DEFINISSABILITE DANS LES THEORIES STABLES

Daniel LASCAR

C.N.R.S.-Université Paris VII

INTRODUCTION

La notion centrale dans cet article est celle de *types définissables* (voir définition III, 2) qui a été introduite par Shelah dans [SH 1]. Il a aussi démontré que tout type dans une théorie stable est définissable.

Nous montrons ici que si p est un type complet définissable sur un modèle $\mathcal{M}$, et si $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$, alors p a une extension "naturelle" sur $\mathcal{A}$. C'est cette extension que nous appelons le *fils aîné* de p sur $\mathcal{A}$. Ceci nous permet de définir le *produit de types* d'une façon analogue au produit d'ultrafiltres.

Nous utilisons ces notions pour introduire la notion de *Forking*. Les définitions IV, 1 et 2 et les résultats du paragraphe IV sont dus à Shelah, mais les méthodes de démonstrations sont nouvelles, et il nous a semblé intéressant de les présenter ici.

Dans [LS], nous avons déjà utilisé ces résultats pour faire une étude systématique des notions de rang dans les théories superstables, et donner une nouvelle démonstration du théorème de Lachlan sur le nombre de modèles dénombrables d'une théorie dénombrable superstable [LC]. On trouvera aussi dans [LS] plus de détails sur les démonstrations du chapitre III.

I. *Notation*

Nous nous donnons un langage L, et une théorie T complète dans L. Nous supposerons que L n'a ni symbole de constante ni symbole de fonction, et que T admet l'élimination des quantificateurs (nous ne restreignons pas la généralité des résultats: voir [MO]). On désignera par L_n l'ensemble des formules

ne contenant pas d'autres variables libres que $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Si A est un ensemble, $\overline{A}$ dénotera l'ensemble des suites finies de A. Si $\overline{a}, \overline{a}' \in \overline{A}$, avec $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $\overline{a}' = (a'_0, a'_2, \ldots, a'_q)$, alors $(\overline{a}, \overline{a}') = (a_0, a_1, \ldots, a'_n, a'_0, a'_2, \ldots, a'_q)$ et $B \cup \overline{a} = B \cup \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Le symbole $\overline{v}_n$ dénotera la suite $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$; L(A) est le langage obtenu en ajoutant à L une constante pour chaque $a \in A$, constante que nous dénoterons aussi par a. Si $\varphi \in L$ et $\overline{a} \in \overline{A}$, $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, alors $\varphi(\overline{a})$ est la formule de L(A) obtenue en remplaçant dans φ toutes les occurences libres de v_i (pour $0 \leqslant i \leqslant n$) par a_i.

Suivant Sacks ([SA] p. 165) nous appelerons K(T) la catégorie dons les objets sont les sous-structures de modèles de T, et dont les flèches sont les monomorphismes entre ces objets. Les lettres $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$, ..., désigneront des objets de K(T) tandis que $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, seront réservées pour les modèles de T; A, A', B, ..., M, M', ..., sont les univers de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, ... Puisque nous avons l'élimination des quantificateurs, l'ensemble

$$\{\varphi(\overline{a}) \,;\, \varphi \in L,\ \overline{a} \in \overline{A},\ \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})\}$$

ne dépend pas de $\mathcal{M}$, pourvu que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Nous noterons cet ensemble $T(\mathcal{A})$.

Soit $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ un ensemble de nouvelles constantes individuelles, et posons $\overline{x}_n = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Un n-*type* sur $\mathcal{A}$ est un ensemble de formules de $L(A \cup \overline{x}_n)$ consistant avec $T(\mathcal{A})$. Un n-type complet est une théorie complète dans $L(A \cup \overline{x}_n)$ contenant $T(\mathcal{A})$; $S_n(\mathcal{A})$ est l'ensemble de tous les n-types complets sur $\mathcal{A}$, auquel nous donnons une structure d'espace topologique de la façon habituelle (voir [MO]); si f est un monomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, on en déduit une application $\widehat{f^n}$ continue et surjective de $S_n(\mathcal{B})$ dans $S_n(\mathcal{A})$, définie par

$$\widehat{f^n}(p) = \{\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_k) \,;\, \varphi \in L_{k+1}(\overline{x}_n) \,;\, (a_0, a_1, \ldots, a_k) \in A^{k+1} \text{ et } \varphi(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in p\}.$$

Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $e_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ est l'injection canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, et $i^n_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \hat{e}^n_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. La catégorie C_n est la catégorie dont les objets sont $S_n(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A} \in K(T)$) et dont les flèches sont les applications $\widehat{f^n}$ (f est un monomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$).

Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, et $\overline{b} \in B^n$, l'ensemble

$$\{\varphi(\overline{x_n}) : \varphi \in L_n(A) \text{ et } \mathcal{M} \models \varphi(\overline{b})\}$$

ne dépend pas de $\mathcal{M}$, puisque nous avons l'élimination des quantificateurs.
C'est le type de $\overline{b}$ au-dessus de $\mathcal{A}$ que nous noterons $t(\overline{b}, \mathcal{A})$.

Si $\Delta \subseteq L(\overline{x}_n)$ et p est un n-type sur $\mathcal{A}$, nous noterons $p(\Delta) = \{\varphi(\overline{a});\ \overline{a} \in \overline{A},\ \varphi(\overline{a}) \in p \text{ et } \varphi \in \Delta\} \cup \{\varphi(\overline{a});\ \overline{a} \in \overline{A},\ \varphi(\overline{a}) \in p \text{ et } (\neg\varphi) \in \Delta\}$. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $p \restriction \mathcal{B} = p \cap L(\overline{x}_n \cup B)$. On dit que p et p' sont Δ-contradictoires s'il existe $\varphi \in \Delta$ et $\overline{a} \in \overline{A}$ tels que $\varphi(\overline{a}) \in p$ et $\neg\varphi(\overline{a}) \in p'$, ou $\neg\varphi(\overline{a}) \in p$ et $\varphi(\overline{a}) \in p'$.

II. *Rang*

Nous aurons besoin d'une généralisation de la notion de rang introduite par Morley dans [MO]. Celle que nous introduisons ici n'est qu'un cas particulier du rang $R^n(p, \Delta, \lambda)$ défini par Shelah dans [SH 1].

Définition 1: Soient $n \in \omega$ *et* $\Delta \subseteq L(\overline{x}_n)$. *Nous définissons par induction sur l'ordinal* α *les sous-espaces* $S^\alpha_n(\mathcal{A}, \Delta)$ *de* $S_n(\mathcal{A})$, *pour* $\mathcal{A} \in K(T)$:

— $S^0_n(\mathcal{A}, \Delta) = S_n(\mathcal{A})$.

— *Si* δ *est un ordinal limite,* $S^\delta_n(\mathcal{A}, \Delta) = \bigcap_{\alpha < \delta} S^\alpha_n(\mathcal{A}, \Delta)$.

— $p \in S^{\alpha+1}_n(\mathcal{A}, \Delta)$ *si et seulement si* $p \in S^\alpha_n(\mathcal{A}, \Delta)$ *et*

pour tout $\varphi \in p$, *il existe* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ *et un ensemble infini d'élements de* $\overset{\alpha}{S}_n(\mathcal{B}, \Delta)$ *contenant* φ *et deux à deux* Δ*-contradictoires.*

Définition 2: Si $p \in S_n(\mathcal{A})$, *on définit* $R(p, \Delta)$ *comme le plus petit ordinal* α *tel que* $p \notin \overset{\alpha+1}{S}_n(\mathcal{A}, \Delta)$ *si un tel ordinal existe; dans le cas contraire, on pose* $R(p, \Delta) = \infty$. *(Il est entendu que* $\infty > \alpha$ *pour tout ordinal* α*).*

Les démonstrations des théorèmes 3 et 4 ne sont que des adaptations des démonstrations de [MO] et nous laissons au lecteur le plaisir de les retrouver.

Théorème 3.

1) *Pour tout ordinal* α, $\overset{\alpha}{S}_n(\mathcal{A}, \Delta)$ *est un fermé de* $S_n(\mathcal{A})$.
2) *Si* $p \subseteq p'$, *alors* $R(p, \Delta) \geqslant R(p', \Delta)$.
3) *Si* f *est un monomorphisme de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{B}$ *et si* $p \in S_n(\mathcal{B})$, *alors* $R(p, \Delta) \leqslant R(\widehat{f}(p), \Delta)$.
4) *Si* $p \in S_n(\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, *il existe* $p_1 \in S_n(\mathcal{B})$, $p \subseteq p_1$ *tel que* $R(p, \Delta) = R(p_1, \Delta)$.
5) *Si* $p \in S_n(\mathcal{A})$, *il existe* $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ *fini tel que* $R(p, \Delta) = R(p \restriction \mathcal{A}_0, \Delta)$.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 25 de [MO]:

Théorème 4: Supposons que $p \in S_n(\mathcal{A})$ *et que* $R(p, \Delta) = \alpha < \infty$. *Alors, il existe un entier* n, *noté mult*(p, Δ) *tel que:*

1) *Si* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ *et* P *est un ensemble d'éléments de* $\overset{\alpha}{S}_n(\mathcal{B}, \Delta)$ *incluant* p *et deux à deux* Δ*-contradictoires, alors* $||P|| \leqslant n$.
2) *Il existe* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ *et* P *un ensemble d'éléments de* $\overset{\alpha}{S}_n(\mathcal{B}, \Delta)$ *incluant* p *et deux à deux* Δ*-contradictoires tel que* $||P|| = n$.

D'autre part, il existe $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ *fini tel que* $R(p, \Delta) = R(p \restriction \mathcal{A}_0)$ *et mult*$(p, \Delta) =$ *mult*$(p \restriction \mathcal{A}_0, \Delta)$.

On se reportera à [SH 1] pour la démonstration du théorème suivant:

Théorème 5: T est stable si et seulement si pour tout $n \in \omega$, $\Delta \subseteq L(\bar{x}_n)$, Δ *fini,* $\mathcal{A} \in K(T)$ *et* $p \in S_n(\mathcal{A})$, *on a* $R(p, \Delta) < \omega$.

Définition 6: Soit p *un* n-*type sur* $\mathcal{A}$. *On pose* $R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) = \sup\{R(q, \Delta);\ q \in S_n(\mathcal{A})$ *et* $p \subseteq q\}$.

La proposition suivante est pratiquement évidente:

Proposition 7: Soit p *un* n-*type sur* $\mathcal{A}$. *Alors:*

1) *Il existe* $q \in S_n(\mathcal{A})$ *et* $p \subseteq q$ *tel que* $R(q, \Delta) = R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta)$.

2) *Si* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, $R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) = R^n_{\mathcal{B}}(p, \Delta)$.

3) *Il existe* $p_0 \subseteq p$, p_0 *fini tel que* $R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) = R^n_{\mathcal{A}}(p_0, \Delta)$.

4) *Si* q *est un* n-*type sur* $\mathcal{A}$ *tel que toute formule de* p *soit conséquence de* $T(\mathcal{A}) \cup q$, *alors* $R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) \geqslant R^n_{\mathcal{A}}(q, \Delta)$.

5) *Si* f *est un monomorphisme de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{A}$ *et si* $\tilde{f}(p) = \{\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_k);\ k \in \omega, \varphi \in L_{k+1}(\bar{x}_n),\ (a_0, \ldots, a_k) \in B^{k+1}$ *et* $\varphi(f(a_0), f(a_1), \ldots, f, a_k)) \in p\}$, *alors* $R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) \leqslant R^n_{\mathcal{B}}(\tilde{f}(p), \Delta)$.

6) $R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) \geqslant \alpha + 1$ *si et seulement si pour tout* $p_0 \subseteq p$, p_0 *fini, il existe* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ *et un ensemble infini* $\{q_i, i \in I\}$ *de* n-*types sur* $\mathcal{B}$ *contenant* p_0, *deux à deux* Δ-*contradictoires, et tels que pour tout* $i \in I$, $R^n_{\mathcal{B}}(q_i, \Delta) \geqslant \alpha$.

Nous terminons par le théorème suivant qui se trouve essentiellement dans [SA]:

Théorème 8: Si $\mathcal{M}$ *est* $\aleph_0$-*saturé,* $p \in S^n(\mathcal{M})$ *et* $R(p, \Delta) < \infty$, *alors mult*$(p, \Delta) = 1$.

Démonstration: Posons $n = \mathrm{mult}(p, \Delta)$ et $\alpha = R(p, \Delta)$. Sup-

posons $n \geqslant 2$. D'après le théorème 4, il existe $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{M}$, A_0 fini, tel que, si $p_0 = p \restriction \mathcal{A}_0$, $R(p, \Delta) = R(p_0, \Delta)$ et $\mathrm{mult}(p_0, \Delta) = \mathrm{mult}(p, \Delta)$. Il existe aussi $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{M}$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des éléments de $\overset{\alpha}{S}_n(\mathcal{B}, \Delta)$ contenant p et deux à deux Δ-contradictoires. Il en résulte qu'il existe $\overline{b} \in \overline{B}$ et $\varphi \in \Delta$ tel que $\varphi(\overline{b}) \in q_1$ et $\neg\varphi(\overline{b}_1) \in q_2$. D'autre part, $R(p_0, \Delta) \geqslant R^n_{\mathcal{B}}(p_0 \cup \{\varphi(\overline{b})\}, \Delta) \geqslant R(q_1, \Delta)$. Donc $R^n_{\mathcal{B}}(p_0 \cup \{\varphi(\overline{b})\}, \Delta) = \alpha$, et de même $R^n_{\mathcal{B}}(p_0 \cup \{\neg(\overline{b})\}, \Delta) = \alpha$. Maintenant, puisque $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-saturé, il existe $\overline{a} \in \overline{M}$ et un $\mathcal{A}_0$-isomorphisme de $\mathcal{A}_0 \cup \overline{b}$ dans $\mathcal{A}_0 \cup \overline{a}$, et par conséquent $R^n_{\mathcal{M}}(p_0 \cup \{\varphi(\overline{a})\}, \Delta) = R^n_{\mathcal{M}}(p_0 \cup \neg\varphi(\overline{a})\}, \Delta) = \alpha$. Puisque p est complet, $\varphi(\overline{a})$ ou $\neg\varphi(\overline{a})$ appartient à p; nous supposerons par exemple que $\varphi(\overline{a}) \in p$. Il existe alors $r \in S_n(\mathcal{B})$ tel que $p_0 \cup \{\neg\varphi(\overline{a})\} \in r$ et $R(r, \Delta) = \alpha$. Mais alors r est Δ-contradictoire avec chaque q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et ceci contredit le fait que $\mathrm{mult}(p_0, \Delta) = n$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ et $\overline{a} \in \overline{M}$, nous noterons $R(\overline{a}, \Delta, \mathcal{A}) = R(t(\overline{a}, \mathcal{A}), \Delta)$.

III. *Fils aîné*

Définition 1: On dit que d *est une* n-*application rangée sur* $\mathcal{A}$ *si* d *est une application de* $L(\overline{x}_n)$ *dans* $L(A)$ *telle que si* $k \in \omega$ *et* $\varphi \in L_k(\overline{x}_n)$, *alors* $d(\varphi) \in L_k(A)$.

Soit $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$. Considérons l'ensemble:

$$d(\mathcal{B}) = \{\varphi(\overline{b});\ \varphi \in L_k(\overline{x}_n),\ k \in \omega,\ \overline{b} \in B^k, \text{ et } d(\varphi)\,(\overline{b}) \in T(\mathcal{B})$$

autrement dit, pour tout $k \in \omega$, $\varphi \in L_k(\overline{x}_n)$ et $\overline{b} \in B^k$, $\varphi(\overline{b}) \in d(\mathcal{B})$ si et seulement si $d(\varphi)\,(\overline{b}) \in T\,(\mathcal{B})$.

Définition 2: Soit $p \in S_n(\mathcal{A})$. *On dit que* p *est définissable s'il existe une* n-*application rangée sur* $\mathcal{A}$ *telle que* $p = d(\mathcal{A})$.

Le théorème suivant apparaît dans [BA] et [SH 1]

Théorème 3: Si T *est stable,* $\mathcal{A} \in K(T)$, $n \in \omega$, $p \in S_n(\mathcal{A})$ *alors* p *est définissable.*

Les applications rangées qui définissent un type complet sur un modèle possèdent de bonnes propriétés:

Théorème 4: Soit d *une* n*-application rangée sur* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, *et supposons que* $d(\mathcal{M}) \in S_n(\mathcal{M})$. *Les conditions suivantes sont vérifiées.*

1) *Si* $\varphi \in L$, *alors* $T(\mathcal{A}) \vdash \varphi \leftrightarrow d(\varphi)$.
2) *Si* $\varphi, \varphi' \in L(\bar{x}_n)$ *et* $T \vdash \varphi \rightarrow \varphi'$, *alors* $T(\mathcal{A}) \vdash d(\varphi) \rightarrow d(\varphi')$.
3) *Si* $\varphi, \varphi' \in L(\bar{x}_n)$ *alors* $T(\mathcal{A}) \vdash d(\varphi \rightarrow \varphi') \rightarrow (d(\varphi) \rightarrow d(\varphi'))$.
4) *Si* $\varphi \in L(\bar{x}_n)$ *alors* $T(\mathcal{A}) \vdash \neg d(\varphi) \leftrightarrow d(\neg \varphi)$.
5) *Si* $\varphi, \varphi' \in L(\bar{x}_n)$, *alors* $T(\mathcal{A}) \vdash d(\varphi \wedge \varphi') \leftrightarrow (d(\varphi) \wedge d(\varphi'))$ *et* $T(\mathcal{A}) \vdash d(\varphi \vee \varphi') \leftrightarrow (d(\varphi) \vee d(\varphi'))$.

Définition 5: Un n*-schéma sur* $\mathcal{A}$ *est une* n*-application rangée sur* $\mathcal{A}$ *vérifiant les conditions 1-5 du théorème précédent.*

Le théorème 4 admet une réciproque:

Proposition 6: Soient d *un n-schéma sur* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$. *Alors* $d(\mathcal{B}) \in S_n(\mathcal{B})$.

D'autre part, si $p \in S_n(\mathcal{M})$ est définissable, le schéma le définissant est en quelque sorte unique:

Proposition 7: Soient d *et* d' *deux n-schémas sur* $\mathcal{M}$. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1) $d(\mathcal{M}) = d'(\mathcal{M})$.
2) *Pour tout* $\varphi \in L(\bar{x}_n)$, $d(\varphi) \leftrightarrow d'(\varphi) \in T(\mathcal{M})$.
3) *Pour tout* $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$, $d(\mathcal{A}) = d'(\mathcal{A})$.

Tout cela permet de définir pour tout type définissable $p \in S_n(\mathcal{M})$ et $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$, une extension de p sur $\mathcal{A}$ qui est en quelque sorte canonique: c'est $d(\mathcal{A})$ où d est n'importe quelle application rangée sur $\mathcal{M}$ définissant p. Ce type sera appelé le *fils aîné* de p sur $\mathcal{A}$.

Dans [LS], on donne une illustration de cette notion dans le cas des groupes abéliens sans torsion et des ultrafiltres.

Définition 8: Soient $p \in S_n(\mathcal{M})$, *p définissable,* $q \in S_m(\mathcal{M})$; *on définit le produit* $p \times q$ *comme le* $n + m$ *type réalisé au-dessus de* $\mathcal{M}$ *par* $(\bar{a}, \bar{b})$, *où:*

— $\bar{b} \in M'^m$, $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ *est un modèle* $||M||_+$, *saturé, et* $t(b, \mathcal{M}) = q$.
— $\bar{a} \in M,^n$ *et* $t(\bar{a}, \mathcal{M} \cup \bar{b})$ *est le fils aîné de* p *sur* $\mathcal{M} \cup \bar{b}$.

Evidemment, la définition est cohérente, c'est-à-dire que $t((\bar{a}, \bar{b}), \mathcal{M})$ ne dépend pas des $\bar{a}, \bar{b}, \mathcal{M}'$ particuliers choisis. On pourrait définir $p \times q$ sans passer par des réalisations, mais cela conduit à des notations compliquées. On peut remarquer que le produit d'ultrafiltres est un cas particulier du produit de types (voir [LS]).

Supposons à partir de maintenant que T est stable. Alors, d'après le théorème 3 pour tout $p \in S_n(\mathcal{M})$ et tout $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$, le fils aîné de p sur $\mathcal{A}$ est défini. D'autre part, nous avons (voir LS):

Théorème 9 (commutativité du produit de types dans les théories stables): *Soient* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$, $\bar{a} \in M'^n$, $\bar{b} \in M'^m$, $p \in S_n(\mathcal{M})$, $q \in S_m(\mathcal{M})$, *et supposons que* $t((\bar{a}, \bar{b}), \mathcal{M}) = p \times q$. *Alors* $t((\bar{b}, \bar{a}), \mathcal{M}) = q \times p$.

Ceci s'exprime d'une façon particulièrement élégante dans le langage des catégories C_n:

Théorème 10: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ *et* $n \in \omega$. *Alors l'application de* $S_n(\mathcal{M})$ *dans* $S_n(\mathcal{A})$ *qui à* p *fait correspondre son fils aîné sur* $\mathcal{A}$ *est continue.*

Nous appelerons $h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}}$ cette application. Appelons d'autre part $i^n_{\mathcal{A},\mathcal{M}}$ l'application de $S_n(\mathcal{A})$ dans $S_n(\mathcal{M})$ qui à $p \in S_n(\mathcal{A})$ fait correspondre $p \restriction \mathcal{M}$. Nous savons que dans tous les cas $i^n_{\mathcal{A},\mathcal{M}}$ est continue surjective. Le théorème 10 signifie que $h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}}$ est une section continue de $i^n_{\mathcal{A},\mathcal{M}}$; on peut voir que

cette dernière propriété caractérise la fonction $h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}}$ et donc que le fils aîné est définissable à l'intérieur des catégories C_n.

Définition 11: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}'$ et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}'$. On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$ si pour tout $\overline{a} \in \overline{A}$, $t(\overline{a}, \mathcal{B})$ est le fils aîné de $t(\overline{a}, \mathcal{M})$.

Il est à remarquer que la relation d'indépendance est symétrique, et que d'autre part $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$ si et seulement si pour tout $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, A_0 et B_0 fini, $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}_0$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$.

Théorème 12: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}''$ et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}''$, et supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}'$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$. Alors

$$h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}} \circ i^n_{\mathcal{M}',\mathcal{M}} = i^n_{\mathcal{M}'',\mathcal{A}} \circ h^n_{\mathcal{M}',\mathcal{M}''}$$

Cela veut dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & S_n(\mathcal{M}'') \arrow[dr, "i^n_{\mathcal{M}'',\mathcal{A}}"] & \\
S_n(\mathcal{M}') \arrow[ur, "h^n_{\mathcal{M}',\mathcal{M}''}"] \arrow[dr, "i^n_{\mathcal{M}',\mathcal{M}}"'] & & S_n(\mathcal{A}) \\
 & S_n(\mathcal{M}) \arrow[ur, "h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

La proposition suivante nous permettra de ne pas être

limités dans les applications du théorème 12 par la condition: $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}'$ indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$:

Proposition 13: Supposons que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}'$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}'$ et que $\mathcal{M}'$ est $(||A|| + ||B||)^+$-saturé. Alors, il existe $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{M}'$ qui est $\mathcal{M}$-isomorphe à $\mathcal{B}$ et tel que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}'$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$.

Donnons un exemple d'application:

Théorème 14: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$; $\Delta \subseteq L(\bar{x}_n)$, Δ fini, $p \in S_n(\mathcal{M})$ et p' le fils aîné de p sur $\mathcal{A}$. Alors

$$R(p, \Delta) = R(p', \Delta).$$

Démonstration: Nous savons déjà que $R(p, \Delta) \geqslant R(p', \Delta)$. Montrons par induction sur α que $R(p, \Delta) \geqslant \alpha$ implique $R(p', \Delta) \geqslant \alpha$, Les cas $\alpha = 0$ et α limite sont évidents. Supposons donc

$$R(p, \Delta) \geqslant \alpha + 1. \tag{1}$$

Soit q' un sous-ensemble fini de p'. Considérons

$$F = \{r; r \in S_n(\mathcal{A}) \text{ et } q' \subseteq r\}.$$

Il est clair que F est un voisinage ouvert fermé de p', et donc que $(h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}})^{-1}(F)$ est un voisinage ouvert fermé de p. Il existe donc $q \subseteq p$, q fini tel que

$$(h^n_{\mathcal{M},\mathcal{A}})^{-1}(F) = \{r; r \in S_n(\mathcal{A}) \text{ et } q \subseteq r\}.$$

Maintenant d'après (1), il existe $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{M}$ et des n-types q_i sur $\mathcal{B}$ pour $i \in \omega$ tels que:

— Si $i < j < \omega$, q_i et q_j sont Δ-contradictoires.
— Si $i < \omega$ $\quad q \subset q_i$.
— Si $i < \omega$ $\quad R^n_{\mathcal{B}}(q_i, \Delta) \geqslant \alpha$.

Soit $\mathcal{M}'$ un modèle incluant $\mathcal{B}$. Il existe pour tout $i \in \omega$,

$r_i \in S_n(\mathcal{M}')$ tel que $q_i \subseteq r_i$ et $R(r_i, \Delta) = R^n_{\mathcal{B}}(q_i, \Delta)$. D'autre part, on peut supposer que $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{A}$ sont tous deux inclus dans un même modèle $\mathcal{M}_1$, et par la proposition 13, que $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{A}$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$. Soit s_i le fils aîné de r_i sur $\mathcal{M}_1$; par hypothèse d'induction $R(s_i, \Delta) \geqslant \alpha$, et d'autre part, les s_i sont deux à deux Δ-contradictoires. Mais maintenant, par le théorème 12.

$$s_i \restriction \mathcal{A} = i^n_{\mathcal{M}_1, \mathcal{A}}(s_i) = h^n_{\mathcal{M}, \mathcal{A}} \circ i^n_{\mathcal{M}', \mathcal{M}}(r_i).$$

Or, q_i est inclus dans r_i, donc dans $i^n_{\mathcal{M}', \mathcal{M}}(r_i)$, et donc

$$i^n_{\mathcal{M}', \mathcal{M}}(r_i) \in (h^n_{\mathcal{M}, \mathcal{A}})^{-1}(F)$$

et il en résulte que

$$s_i \restriction \mathcal{A} \in F;$$

donc q' est inclus dans s_i, et cela montre que

$$R(p', \Delta) \geqslant \alpha + 1.$$

Le fils aîné est le seul type possédant ces propriétés; plus précisément:

Proposition 15: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, $p \in S_n(\mathcal{M})$, p' *son fils aîné sur* $\mathcal{A}$, $\Delta \subseteq L(\overline{x}_n)$, Δ *fini, et* $p_1 \in S_n(\mathcal{A})$, $p \subseteq p_1$. *Si* $R(p_1, \Delta) = R(p, \Delta)$ *alors* $p_1(\Delta) = p'(\Delta)$.

Démonstration: Cela est clair par la proposition précédente et la proposition II, 8 dans le cas où $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-saturé. Dans le cas général, on peut construire $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ tels que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_0$ est $\aleph_0$-saturé et $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{A}$ sont indépendants au-dessus de $\mathcal{M}$. Il existe $p_2 \in S_n(\mathcal{M}_1)$ tel que $p_1 \subseteq p_2$ et $R(p_1, \Delta) = R(p_2, \Delta)$. Soient $p_0 = p_2 \restriction \mathcal{M}_0$, et p'_2 le fils aîné de p_0 sur $\mathcal{M}_1$. Alors il est clair que $p \subseteq p_0$

et que $R(p_0, \Delta) = R(p_2, \Delta) = R(p, \Delta)$. Par conséquent $p_2(\Delta) = p'_2(\Delta)$. Mais par le théorème 12, $p'_2 \restriction \mathcal{A} = p'$ et la proposition en découle.

IV. *Forking*

Définition 1: Soient $p \in S_k(\mathcal{A})$ *et* $\varphi \in L_k(\overline{x}_n)$. *On dit que* (p, φ) *se divise s'il existe* $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{A}$, *une suite* $(\overline{c}_i, i \in \omega)$ *d'éléments de* M^k *et* $m \in \omega$ *tels que:*

1) $t(\overline{c}_i, \mathcal{A}) = p$ *pour tout* $i \in \omega$.
2) *Si* $s \subseteq \omega$ *et* $||s|| \geqslant m$, *alors l'ensemble* $\{\varphi(\overline{c}_i), i \in s\}$ *est contradictoire avec* $T(\mathcal{M})$.

Définition 2: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{B})$. *On dit que* p *bifurque au-dessus de* $\mathcal{A}$ *s'il existe* $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{B}$, $k \in \omega$, $c \in C^k$ *et* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j \in L_k(\overline{x}_n)$ *tels que:*

1) $(t(\overline{c}, \mathcal{A}), \varphi_i)$ se divise pour $i = 1, 2, \ldots, j$.
2) $p \cup T(\mathcal{C}) \vdash \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant j} \varphi_i(\overline{c})$.

Les propositions 3 et 4 sont à peu près immédiates; les propositions 5 et 6 se trouvent dans [SH 2].

Proposition 3: Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. *L'ensemble* $\{p ; p \in S_n(\mathcal{B})$ *et* p *bifurque au-dessus de* $\mathcal{A}\}$ *est un ouvert de* $S_n(\mathcal{B})$.

Proposition 4: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{C})$. *Si* p *bifurque au-dessus de* $\mathcal{B}$ *ou si* $p \restriction \mathcal{B}$ *bifurque au-dessus de* $\mathcal{A}$, *alors* p *bifurque au-dessus de* $\mathcal{A}$.

Proposition 5: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{B})$ *ne bifurquant pas au-dessus de* $\mathcal{A}$. *Alors, il existe* $p_1 \in S_n(\mathcal{C})$, $p \subseteq p_1$ *ne bifurquant pas au-dessus de* $\mathcal{A}$.

Démonstration: Nous commençons par une remarque. Soit $\mathcal{M}$ un modèle $\aleph_0$-saturé contenant $\mathcal{C}$, et $q \in S_n(\mathcal{C})$. Alors q ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$ si et seulement si il n'existe pas $k \in \omega$, $\overline{m} \in M^k$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_j \in L_k(\overline{x}_n)$ tels que $(t(\overline{m}, \mathcal{A}), \varphi_i)$ se divisent pour $i = 1, 2, \ldots, j$ et $q \cup T(\mathcal{M}) \vdash \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant j} \varphi_i(\overline{m})$. Considérons donc l'ensemble:

$E = \{\neg\varphi(\overline{m});\ k \in \omega,\ \varphi \in L_k(\overline{x}_n),\ \overline{m} \in M^k$ et $t((\overline{m}, \mathcal{A}),\varphi)$ se divise$\}$

et montrons que $p \cup E \cup T(\mathcal{M})$ est consistant. Si l'on suppose le contraire, on en déduit qu'il existe $k_1, k_2, \ldots, k_j \in \omega$,

$\overline{m}_1 \in M^{k_1},\ \ \overline{m}_2 \in M^{k_2}, \ldots, \overline{m}_j \in M^{k_j},\ \ \varphi_1 \in L_{k_1}(\overline{x}_n)$,

$\varphi_2 \in L_{k_2}(\overline{x}_n),\ \ldots, \varphi_j \in L_{k_j}(\overline{x}_n)$ tels que:

1) $p \cup T(\mathcal{M}) \vdash \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant j} \varphi(\overline{m}_i)$ et

2) $(t(\overline{m}_i, \mathcal{A}),\varphi_i)$ se divisent pour $i = 1, 2, \ldots, j$.

Posons $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_j$, $m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \ldots, \overline{m}_j)$, et soit φ'_i $(1 \leqslant i \leqslant j)$ la formule de $L_k(\overline{x}_n)$ obtenue à partir

de φ_i en renommant les variables libres de telle façon que $\varphi_i(\overline{m}_i) = \varphi'_i(\overline{m})$. Alors il est clair que $p \cup T(\mathcal{M}) \vdash \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant j}$

$\varphi'_i(\overline{m})$ et que $(t(\overline{m}, \mathcal{A}),\varphi_i)$ se divise, et ceci contredit le fait

que p ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$.

Il suffit maintenant de poser $p_1 = q_1 \restriction C$, où $q_1 \in S_n(\mathcal{M})$ et $p \cup E \subset q$.

Proposition 6: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\overline{b} \in B^k$, *et* $\varphi \in L_k(\overline{x}_n)$ *et supposons que* $(t(\overline{b}, \mathcal{A}),\varphi)$ *se divise. Alors pour tout* $\Delta \subseteq L(\overline{x}_n)$, Δ *fini contenant* φ *et pour tout* n-*type sur* $\mathcal{A}$, p, *on* α

$$R^n_{\mathcal{A}}(p, \Delta) > R^n_{\mathcal{B}}(p \cup \{\varphi(\overline{b})\},\Delta).$$

Démonstration: Par hypothèse, il existe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, $(\overline{b}_i, i \in \omega)$ une suite d'éléments de M^k et $m \in \omega$ tels que:

1) $t(\overline{b}_i, \mathcal{A}) = t(\overline{b}, \mathcal{A})$.

2) Si $s \subseteq \omega$ et $||s|| \geqslant m$, alors $\{\varphi(\overline{b}_i), i \in s\}$ est contradictoire avec $T(\mathcal{M})$.

Il est clair que pour tout $i \in \omega$,

$$R^n_{\mathcal{M}}(p \cup \{\varphi(\overline{b_i})\}, \Delta) = R^n_{\mathcal{B}}(p \cup \{\varphi(\overline{b})\}, \Delta).$$

Soit $q_i \in S_n(\mathcal{M})$ contenant $p \cup \{\varphi(\overline{b_i})\}$ et tel que

$$R^n_{\mathcal{M}}(p \cup \{\varphi(\overline{b_i})\}, \Delta) = R(q_i, \Delta).$$

D'après la condition 2), l'ensemble $\{q_i(\Delta), i \in \omega\}$ est fini, et donc il existe un sous-ensemble infini de $\{q_i; i \in \omega\}$ dont les éléments sont deux à deux Δ-contradictoires. Cela prouve que

$$R(p, \Delta) \geqslant R(q_i, \Delta) + 1$$

et le théorème en résulte.

Corollaire 7: Soient $p \in S_n(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, *et l'on suppose que* p *bifurque au-dessus de* $\mathcal{A}$. *Alors il existe* $\Delta_0 \subseteq L(\overline{x}_n)$, Δ_0 *fini tel que pour tout* Δ *fini,* $\Delta_0 \subseteq \Delta \subseteq L(\overline{x}_n)$

$$R(p \restriction \mathcal{A}, \Delta) > R(p, \Delta).$$

Corollaire 8: Si $p \in S_n(\mathcal{A})$, p *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$.

Nous pouvons maintenant relier la notion de bifurcation à la notion de fils aîné:

Théorème 9: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{A})$. *Alors* p *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{M}$ *si et seulement si* p *est le fils aîné de* $p \restriction \mathcal{M}$:

Démonstration: Un sens nous est donné par la proposition 7 et le théorème III 14. L'autre découlera du lemme suivant:

Lemme 10: Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, $p' \in S_n(\mathcal{A})$, $p = p' \restriction \mathcal{M}$, *et supposons que* p' *n'est pas le fils aîné de* p *sur* $\mathcal{A}$. *Alors il existe* $k \in \omega$, $\overline{a} \in A^k$, *et* $\varphi \in L_k(\overline{x}_n)$ *tels que* $\varphi(\overline{a}) \in p$ *et* $(t(\overline{a}, \mathcal{M}), \varphi)$ *se divise.*

Démonstration: L'ensemble $\{r ; r \in S_n(\mathcal{A})$ et r est le fils aîné de $r \restriction \mathcal{M}\}$ est fermé, puisque image continue d'un compact. Donc il existe un voisinage ouvert fermé de p' ne contenant aucun point qui soit le fils aîné d'un type sur $\mathcal{M}$. Cela revient à dire qu'il existe $k \in \omega$, $\varphi \in L_k(\bar{x}_n)$ et $\bar{a} \in A^k$ tel que $\varphi(\bar{a}) \in p'$, et que si $r \in S_n(\mathcal{A})$ et $\varphi(\bar{a}) \in r$, alors r n'est pas le fils aîné de $r \restriction \mathcal{M}$.
Soit $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$ et supposons que $\mathcal{M}'$ est $||M||^+$-saturé. Définissons par récurrence sur i, $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}'$ et $\bar{a}_i \in M'^k$ $(i \in \omega)$ tels que:

1) $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$
2) $t(\bar{a}_0, \mathcal{M}_0) = t(\bar{a}, \mathcal{M})$
3) $\mathcal{M}_i \cup \bar{a}_i \subseteq \mathcal{M}_{i+1}$, et $||M_{i+1}|| = ||M_i||$
4) $t(\bar{a}_{i+1}, \mathcal{M}_{i+1})$ est le fils aîné de $t(\bar{a}, \mathcal{M})$ sur $\mathcal{M}_{i+1}$.

Notons $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{M}_i \cup \bar{a}_i$. Soit $q \in S_n(\mathcal{M}')$ et supposons que $\varphi(\bar{a}_i) \in q$. Alors, d'après la construction de φ, $q \restriction \mathcal{M} \cup \bar{a}_i$ n'est pas le fils aîné de $q \restriction \mathcal{M}$, et par le théorème III, 12, q n'est pas le fils aîné de $q \restriction \mathcal{M}_i$.
Considérons maintenant r un n-type sur $\mathcal{M}_i$. Alors

$$R^n_{\mathcal{M}_i}(r, \{\varphi\}) > R^n_{\mathcal{A}_i}(r \cup \{\varphi(a_i)\}, \{\varphi\}).$$

En effet, il existe $r' \in S_n(\mathcal{A}_i)$ tel que

$$r \cup \{\varphi(\bar{a}_i)\} \subseteq r' \text{ et } R(r', \{\varphi\}) = R^n_{\mathcal{A}_i}(r \cup \{\varphi(\bar{a}_i)\}, \{\varphi\}).$$

Posons $r_1 = r' \restriction \mathcal{M}_i$, et r'_1 le fils aîné de r_1 sur $\mathcal{A}_i$. Nous venons de voir que $\neg\varphi(\bar{a}_i) \in r'_1$, donc que $r'(\varphi) \neq r'_1(\varphi)$.

Par la proposition III, 12, on en déduit que

$$R^n_{\mathcal{A}_i}(r', \{\varphi\}) < R^n_{\mathcal{A}_i}(r_1, \{\varphi\}) \leqslant R_{\mathcal{M}}(r, \{\varphi\}).$$

Posons donc $m = R^n_{\mathcal{M}}(\{x_0 = x_0\}, \{\varphi\})$, et montrons que

si $s \subseteq \omega$ et $||s|| \geqslant m + 1$, alors $\{\varphi(\bar{a}_i) ; i \in s\}$ est contradictoire avec $T(\mathcal{M}')$. En effet, si on suppose le contraire et $(i_0, i_1, \ldots, i_m)$ est une suite strictement croissante d'éléments de s, alors

$$m = R^n_{\mathcal{M}'}(\{x_0 = x_0\}, \{\varphi\}) > R^n_{\mathcal{M}'}(\{\varphi(\bar{a}_{i_0})\}, \{\varphi\}) >$$

$$R^n_{\mathcal{M}'}(\{\varphi(\bar{a}_{i_0}), \varphi(\bar{a}_{i_1})\}, \{\varphi\}) > \ldots > R^n_{\mathcal{M}'}(\{\varphi(\bar{a}_{i_j}) ; j \leqslant m\}, \{\varphi\}) \geqslant 0$$

ce qui est impossible.
Donc $(t(\bar{a}, \mathcal{M}), \varphi)$ se divise.
Nous allons maintenant généraliser quelques théorèmes du paragraphe III.

Théorème 11: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in \bar{M}$. *Alors* $t(\bar{b}, \mathcal{A} \cup \bar{c})$ *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$ *si et seulement si* $t(\bar{c}, \mathcal{A} \cup \bar{b})$ *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$.
Démonstration: Lorsque $\mathcal{A}$ est un modèle de T, cela résulte du théorème 9 et de la commutativité du produit de type. Supposons dans le cas général, que $t(\bar{b}, \mathcal{A} \cup \bar{c})$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$, et soit $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ $||M||^+$-saturé.
Par les propositions 5 et 8, il existe $p \in S_n(\mathcal{M})$ tel que $t(\bar{c}, \mathcal{A}) \subseteq p$ et p ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$. Soit $\bar{c}' \in \bar{M}'$ réalisant p. Il existe alors un $\mathcal{A}$-monomorphisme h de $\mathcal{M} \cup \bar{c}'$ dans $\mathcal{M}'$ qui envoie $\bar{c}'$ en $\bar{c}$. Soit $\mathcal{M}_1 = h(\mathcal{M})$. Il est alors clair que $t(\bar{c}, \mathcal{M}_1)$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$. Maintenant, d'après les hypothèses et la proposition 5, il existe $\bar{b}' \in \bar{M}'$ tel que $t(\bar{b}', \mathcal{A} \cup \bar{c}) = t(\bar{b}, \mathcal{A} \cup \bar{c})$ et $t(\bar{b}', \mathcal{M}_1, \cup \bar{c})$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$. Il en résulte que $t(\bar{b}', \mathcal{M}_1 \cup \bar{c})$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{M}_1$ (proposition 4) et nous en déduisons que $t(\bar{c}, \mathcal{M}_1 \cup \bar{b}')$ est le fils aîné de $t(\bar{c}, \mathcal{M}_1)$. Mais rappelons que $t(\bar{c}, \mathcal{M}_1)$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$, donc il en existe une extension complète q sur $\mathcal{M}_1 \cup \bar{b}'$ qui ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$. Par la proposition 4, q ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{M}_1$, donc q est le fils aîné de $q \restriction \mathcal{M}_1$ et $q = t(\bar{c}, \mathcal{M}_1 \cup \bar{b}')$. Il en résulte

que $t(\bar{c}, \mathcal{A} \cup \bar{b}')$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$, et il en est de même de $t(\bar{c}, \mathcal{A} \cup \bar{b})$ puisque $t((\bar{b}, \bar{c}), \mathcal{A}) = t((\bar{b}', \bar{c}), \mathcal{A})$.

Théorème 12: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{B})$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

1) p *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$.
2) *Pour tout* Δ *fini,* $\Delta \subseteq L(\bar{x}_n)$, *on a* $R(p, \Delta) = R(p \restriction \mathcal{A}, \Delta)$.

Démonstration: Nous savons déjà par la proposition 7 que 2) implique 1). Pour montrer que 1) implique 2), il suffit de le faire dans le cas où B-A est fini. Soit donc $\bar{b}$ une suite énumérant B-A, et supposons que p ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$. Fixons $\Delta \subseteq L(\bar{x}_n)$, Δ fini, et soit $\mathcal{M}'$ un modèle $(||B|| + ||T||)^+$-saturé contenant $\mathcal{B}$. Soit $\bar{c} \in \bar{M}'$ réalisant p au-dessus de $\mathcal{B}$, et on construit, comme à la démonstration précédente un modèle $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ tel que

$$R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{M}) = R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{A}).$$

Par le théorème 11, nous savons $t(\bar{b}, \mathcal{A} \cup \bar{c})$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$, donc il existe $\bar{b}' \in \bar{M}'$ tel que $t(\bar{b}', \mathcal{M} \cup \bar{c})$ ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$ et $t(\bar{b}', \mathcal{A} \cup \bar{c}) = t(\bar{b}, \mathcal{A} \cup \bar{c})$. Il en résulte que $t(\bar{c}, \mathcal{M} \cup \bar{b}')$ est le fils aîné de $t(\bar{c}, \mathcal{M})$, et par le théorème III, 14

$$R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{M} \cup \bar{b}') = R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{M}) = R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{A})$$

et puisque

$$R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{M} \cup \bar{b}') \leqslant R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{A} \cup \bar{b}') \leqslant R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{A})$$

on voit que

$$R(p \restriction \mathcal{A}, \Delta) = R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{A}) = R(\bar{c}, \Delta, \mathcal{A} \cup \bar{b}') = R(p, \Delta).$$

Corrollaire 13: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{C})$. *Si* p *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{B}$ *et* $p \restriction \mathcal{B}$ *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$, *alors* p *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$.

Comparer ce résultat avec la proposition 4.

Corollaire 14: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{A})$. *Alors* $||\{p_1 ; p_1 \in S_n(\mathcal{B}), p \subseteq p_1,$ *et* p_1 *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}\}|| \leqslant 2^T$.

Les théorèmes suivants sont les analogues de théorèmes qui se trouvent dans [LS]. Les démonstrations sont les mêmes; il suffit, dans le cas où $p \in S_n(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ de changer l'expression "p et $p \restriction \mathcal{A}$ ont même rang" par : "p ne bifurque pas au-dessus de $\mathcal{A}$".

Théorème 15: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{B})$. *Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1) p *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$.
2) *Pour tout* $\mathcal{M}_0$ *et* $\mathcal{M}_1$ *tels que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}_1$, *il existe* p_1 *une extension de* p *dans* $S_n(\mathcal{M}_1)$ *tel que* p_1 *est le fils aîné de* $p_1 \restriction \mathcal{M}_0$.
3) *Il existe* $\mathcal{C}_0$ *et* $\mathcal{C}_1$ *tels que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_1$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_1$ *et pour tout* $\overline{b} \in \overline{B}$, $t(\overline{b}, \mathcal{C}_0)$ *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$, *et* p_1 *une extension de* p *dans* $S_n(\mathcal{C}_1)$ *tel que* p_1 *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{C}_0$.

A remarquer que 2) est une caractérisation du forking dans le langage des catégories C_n.

Théorème 16: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$, $p \in S_n(\mathcal{A})$ *et supposons que* $||M|| \geqslant ||M_1||^+$ *et que* $\mathcal{M}$ *est saturé. Si* p_1 *et* p_2 *sont deux extensions de* p *dans* $S_n(\mathcal{M})$ *ne bifurquant pas au-dessus de* $\mathcal{A}$, *alors il existe* f *un* $\mathcal{A}$*-automorphisme de* $\mathcal{M}$ *tel que* $p_2 = \hat{f}(p_1)$.

Théorème 17: Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, *et posons* $F^n_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \{p_1 ; p_1 \in S_n(\mathcal{B}),$ p_1 *ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}\}$ *et* $j^n_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ *la restriction de* $i^n_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ *à* $F^n_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. *Alors* $j^n_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ *est une application ouverte.*

Corollaire 18: Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *et* $p \in S_n(\mathcal{B})$, *et supposons que* p *est isolé et ne bifurque pas au-dessus de* $\mathcal{A}$. *Alors* $p \restriction \mathcal{A}$ *est isolé.*

REFERENCES

[BA] J.T. Baldwin — *Countable theories categorical in some uncountable power* — Ph. D. Thesis, Simon Fraser University, 1971.

[LC] A. H. Lachlan — On the number of countable models of a countable superstable theory — *FUND. MATH.*, LXXXI (1974), p. 133-145.

[LS] D. Lascar — Ranks and definability in superstable theories — à paraître dans *Israel Journal of Mathematics.*

[MO] M.D. Morley — Categoricity in power — *Trans. A. M. S.* 114 (1965), p. 514-538.

[SA] G.E. Sacks — *Saturated Model Theory* — Benjamin, Reading, Mass. (1972).

[SH 1] S. Shelah — Stability and the f.c.p.; model-theoretic properties of formulas in first order theories — *Ann. Math. Logic* 3 (1971), p. 271-362.

[SH 2] S. Shelah — Manuscrit de *"Stable Theories"*.