de *re*, nous avons de *dicto* toujours la conversion de «E» et de «I» par rapport à V_n et V_p .

5. *Les syllogismes modaux de dicto*: Pour chacun des 15 syllogismes catégoriques on peut démontrer 11 syllogismes modaux de *dicto* qui ont une des formes suivantes:

<u>nnn</u>	<u>nna</u>	<u>nnp</u>	<u>naa</u>	<u>nap</u>	
$V_n s_1$	$V_n s_1$	$V_n s_1$	$V_n s_1$	$V_n s_1$	
$V_n s_2$	$V_n s_2$	$V_n s_2$	$V_s s_2$	$V_s s_2$	
$V_n t$	V_t	$V_p t$	V_t	$V_p t$	
<u>ana</u>	<u>anp</u>	<u>aaa</u>	<u>aap</u>	<u>npp</u>	<u>pnp</u>
$V s_1$	$V s_1$	$V s_1$	$V s_1$	$V_n s_1$	$V_p s_1$
$V_n s_2$	$V_n s_2$	$V s_2$	$V s_2$	$V_p s_2$	$V_n s_2$
V_t	$V_p t$	V_t	$V_p t$	$V_p t$	$V_p t$

Les combinaisons des trois lettres «*n*» (pour « $V_n s$ »), «*a*» (pour « V_s ») et «*p*» (pour « $V_p s$ ») sur chaque forme seront utilisées pour faire référence à la forme respective. Ainsi on parlera de Barbara *nnn* ou de Festino *pnp*, si l'on a :

$$\frac{V_n \langle M \subset P \rangle \\ V_n \langle S \subset M \rangle}{V_n \langle S \subset P \rangle}$$

$$\frac{V_p \langle P \subset \neg M \rangle \\ V_n \langle E ! S \cap M \rangle}{V_p \langle E ! S \cap \neg P \rangle}$$

Il suffit de justifier les six formes principales (avec les trois lettres soulignées), les autres cinq peuvent se démontrer à partir des précédentes par les théorèmes de graduation. D'abord quatre lemmes seront indiqués, qui sont utiles dans le procès de la justification.

Lemme 1: Tous les syllogismes catégoriques formulés comme implications correspondent à des théorèmes du système fonctionnel élémentaire et sont pour cette raison (selon la règle de nécessité) des vérités nécessaires.

Lemme 2: A partir de « $V_n \langle s \text{ imp } t \rangle$ » on obtient « $V_n s \supset V_n t$ » et on obtient aussi « $V_p s \supset V_p t$ » (T27 et T28 de [18]).

Lemme 3: A partir de « $V_n s$ » et de « $V_n t$ » on obtient « $V_n \langle s \text{ conj } t \rangle$ » (T29 de [18]).

Lemme 4: A partir de « $V_n s$ » et de « $V_p t$ » (ou de « $V_p s$ » et de « $V_n t$ ») on obtient « $V_p \langle s \text{ conj } t \rangle$ » (T32 de [18]).

Pour démontrer maintenant *nnn* on a d'un côté chaque syllogisme catégorique comme vérité nécessaire en forme d'implication, c'est-à-dire « $V_n \langle (s_1 \text{ conj } s_2) \text{ imp } t \rangle$ » (lemme 1), d'où, selon lemme 2, « $V_n \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle \supset V_n t$ ». D'un autre côté nous avons les deux prémisses « $V_n s_1$ » et « $V_n s_2$ » qui donnent ensemble « $V_n \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle$ » (lemme 3). Alors (selon la règle du *modus ponens*) « $V_n t$ ».

Pour démontrer *aaa* on remplace d'un côté trois fois dans le syllogisme catégorique selon AR, ce qui donne « $(Vs_1 . Vs_2) \supset Vt$ ». D'un autre côté on a les prémisses « Vs_1 » et « Vs_2 », alors « Vt ».

Pour démontrer *naa* ou *ana* on applique à la prémisse avec « V_n » un théorème de graduation et on procède ensuite comme pour *aaa*.

Pour démontrer *npp* (ou *pnp*) on a d'un côté, comme pour *nnn*, $\langle V_n \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle \text{ imp } t \rangle$, d'où selon lemme 2 aussi $\langle V_p \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle \supset V_p t \rangle$. D'un autre côté nous avons les deux prémisses $\langle V_n s_1 \rangle$ et $\langle V_p s_2 \rangle$ (ou $\langle V_p s_1 \rangle$ et $\langle V_n s_2 \rangle$) qui donnent $\langle V_p \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle \rangle$ (lemme 4); alors $\langle V_p t \rangle$.

Les 165 syllogismes modaux *de dicto* sont tout ce qu'on peut justifier ici si l'on ne sort pas du champ des syllogismes et si l'on applique les restrictions indiquées dans l'introduction.

Quelques auteurs traditionnels ont utilisé une règle qu'on pourrait appeler «règle du pire» (*peiores semper sequitur conclusio partem*), selon laquelle la conclusion suit la plus faible des deux prémisses (où $\langle V_p \rangle$ est plus faible que $\langle V \rangle$ et $\langle V \rangle$ plus faible que $\langle V_n \rangle$). Effectivement toutes les six formes principales satisfont la règle du pire (les cinq autres seraient acceptées aussi comme sous-produits de la règle du pire); le véritable conflit se présente par rapport aux formes *app*, *pap* et *ppp* qui pourraient être acceptées selon la règle du pire et qui produisent des contradictions (et des irrégularités par rapport à la règle même) aussi bien dans la logique traditionnelle que dans la moderne.

Avant de chercher des contradictions on pourrait bien se demander où se trouve le «trou» dans une justification supposée de ces trois formes. On a, comme dans les cas *npp* et *pnp* $\langle V_p \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle \supset V_p t \rangle$, mais on n'a pas quelque chose d'analogue au lemme 4: De $\langle V_p s_1 \rangle$ et de $\langle V_p s_2 \rangle$ on n'obtient pas $\langle V_p \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle \rangle$ (ni de $\langle V s_1 \rangle$ et de $\langle V_p s_2 \rangle$ ou de $\langle V_p s_1 \rangle$ et de $\langle V s_2 \rangle$). Ainsi on n'obtient pas $\langle V_p t \rangle$.

Pour indiquer maintenant un exemple des contradictions liées à l'acceptation de *app*, *pap* ou *ppp*, soit *Por* la classe des produits de porcelaine et *Trans* la classe des objets transparents et ayons deux prémisses parfaitement acceptables:

$$\begin{aligned} V_p \langle \text{Por} \subset \neg \text{Trans} \rangle \\ V_p \langle E! \text{Trans} \cap \text{Por} \rangle \end{aligned}$$

alors on obtiendrait selon *Ferio ppp* (!):

$$V_p \langle E! \text{Trans} \cap \neg \text{Trans} \rangle$$

c'est-à-dire, la phrase «Quelques objets transparents ne sont pas transparents» devrait être acceptée comme vérité possible, tandis qu'elle n'est pas possiblement vraie, parce que nous avons un théorème du système fonctionnel élémentaire et par suite la vérité nécessaire correspondante $V_n \ll \sim E! Trans \cap - Trans \gg$, d'où, selon un théorème de négation *de dicto*: $\sim V_p \ll E! Trans \cap - Trans \gg$.

Avec quelques spécifications additionnelles par rapport à «*Por*» (par exemple sur l'épaisseur des produits de porcelaine) on pourrait remplacer la première prémisse par:

$$V \ll Por \subset - Trans \gg$$

et on aura alors un exemple de *Ferio app* (!). En général pour les trois formes (combinées avec tous les syllogismes catégoriques) on peut trouver des exemples qui conduisent à des contradictions.

Pour sauver la règle du pire on a exigé quelquefois que les deux prémisses « V_p » (ou une « V_p » et une « V ») soient possiblement vraies ensembles, c'est-à-dire que leur conjonction soit possiblement vraie ($V_p \langle s_1 \text{ conj } s_2 \rangle$). Alors il n'y a plus de «trou», la justification serait analogue à celle de *npp* ou *pnp*; mais, avec cette exigence additionnelle, on est sorti hors du champ des syllogismes (avec des exigences additionnelles on pourrait justifier même beaucoup de nouveaux syllogismes catégoriques).

En acceptant *app*, *pap* ou *ppp* (avec ou sans exigences additionnelles) on parvient aussi à d'autres curiosités. Pour chaque syllogisme catégorique (en forme d'implication):

$$(s_1 . s_2) \supset t$$

il y a un autre équivalent (par des transformations logiques simples):

$$(s_1 . \sim t) \supset \sim s_2$$

(et aussi: $(\sim t . s_2) \supset \sim s_1$). Cette équivalence vaut aussi pour

les syllogismes modaux (*de re* et) *de dicto*. Ainsi:

$$(V_i s_1 . V_j s_2) \supset V_k t$$

est équivalent à:

$$(V_i s_1 . \sim V_k t) \supset \sim V_j s_2$$

c'est-à-dire, selon les théorèmes de négation *de dicto* (la prime qui suit un index indique l'index inverse):

$$(V_i s_1 . V_k, <\text{neg } t>) \supset V_j, <\text{neg } s_2>$$

Par exemple le syllogisme *de dicto* Barbara *nnn*:

$$(V_n \langle A \rangle . V_n \langle A \rangle) \supset V_n \langle A \rangle$$

est équivalent de cette façon au syllogisme *de dicto* Baroco *npp*:

$$(V_n \langle A \rangle . V_p \langle O \rangle) \supset V_p \langle O \rangle$$

Tout cela ne produit pas de problèmes pour les 165 syllogismes *de dicto* présentes ici; mais si l'on veut accepter aussi les formes *app*, *pap* ou *ppp* on aura comme formes équivalentes *ann*, *pna* et *pnn* (et aussi *npa*, *nan* et *nnp*), qui ne correspondent plus à la règle du pire. C'est cela qu'on a appelé précédemment «irrégularités par rapport à la règle même»⁽²⁾.

6. *Equivalences et implications entre phrases modales de dicto et de re*: Pour établir une connexion entre les modalités *de dicto* et *de re* nous avons les quatre équivalences suivantes qui sont toutes dues aux théorèmes AR:

$$V \langle A \rangle \equiv A_{aa}$$

$$V \langle E \rangle \equiv E_{aa}$$

(²) Un système qui est tout à fait différent de celui montré ici et qui s'éloigne assez de la logique traditionnelle, est développé dans [10]; dans ce système qui va plus loin que la règle du pire les trois formes sont acceptées.

$$V\langle I \rangle \equiv I_{aa}$$

$$V\langle O \rangle \equiv O_{aa}$$

En plus il y a 16 théorèmes fondamentaux d'implication, appelés ici «implications directes» («ID»), 8 *de dicto* — *de re* et 8 dans le sens inverse:

$$\text{ID1 } V_n\langle A \rangle \supset A_{nn}$$

$$\text{ID2 } V_n\langle E \rangle \supset E_{nn}$$

$$\text{ID3 } V_n\langle A \rangle \supset A_{pp}$$

$$\text{ID4 } V_n\langle E \rangle \supset E_{pp}$$

$$\text{ID5 } V_p\langle A \rangle \supset A_{np}$$

$$\text{ID6 } V_p\langle E \rangle \supset E_{np}$$

$$\text{ID7 } V_p\langle I \rangle \supset I_{pp}$$

$$\text{ID8 } V_p\langle O \rangle \supset O_{pp}$$

$$\text{ID9 } A_{pn} \supset V_n\langle A \rangle$$

$$\text{ID10 } E_{pn} \supset V_n\langle E \rangle$$

$$\text{ID11 } I_{nn} \supset V_n\langle I \rangle$$

$$\text{ID12 } O_{nn} \supset V_n\langle O \rangle$$

$$\text{ID13 } I_{np} \supset V_p\langle I \rangle$$

$$\text{ID14 } O_{np} \supset V_p\langle O \rangle$$

$$\text{ID15 } I_{pn} \supset V_p\langle I \rangle$$

$$\text{ID16 } O_{pn} \supset V_p\langle O \rangle$$

ID1, ID7, ID11 et ID13 ont été démontrés explicitement dans [18] (T38, T37, T34 et T33). La démonstration des autres ID impaires n'offre pas de difficulté et la démonstration des ID paires est analogue à celle des impaires précédentes.

Les équivalences et implications mentionnées peuvent être combinées avec d'autres implications (descente et ascension pour la partie *de re* et graduation pour la partie *de dicto*), de façon qu'on obtienne des nouvelles implications *de dicto* — *de re* ou vice versa, comme par exemple:

$$V\langle A \rangle \supset A_{ap} \quad (\text{équivalence et descente interne})$$

$$V_n\langle A \rangle \supset A_{np} \quad (\text{ID3 et ascension})$$

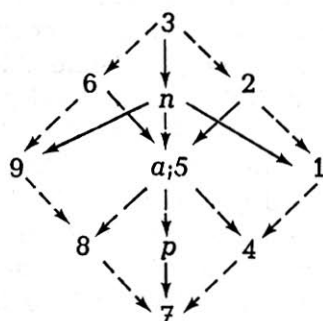
$$A_{pn} \supset V_p\langle A \rangle \quad (\text{ID9 et graduation})$$

$$V_n\langle E \rangle \supset E_{aa} \quad (\text{graduation et équivalence})$$

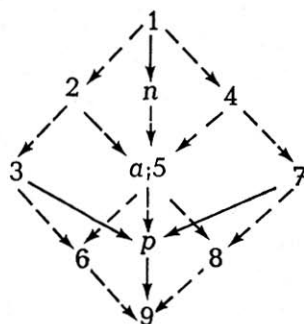
Des représentations graphiques pour toutes ces implications seront indiquées, la première pour les phrases «A» et «E», la deuxième pour les phrases «I» et «O». Les chiffres de

«1» à «9» sont ceux introduits dans la section 2, les lettres «*n*», «*a*» et «*p*» sont celles de la section 5. Ainsi les trois exemples pour les phrases «A» seraient: *a* implique 8, *n* implique 7, 3 implique *p*. Les flèches discontinues indiquent les implications qui correspondent à la descente ou ascension *de re* et à la graduation *de dicto*, les flèches continues indiquent les implications directes. Pour indiquer les équivalences; «*a*» et «5» ont été présentées ensemble (séparées par un point virgule). En combinant les flèches on peut trouver les implications établies entre ces diverses phrases.

«A» et «E»



«I» et «O»



Tous les syllogismes *de dicto*, exceptés ceux de la forme *nnn*, *npp* et *pnp* ont une deuxième justification; ils peuvent être démontrés à partir des syllogismes correspondants *de re* 555 en utilisant les implications indiquées en haut. Au lieu de 5 comme prémisses on utilise une équivalente (*a*) ou une plus forte (*n*), au lieu de 5 comme conclusion on utilise une équivalente ou une plus faible (*p*). Ainsi à partir de Barbara 555 on obtient par exemple Barbara *nnp*.

7. *Les syllogismes combinés*: Un syllogisme modal de deux composantes *de re* et un *de dicto* ou des deux composantes *de dicto* et un *de re* sera appelé «syllogisme combiné». On symbolisera les composantes *de re* par les chiffres de «1» à «9»

et les composantes de dicto par «*n*», «*a*» ou «*p*». Nous avons par exemple Barbara *nn1*, Barbara *p17* et Darii *n1n*:

$$\frac{V_n \langle M \subset P \rangle}{V_n \langle S \subset M \rangle} \\ \hline S_n \subset P_n$$

$$\frac{V_p \langle M \subset P \rangle}{S_n \subset M_n} \\ \hline S_n \subset P_p$$

$$\frac{V_n \langle M \subset P \rangle}{E! S_n \cap M_n} \\ \hline V_n \langle E! S \cap P \rangle$$

Les syllogismes combinés sont justifiés ou bien en partant des syllogismes *de re* ou bien en partant des syllogismes *de dicto*, mais toujours de la même façon par les équivalences et implications de la section antérieure: On utilise comme nouvelle prémisse une équivalente ou une plus forte ou comme nouvelle conclusion une équivalente ou une plus faible. Ainsi en partant de Barbara *nnn* on obtient Barbara *nn1* (1 est plus faible que *n* pour les phrases «*A*»), en partant de Barbara *717* on obtient Barbara *p17* (*p* est plus forte que 7 pour «*A*».)

Il y a des syllogismes combinés qui peuvent être justifiés en partant aussi bien d'un syllogisme *de re* que d'un *de dicto*. Par exemple Barbara *nn1* peut être justifié aussi en partant de Barbara *111* (*n* est plus forte que 1 pour «*A*»), Barbara *33n* peut être justifié en partant de Barbara *333* ou en partant de Barbara *nnn*, etc.

Mais on trouve aussi des syllogismes combinés qui peuvent être justifiés seulement en partant d'un syllogisme *de re* (exemple: Barbara *p17*) ou seulement en partant d'un syllogisme *de dicto* (exemples: Darii *n1n* en partant de Darii *nnn*, Barbara *3pp* en partant de Barbara *npp*).

Il y a sûrement plus de 3000 syllogismes combinés, mais le nombre précis n'a pas été déterminé ici et aucune liste complète de ces syllogismes ne sera présentée.

8. *Les superpositions de modalités*: On peut distinguer trois types de superpositions de modalités, les superpositions *de re*, *de dicto* et combinées.

Dans une phrase du type «*A*», «*E*», «*I*», «*O*» il y a superposi-

tion de *re* si «*S*» ou «*P*» ou les deux sont accompagnés de plus d'un terme modal (laissant de côté «actuellement»), par exemple «Tous ceux qui sont possiblement *S* sont *possiblement nécessairement P*» (syboliquement « $S_p \subset (P_n)_p$ » ou d'une façon plus simple « $S_p \subset P_{(pn)}$ ») ou «Quelques uns qui sont *nécessairement possiblement S* sont possiblement non-*P*» (« $E \mid S_{(np)} \cap (-P)_p$ »).

On peut construire des systèmes modaux avec des théorèmes spéciaux, appelés «théorèmes de réduction»^(*), qui permettent de réduire une expression de classe avec plusieurs termes modaux à une expression de classe avec un seul terme modal:

$$\begin{aligned} S_{(nn)} &= S_n \\ S_{(np)} &= S_p \\ S_{(pn)} &= S_n \\ S_{(pp)} &= S_p \end{aligned}$$

On peut construire aussi des systèmes dans lesquels il n'y a pas de réduction pour les combinaisons de «*n*» et «*p*»; mais dans tous les systèmes du type considéré ici on a la réduction par rapport à «*a*», c'est-à-dire qu'on obtient:

$$\begin{aligned} S_{(an)} &= S_{(na)} = S_n \\ S_{(ap)} &= S_{(pa)} = S_p \end{aligned}$$

Des phrases avec superpositions de *re* peuvent apparaître dans les syllogismes d'une façon primaire, c'est-à-dire par substitution, d'une façon secondaire c'est-à-dire par descente ou ascension appliquées aux prémisses ou à la conclusion, et encore en utilisant les théorèmes de réduction (si le système dans lequel on travaille les admet). Trois exemples qui partent de Darii 858 indiquent les trois cas (substitution de « $S_{(nn)}$ » au lieu

(*) On peut obtenir les 4 théorèmes de réduction de *re* (et aussi ceux de *dicto*) avec un seul axiome additionnel dans le système de [18]:

$$F^{**}I, k, x_1, \dots, x_n = F^*k, x_1, \dots, x_n$$

de «S»; par descente interne appliquée à « $M \subset P_p$ »; par réduction en remplaçant « P_p » par « $P_{(np)}$ »):

$$\begin{array}{ccc} \frac{M \subset P_p}{E! S_{(nn)} \cap M} & \frac{M \subset P_{(np)}}{E! S \cap M} & \frac{M \subset P_p}{E! S \cap M} \\ \hline E! S_{(nn)} \cap P_p & E! S \cap P_p & E! S \cap P_{(np)} \end{array}$$

La superposition de *dicto* est analogue à celle de *re* dans un niveau de langue plus haut. Ainsi nous avons des phrases comme «s est nécessairement nécessairement vraie» (« $V_{(nn)}s$ »), «s est possiblement nécessairement vraie» (« $V_{(pn)}s$ »), etc. On peut avoir aussi (selon le système) des théorèmes de réduction, comme:

$$V_{(nn)}s \equiv V_ns$$

Par rapport à «a» on a de nouveau toujours la réduction.

Tout cela peut s'appliquer aux phrases «A», «E», «I» et «O» et on peut former des syllogismes où apparaissent une ou plusieurs phrases avec superposition de *dicto*.

Dans une phrase avec superposition combinée le prédicat en métalangue «être vrai» (éventuellement modalisé, peut être même avec superposition) s'applique à une phrase dont au moins une des expressions de classe est modalisée (peut-être avec superposition), de façon que nous avons:

$$\begin{array}{l} V\langle S \subset P_n \rangle \\ V_n\langle S \subset P_n \rangle \\ V_{(np)}\langle S \subset P_n \rangle \\ V_{(np)}\langle S \subset P_{(nn)} \rangle \end{array}$$

Les divers syllogismes qu'on peut former avec toutes ces phrases ne seront pas considérés ici. En principe leur traitement n'apporte rien de nouveau; on applique des procédés analogues à ceux qui ont été indiqués dans les sections antérieures.

9. *Les syllogismes d'Aristote avec «nécessaire»*: Dans cette section et les suivantes quelques unes des analyses formelles

précédentes seront appliquées aux travaux sur les syllogismes modaux de trois auteurs fondamentaux, Aristote (384-322), Théophraste (372-287) et Occam (1285-1359), avec l'intention que le traitement indiqué permette quelques comparaisons instructives et nous aide à comprendre certains points des travaux cités.

En ce qui concerne Aristote, une grande partie du matériel traité ici ne coïncide pas avec la syllogistique aristotélicienne. D'un côté (selon l'introduction) ici seulement 15 syllogismes catégoriques et les syllogismes modaux correspondants seront traités et seulement les termes modaux «nécessaire» «possible» et leurs négations. D'un autre côté la syllogistique d'Aristote développe principalement les syllogismes avec «nécessaire» et «contingent» tandis que «possible» (au sens traité ici) n'apparaît qu'occasionnellement dans la conclusion des syllogismes avec «contingent». Aussi, en général, Aristote utilise au plus une fois «nécessaire» ou «possible» dans une phrase (à l'exception du terme «nécessaire» qu'il applique aux syllogismes entiers au sens que la conclusion suit nécessairement aux prémisses et qui pourrait être considéré comme résultat d'une application de la règle de nécessitation). On ne trouve pas dans sa logique un traitement de la figure IV.

Avec toutes ces restrictions par rapport au matériel commun, nous avons le résumé suivant des idées d'Aristote, qui se trouve dans «Les premiers analytiques» I de chap. 8, 29b, 36 à chap. 11, 32a, 5 (une prémisses ou conclusion avec «nécessaire» sera mentionnée comme «prémisse (conclusion) N»⁽⁴⁾, une prémisses ou conclusion sans terme modal sera mentionnée comme «prémisse (conclusion) A»; les syllogismes catégoriques, c'est-à-dire AAA, ne seront pas traités ici).

Chap. 8: Aristote expose dans ce chapitre la théorie des syllogismes modaux avec deux prémisses N et une conclusion N. De façon analogue aux syllogismes catégoriques (q'il a traité quelques chapitres auparavant) pour lui les syllogismes de la

(4) Dans le traitement des syllogismes modaux de Théophraste nous parlerons aussi d'une "prémisse (conclusion) P" pour faire référence à une prémisses ou conclusion avec «possible».

figure I n'ont pas besoin d'une démonstration. Les autres syllogismes sont démontrés à partir de ceux de figure I par conversion (de «E» ou «I») d'une prémisses ou d'une prémisses et la conclusion, à l'exception des deux syllogismes dénommés postérieurement «Baroco» et «Bocardo», qui se justifient par ecthèse⁽⁵⁾.

Chap. 9: Les syllogismes de la figure I avec une prémisses *N* et une prémisses *A* ont une conclusion *N* si la première prémisses est *N*. D'une autre façon ils ont une conclusion *A*.

Chap. 10: Les syllogismes de la figure II avec une prémisses *N* et une prémisses *A* ont une conclusion *N* si la prémisses universelle négative est *N*. D'une autre façon ils ont une conclusion *A* (Festino *ANA* qui correspond à ce cas n'est pas mentionné). La justification se fait par conversion et ecthèse.

Chap. 11: Les syllogismes de la figure III (considérés ici) avec une prémisses *N* et une prémisses *A* ont une conclusion *N* si (i) avec deux prémisses affirmatives (une universelle et une particulière) l'universelle est *N* et (ii) avec une prémisses affir-

(⁵) En logique moderne l'ecthèse de Baroco II et Bocardo III se justifie de la façon suivante (sans considérer pour le moment les termes modaux):

Baroco		Bocardo	
$P \subset M$	(1)	$E \mid M \cap \neg P$	(1)
$E \mid S \cap \neg M$	(2)	$M \subset S$	(2)
$(S \cap \neg M) \subset \neg M$	(3)	$(M \cap \neg P) \subset \neg P$	(3)
$(S \cap \neg M) \subset \neg P$	(4)	$(M \cap \neg P) \subset S$	(4)
$E \mid (S \cap \neg M) \cap \neg P$	(5)	$E \mid S \cap \neg P$	(5)
$E \mid S \cap \neg P$	(6)		

Il faut démontrer par rapport à Baroco, qu'en partant des prémisses (1) et (2) on obtient la conclusion (6): (3) qui correspond à l'ecthèse proprement dite est un théorème logique élémentaire; (4) est obtenu en partant de (1) et (3) grâce à Camestres II déjà justifié; (5) est obtenu en partant de (2) et (4) grâce à un théorème logique élémentaire et aussi (6) en partant de (5). Bocardo est démontré de façon analogue: (3) est théorème; (4) en partant de (2) par théorème et (5) en partant de (1), (3) et (4) par Felapton III déjà justifié. Felapton n'apparaît pas entre les syllogismes traités ici (voir introduction). Dans notre traitement il est correct seulement s'il possède une prémisses d'existence additionnelle, qui est (1) dans cette application précise.

mative et une négative (une universelle et une particulière) l'universelle négative est *N*. D'une autre façon ils ont une conclusion *A*. La justification se fait par conversion et ecthèse.

On peut dire que la syllogistique modale d'Aristote a toujours présenté beaucoup de problèmes. Nous verrons de suite que ni avec un traitement *de re* ni avec un *de dicto*, tous ces syllogismes peuvent être justifiés (et cela vaut aussi bien pour la logique traditionnelle que pour le système présenté ici). On ne trouve pas dans Aristote une analyse approfondie de la phrase modale qui pourrait indiquer une préférence nette pour le traitement *de re* ou celui *de dicto*. Ce qu'on connaît, c'est-à-dire les syllogismes et les procédés de justification, pourrait s'expliquer, à mon avis, plutôt par un mélange des deux traitements. En raison de la complexité du thème et du fait qu'Aristote était le premier à le traiter systématiquement, cela est bien compréhensible; probablement en procédant d'une façon intuitive il a utilisé les deux traitements ensemble, parce que quelquefois les deux ont donné les mêmes résultats. Au fond dans la partie de la logique modale qui nous intéresse ici, on pourrait réduire tous les syllogismes non justifiables à une seule erreur de base, celle d'appliquer la conversion *de dicto* de «E» et «I» (section 4) à des phrases modales *de re* ⁽⁶⁾.

Le schéma suivant indique le traitement d'Aristote et les traitements formels *de re* et *de dicto* correspondants (où ils sont applicables). *De re* nous avons seulement les phrases 2 (prédicat avec «nécessaire») et 5 (prédicat sans terme modal): ⁽⁷⁾

⁽⁶⁾ Il n'y a pas de conversion *de re* pour « $S \subset (-P)_n$ » et « $E \mid S \cap P_n$ », qui conserve le même caractère modal (voir section 2), et on ne peut pas appliquer la conversion *de dicto* à « $S \subset (-P)_n$ » ou « $E \mid S \cap P_n$ ».

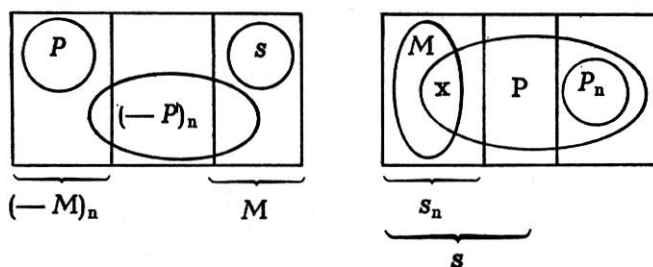
⁽⁷⁾ Quelquefois on a considéré d'autres possibilités, comme par exemple 1; mais même en utilisant 1 et 2 combinés les résultats principaux de cette section ne changent pas.

	Aristote	de re	de dicto
I	Barbara <i>NNN</i>	Barbara 222	Barbara <i>nnn</i>
	Celarent <i>NNN</i>	Celarent 222	Celarent <i>nnn</i>
	Darii <i>NNN</i>	Darii 222	Darii <i>nnn</i>
	Ferio <i>NNN</i>	Ferio 222	Ferio <i>nnn</i>
II	Baroco <i>NNN</i>	—	Baroco <i>nnn</i>
	Camestres <i>NNN</i>	—	Camestres <i>nnn</i>
	Cesare <i>NNN</i>	—	Cesare <i>nnn</i>
	Festino <i>NNN</i>	—	Festino <i>nnn</i>
III	Bocardo <i>NNN</i>	Bocardo 222	Bocardo <i>nnn</i>
	Datisi <i>NNN</i>	Datisi 222	Datisi <i>nnn</i>
	Disamis <i>NNN</i>	Disamis 222	Disamis <i>nnn</i>
	Ferison <i>NNN</i>	Ferison 222	Ferison <i>nnn</i>
I	Barbara <i>NAN</i>	Barbara 252	—
	Barbara <i>ANA</i>	Barbara 525	Barbara <i>ana</i>
	Celarent <i>NAN</i>	Celarent 252	—
	Celarent <i>ANA</i>	Celarent 525	Celarent <i>ana</i>
	Darii <i>NAN</i>	Darii 252	—
	Darii <i>ANA</i>	Darii 525	Darii <i>ana</i>
	Ferio <i>NAN</i>	Ferio 252	—
	Ferio <i>ANA</i>	Ferio 525	Ferio <i>ana</i>
II	Baroco <i>NAA</i>	Baroco 255	Baroco <i>naa</i>
	Baroco <i>ANA</i>	Baroco 525	Baroco <i>ana</i>
	Camestres <i>ANN</i>	—	—
	Camestres <i>NAA</i>	Camestres 255	Camestres <i>naa</i>
	Cesare <i>NAN</i>	—	—
	Cesare <i>ANA</i>	Cesare 525	Cesare <i>ana</i>
	Festino <i>NAN</i>	—	—

III	Bocardo NAA	Bocardo 255	Bocardo <i>naa</i>
	Bocardo ANA	Bocardo 525	Bocardo <i>ana</i>
	Datissi NAN	Datissi 252	—
	Datissi ANA	Datissi 525	Datissi <i>ana</i>
	Disamis ANN	—	—
	Disamis NAA	Disamis 255	Disamis <i>naa</i>
	Ferison NAN	Ferison 252	—
	Ferison ANA	Ferison 525	Ferison <i>ana</i>

Les syllogismes indiqués sont démontrés de la façon suivante (selon le schéma général et les règles de section 3): 222 de figure I en partant de 252 par (c); 222 de figure III en partant de 221 par (b); 252 de figure I dans le schéma; 525 de figure I en partant de 555 par (c); 255 de figure II en partant de 285 par (c); 525 de figure II en partant de 555 par (c); 252 de figure III dans le schéma; 255 de figure III en partant de 252 par (b) et 525 de figure III en partant de 524 par (b). Les syllogismes *de dicto* ont été démontrés dans la section 5.

Quelquefois dans le système utilisé ici il n'y a pas de syllogismes *de re* ou *de dicto* correspondants aux syllogismes d'Aristote, dans le cas *de re* on peut se convaincre de cela par une représentation graphique, ainsi pour Cesare NAN et Disamis ANN on a les contre-exemples:



On n'obtient ni « $S \subset (\neg P)_n$ » ni « $E! S \cap P_n$ » respectivement.

Si l'on suppose que le traitement d'Aristote a été en principe *de re* mais avec un recours fréquent aux considérations *de dicto*, spécialement dans la conversion, on peut expliquer les résultats auxquels il est parvenu. Tous ses syllogismes de

figure I ont leur analogue *de re*. Tous les cas sans analogue *de re* sont dus à la conversion; cela vaut explicitement pour Cesare, Camestres, Festino (les trois dans deux formes) et pour Disamis ANN et implicitement pour Baroco NNN. Dans la justification de ce dernier syllogisme par ecthèse Aristote a eu recours à Camestres NNN, justifié de son côté par conversion de dicto⁽⁸⁾. Aussi dans beaucoup de cas avec analogue *de re*, où l'on peut trouver une justification sans problème, Aristote a eu recours à la conversion *de dicto*.

Dans les syllogismes *de dicto* on peut appliquer la conversion *de dicto* sans problèmes, mais on n'a rien d'analogue aux syllogismes NAN de figure I, qui doivent servir de point de départ à l'application de la conversion.

Le recours aux syllogismes combinés n'arrange rien; là où il n'y a ni analogue *de re* ni *de dicto* (Cesare NAN, Camestres ANN, Festino NAN et Disamis ANN), il n'y a non plus d'analogue combiné.

10. *La syllogistique modale de Théophraste*: Ce qu'on connaît de la logique de Théophraste sont des fragments qui se trouvent dans Alexandre d'Aphrodisias et quelques autres commentateurs d'Aristote. Les fragments qui parlent des syllogismes modaux ne contiennent pas de citations précises mais seulement des affirmations de caractère assez général sur les opinions de Théophraste (et quelquefois aussi d'un autre logicien, Eudème, qui est mentionné ensemble avec Théophraste).

Dans ces fragments on voit que Théophraste, quoique continuateur de la logique aristotélicienne, s'est éloigné du chemin

(8) Baroco NNN n'est pas justifiable *de re* par ecthèse, tandis que toutes les autres formes de Baroco et toutes les formes de Bocardo pourraient être justifiées de cette façon, par exemple Bocardo NNN:

$$E \vdash M \cap (\neg P)_n \quad (1)$$

$$M \subset S_n \quad (2)$$

$$(M \cap (\neg P)_n) \subset (\neg P)_n \quad (3)$$

$$(M \cap (\neg P)_n) \subset S_n \quad (4)$$

$$E \vdash S \cap (\neg P)_n \quad (5)$$

De dicto tous les pas de l'ecthèse peuvent être établis par démonstration.

tracé par Aristote en quelques points assez notables, entre autres aussi par rapport à la syllogistique modale.

La première différence entre Aristote et Théophraste est que le dernier donne une claire préférence à la possibilité vis à vis de la contingence, préférée par Aristote. Tandis qu'Aristote justifiait les syllogismes catégoriques Baroco et Bocardo par réduction à l'absurde, il ne faisait pas la même chose avec les syllogismes modaux correspondants (dans ces cas il utilisait l'ecthèse), parce qu'il fallait aller du «non nécessairement» au «possiblement non», ce qu'on peut faire avec la possibilité unilatérale mais non avec la possibilité bilatérale, c'est-à-dire avec la contingence. Un des fragments, au contraire, explique avec quelques détails que Théophraste justifiait Baroco NNN et Bocardo NNN par réduction à l'absurde (en utilisant «possiblement» au sens indiqué ici de «non nécessairement non»). Néanmoins le traitement de Théophraste n'était pas toujours uniforme, quelquefois il avait recours à la possibilité bilatérale et peut-être même au «possible» dans le sens du «non nécessaire».

La deuxième différence est qu'on trouve chez Théophraste une préférence marquée pour le traitement de *dicto*. Il dit que, dans une prémisse non nécessaire, le lien entre le sujet et le prédicat ne sera pas nécessaire; cela suggère que pour lui on a:

phrase nécessaire = lien nécessaire entre sujet et prédicat
un point de vue qui correspond plutôt au traitement de *dicto*.

C'est dans la même direction que va l'utilisation (et probablement l'introduction dans la logique) de la règle du pire pour les syllogismes modaux (section 5). Un essai de justification pour cette règle s'appuie sur deux arguments principaux: l'analogie avec le traitement des phrases négatives et particulières (on trouve déjà chez Aristote des règles «du pire» correspondantes qui sont tout à fait acceptables dans la logique moderne) et la référence aux liens nécessaires ou non nécessaires, c'est-à-dire au traitement de *dicto*. Avec la règle du pire les syllogismes aristotéliens de la forme NAN et ANN sont refusés (ce qui est correct du point de vue purement de *dicto*), des syllogismes de la forme NPP et PNP sont introduits

(aussi correct) et en plus des autres comme *PAP* (ce qui n'est pas du tout correct du point de vue *de dicto*). La conversion (*de dicto*) peut être utilisée maintenant sans problèmes; elle est présentée avec beaucoup d'exemples.

11. *Les syllogismes modaux chez Occam*: Occam est sans doute un des plus grands auteurs en syllogistique modale. Par rapport au matériel présenté ici il ne développe pas la figure IV. D'un autre côté ici les phrases singulières et beaucoup de termes considérés comme modaux par Occam ne sont pas traitées, comme «contingent», «douteux», «croyable», «intelligible», «su» (*scitum*), etc. Aussi toute analyse temporelle est laissée de côté ici ⁽⁹⁾.

Par rapport à la partie commune entre la «*Summa Logicae*» et le présent article, on peut en donner le résumé suivant, selon l'ordre de la matière du livre mentionné. Après avoir traité les syllogismes catégoriques, Occam expose sa théorie des syllogismes modaux dans les chapitres 20 — 60 du livre III. Il commence par les syllogismes avec deux prémisses *N* (figure I, après figure II, après figure III). Puis ceux avec deux prémisses *P*, ceux avec deux prémisses du type «impossible» et après les syllogismes avec une prémisses *N* et une prémisses *A*, ceux avec une prémisses *P* et une prémisses *A*, etc. Pour les phrases il fait une distinction qui correspond pratiquement à celle *de re* (*in sensu divisionis*) — *de dicto* (*in sensu compositionis*), qu'il maintient pendant toute sa syllogistique. Cela signifie qu'on peut distinguer clairement les syllogismes *de re*, *de dicto* et combinés. Dans chaque chapitre les trois types de syllogismes sont présentés ensemble par rapport à une combinaison de prémisses (par exemple les syllogismes *de re*, *de dicto* et combinés avec deux prémisses *N*).

Occam ne donne pas de démonstration formelle des syllogismes modaux de figure I. Pour faire sa sélection il s'appuie sur le *dictum de omni et nullo* et sur quelques exemples. Un grand nombre de syllogismes des autres figures est démontré de façon habituelle, c'est-à-dire principalement par conversion,

⁽⁹⁾ Ses phrases de «inesse et nunc» et non celles de «inesse simpliciter» sont traitées ici comme phrases 5.

réduction à l'absurde et ecthèse. La conversion des phrases modales est correctement traitée dans le livre II, chap. 24 - 26: Il y a conversion *de dicto* avec «nécessaire» et «possible» pour «E» et «I»; les problèmes de la conversion *de re* pour «E» et «I» sont indiqués (par exemple pour «I» avec «n» on a seulement « $E!S \cap P_n \equiv E!P_n \cap S$ »).

Afin de voir maintenant les résultats nous procédons dans un ordre différent de celui d'Occam; pour le moment les syllogismes avec «impossible» seront laissés de côté.

Les syllogismes *de re* utilisent principalement les phrases 2, 5 et 8. Néanmoins pour obtenir des syllogismes avec deux prémisses *P* on a besoin d'au moins une prémisses ou conclusion de type 9 (comme « $S_p \subset P_p$ »). Occam voit cela clairement et insiste explicitement sur ce fait. Une fois franchie cette étape il a recours aussi aux phrases de type 6. Il faut mentionner qu'Occam fréquemment ne s'occupe pas des syllogismes modaux avec une conclusion *A*, il ne s'occupe non plus des syllogismes avec une conclusion *P* si l'on peut avoir un syllogisme analogue avec conclusion *N* ou *A*; peut-être ces types de syllogismes lui paraissent trop triviaux.

Avec toutes ces restrictions on peut trouver chez Occam un grand nombre de syllogismes *de re*, qui (avec une petite réserve que nous verrons) sont absolument correctes. Par rapport à la figure I Occam présente les suivants syllogismes *de re* (ici en ordre numérique): 222 (de 252), 252, 828 (de 858), 858, 958 (de 988) et 988. Il ne présente pas de syllogismes *de re* pour la deuxième figure; 285 et 825, qui (historiquement) sont très importants, ne l'intéressent pas en raison de la conclusion 5; d'autres comme 296, 652, 922 etc. sont trop éloignés de ceux avec 8 et 2 qu'il considère principalement. Pour la figure III il a: 222 (de 252), 252, 289 (de 283), 586, 596 pour Bocardo et Disamis (de 586), 828 (de 858), 858, 889, 899 pour Bocardo et Disamis (de 889), 989 pour Datisi et Ferison (de 999) et 999. Le seul défaut de cette liste assez complète est qu'il ne mentionne pas les restrictions pour 899 et 989. En dehors de ces syllogismes *de re* il mentionne et refuse beaucoup de syllogismes apparents qui ne sont acceptables ni pour lui ni dans

le système présenté ici; généralement il justifie son refus par des contre-exemples.

Les phrases A d'Occam sont presque toujours du type 5 et non du type *a* (avec «esse verum»). Néanmoins au chap. 30 il mentionne explicitement les syllogismes *aaa*. Les autres syllogismes *de dicto* qu'il traite sont *nnn*, *npp* et *pnp*, c'est-à-dire les formes principales, moins celles avec une conclusion *a*. Correctement il exclut les formes *ppp*, *p5p* et *5pp* (cela signifie la non-acceptation de la règle du pire) et aussi *n5n*.

Occam considère seulement ceux des syllogismes combinés qui ont une prémisses *de re* et une *de dicto*. Quoiqu'il ne dispose pas des équivalences ou implications démontrées entre phrases *de re* et phrases *de dicto* et inversement (section 6) on trouve néanmoins une large coïncidence entre ses syllogismes combinés et ceux qu'on peut démontrer selon les indications de section 7. Ainsi Occam présente par rapport à figure I: *n22* (de 122), *2n2* (de 252), *8n8* (de 858) et *n88* (de 988). Par rapport à figure II il a: *n88* (de 188) et *n22* (de 922). Et par rapport à figure III: *2n2* (de 252), *8n8* (de 858), *n89* (de 889), *9p9* pour Datisi et Ferison (de 999) et *p99* pour Bocardo et Disamis (de 999); les restrictions par rapport à *9p9* et *p99* ne sont pas mentionnées dans son livre.

On trouve entre ses syllogismes combinés aussi quelques uns qui ne sont pas justifiables dans le traitement formel présenté ici. Ainsi il a par rapport à figure I, *2nn* et *p2p* (ici seulement *p28* de 728), par rapport à figure II, *2n2* et *2pp* (ici seulement *28p* de 285) et par rapport à figure III, *p58* pour Disamis et Datisi (ici seulement *p68* pour Disamis et Bocardo de 968).

La partie la moins satisfaisante de la syllogistique modale d'Occam considérée ici est formée par les syllogismes avec «impossible». Un traitement formel, où, de la même façon que pour Occam et une longue tradition logique, «impossible» («non possible») et pris au sens de «nécessairement non» (voir les théorèmes de négation modale des sections 2 et 4), permet d'utiliser les deux règles suivantes.

Règle *de dicto* (pour les phrases: $V_n\langle A \rangle$, $V_n\langle E \rangle$, $V_n\langle I \rangle$, $V_n\langle O \rangle$): Toute phrase du type indiqué peut être remplacée par une équivalente avec «impossible» au lieu de «nécessaire»

et les contradictoires de «A», «E», «I» et «O» (c'est-à-dire «O», «I», «E» et «A»).

Justification: Au lieu de «nécessaire» on prend selon le théorème de la double négation «nécessairement non non»; «nécessairement non» correspondent à «impossible» et la deuxième négation s'applique à la phrase entière qui apparaît après la négation, transformant «A» en «O», «E» en «I», etc (par exemple: $V_n\langle A \rangle \equiv V_n\langle \text{neg neg } A \rangle \equiv V_{\text{imp}}\langle \text{neg } A \rangle \equiv V_{\text{imp}}\langle O \rangle$).

Règle *de re* (pour les classes P_n et $(-P)_n$): Toute phrase qui fait référence à une des classes mentionnées peut être remplacée par une équivalente avec «impossiblement non» au lieu de «nécessaire» et «impossible» au lieu de «nécessairement non».

Justification: $P_n = (- - P)_n = (-P)_{\text{imp}}$; $(-P)_n = P_{\text{imp}}$.

Avec ces deux règles on n'a pas besoin d'un traitement spécial pour les syllogismes avec «impossible». Où il y a un syllogisme *de re*, *de dicto* ou combiné avec «nécessaire» (c'est-à-dire, pour les problèmes de cette section, avec une prémisses ou conclusion 2 ou n) on a automatiquement un syllogisme analogue avec «impossible». Un exemple *de re* et un *de dicto* le montreront; exemple 1 (Barbara 222):

Tous les hommes sont nécessairement mortels

Tous les Grecs sont nécessairement des hommes

Tous les Grecs sont nécessairement mortels

d'où par la règle *de re*:

Tous les hommes sont impossiblement immortels

Tous les Grecs sont impossiblement des non-hommes

Tous les Grecs sont impossiblement immortels

ou aussi:

Tous les hommes sont impossiblement immortels

Tous les Grecs sont nécessairement des hommes

Tous les Grecs sont nécessairement mortels

(exemple 2 (Barbara *nnn*):

«Tous les hommes sont mortels» est nécessaire

«Tous les Grecs sont des hommes» est nécessaire

«Tous les Grecs sont mortels» est nécessaire

d'où par la règle *de dicto*:

«Quelques hommes ne sont pas mortels» est impossible
 «Quelques Grecs ne sont pas des hommes» est impossible
 «Quelques Grecs ne sont pas mortels» est impossible

Occam n'est pas parvenu à cette vision générale. Il dit bien au chap. 40 que chaque phrase avec «impossible» est équivalente à une phrase N et qu'à partir des syllogismes avec N et A on peut voir comment former des syllogismes avec «impossible» et A ; il donne même un exemple concret de $V_{\text{imp}}\langle A \rangle \equiv V_n\langle O \rangle$, mais malgré cela il ne suit pas le principe général que chaque phrase N peut être remplacée par une avec «impossible», ce qui permet d'établir une analogie complète entre les syllogismes avec «nécessaire» et ceux avec «impossible».

Ainsi nie-t-il la validité de tout syllogisme de la forme $n'n'n'$ ou $2'2'2'$ dont beaucoup sont tout à fait correctes (nous écrivons «2'» pour la phrase équivalente à 2 avec «impossible» et de façon analogue «n'»). L'idée qu'à partir de deux prémisses négatives on ne peut pas obtenir une conclusion syllogistique lui faisait croire que cela vaut à plus forte raison pour les prémisses avec «impossible». En outre un exemple non valide et particulièrement mal choisi (au lieu de prendre Celarent 222 et de faire les changements correspondants il prend la forme non syllogistique Celarent 222) doit renforcer sa conviction. De toute façon Occam ne donne pas beaucoup de détails ni beaucoup d'exemples sur les syllogismes avec «impossible».

C.N.R.S.

Gérolde Stahl

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARISTOTE, *Organon III, Les premiers analytiques*, traduction I. Tricot, Paris, 1936.
- [2] ARISTOTLE, *Prior Analytics and Posterior Analytics*, édition W.D. Ross, Oxford, 1965.
- [3] —, *Prior Analytics*, édition H. Tredennick, Londres, 1962.

- [4] BECKER, A., *Die aristotelische Theorie der Möglichkeitsschlüsse*, Berlin 1933.
- [5] BOCHENSKI, I.M., *La logique de Théophraste*, Fribourg, 1947.
- [6] —, *Ancient Formal Logic* Amsterdam 1951.
- [7] —, *A History of Formal Logic*, Notre Dame, Indiana, 1961.
- [8] GRAESER, A., *Die logischen Fragmente des Theophrast*, Berlin, 1973.
- [9] KNEALE, W. et M., *The Development of Logic*, Oxford, 1964.
- [10] LUKASIEWICZ, J., *La syllogistique d'Aristote*, Paris, 1972.
- [10a] MC CALL, S., *Aristotle's Modal Syllogisms*, Amsterdam, 1963.
- [11] MOODY, E.A., *The Logic of William of Ockham*, New York, 1965.
- [12] OCKHAM, W., *Summa Logicae, Pars secunda et tertia prima*, édité par Ph. Boehner, Louvain, 1954.
- [13] PATZIG, G., *Aristotle's Theory of the Syllogism*, Dordrecht, 1968.
- [14] PRANTL, C., *Geschichte der Logik im Abendlande*, Berlin, 1957.
- [15] STAHL, G., *Enfoque moderno de la lógica clásica*, Santiago, 1958.
- [16] —, *General Considerations about Modal Sentences*, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math., Berlin, 1959 vol 5, N° 3-4, pp 280-290.
- [17] —, *Termes temporels dans des systèmes fonctionnels*, Revue philosophique de la France et de l'étranger, Paris, 1974, N° 3, pp 293-303.
- [18] —, *Quelques relations entre temporalité de re et temporalité de dicto et leur extension aux modalités*, Revue Philosophique de la France et l'étranger, Paris, 1976, N° 2, pp 165-178 (la justification de la règle de nécessitation est incluse dans un Erratum qui paraît dans le N° 4).
- [19] VON WRIGHT, G.H., *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam, 1951.