LA THÉORIE DE L'INFINI CHEZ CANTOR

Herbert Meschkowski

I. Les paradoxes

Dans l'essai «Von der wissenden Unwissenheit» du Cardinal Nicolas de Cues se trouve ([5] p. 95 sq) la considération suivante:

> Si une ligne infinie est constituée d'une infinité de segments d'un pied de long, et une autre d'une infinité de segments de deux pieds de long, elles sont néansmoins nécessairement égales, parce que l'infini ne peut pas être plus grand que l'infini.

Le Cardinal de Cues en déduit encore:

> Une ligne finie est divisible, une ligne infinie est indivisible, parce que l'inifne ... n'a pas de parties... De même que la ligne infinie qui est la source de la ligne finie, est indivisible et par conséquent invariable et éternelle, ainsi la source de toutes choses, à savoir Dieu, est éternel et invariable.

Quelques siècles plus tard, Bernard Bolzano composa ses «Paradoxes de l'Infini» [2]. Son texte contient des considérations qui s'apparentent à celles de Nicolas de Cues. Contrairement à d'autres mathématiciens, il ne voyait rien de «contradictoire, mais seulement quelque chose de frappant dans l'idée... qu'un ensemble infini peut être plus grand qu'un autre». Mais il montre aussi dans son travail qu'un calcul imprudent avec des séries infinies peut conduire à des véritables contradictions.

Beaucoup de mathématiciens, se fondant sur de telles constations étaient d'avis qu'il fallait complètement renoncer à travailler sur l'infini. Ainsi Descartes disait:

> Seul celui qui croit son esprit infini peut penser qu'il doit réfléchir sur l'infini.

Et en 1831 Gauss écrivait dans une lettre à Schumacher:

> Je proteste ainsi contre l'usage d'une grandeur infinie comme une chose achevée, ce qui n'est jamais permis en mathématique.

Cette protestation du «Princeps Mathématicorum» resposait sans doute sur l'opinion qu'une théorie assurée de l'infini (actuel) n'était pas possible, et que toute tentative dans ce sens devait déboucher sur un noeud de contradictions.

Il y avait cependant aussi des mathématiciens réputés qui pensaient autrement. Leibniz a écrit dans uns lettre:

> Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; et par conséquent la moindre particule doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différantes.

Bolzano aussi pensait ainsi. Il a repris la première phrase de cette citation de Leibniz sur la page de titre de ses «Paradoxes de l'Infini». Mais peut-être n'est-ce pas même Bolzano, mais son éditeuer Prihonsky qui est responsable du choix de cette devise ? En tout cas la phrase de Leibniz correspond parfaitement au point de vue de Bolzano lui-même. Celui-ci s'était en effet proposé pour but (§ 1) de «reconnaître l'apparence de contradiction qui s'attache à ses paradoxes mathématiques pour ce qu'elle est vraiment, c'est à dire une simple apparence». Leibniz et Bolzano voulaient donc admettre en mathématiques un infini actuel, tandis que Gauss (et plus tard Kronecker et les intuitionistes) n'autorisaient qu'un infini *potentiel.* Pour eux, on peut prolonger sans limite (jusqu'à l'infini) une suite finie donnée de nombres, mais on ne peut pas considérer une grandeur infinie comme «achevée» (Gauss).

C'est à cette discussion à propos de l'infini actuel que se rapporte un ouvrage de Constantin Gutberlet: «L'infini, considéré du point de vue mathématique et philosophique». Ce livre publié en 1878 devrait aujourd'hui être réédité, surtout parce qu'il a joué un rôle dans les discussions relatives à la théorie de Cantor. A vrai dire, quand le philosophe catholique publia son livre il ne savait encore rien des travaux de Cantor, qui avaient paru peu auparavant.

Gutberlet plaide pour un infini actuel au moyen de l'argument suivant ([9], p. 11):

> Ainsi lorsqu'on affirme qu'un ensemble, une extension, une succession, ne peuvent pas être actuellement, mais seulement potentiellement infinis, il y a là une contradiction, on devrait plutôt dire: Une grandeur ne peut pas être appelée potentiellement infinie que si elle trouve son fondement dans un infini actuel correspondant.
> Pourquoi en effet peut-on toujours dans une extension infinie aller au-delà de toute limite qu'on s'est fixé ? Parceque l'ensemble n'a effectivement pas de limite, n'a pas de bout, est en somme vraiment infini.

Mais d'autre part Gutberlet se refuse expressément à parler de *nombres* infinis (loc. cit. p. 18):

> ... qu'il est tout à fait incorrect de parler d'un nombre infini; par nombre on entend en effet un ensemble donné et déterminé d'unités; ...
> ...
> Il convient donc plutôt de dire *ensembles* infinis. Car un *nombre* seulement peut faire l'objet d'un calcul et d'une mesure, et pas un ensemble qui est à tous points de vue illimité et indéfinissable.

Cinq ans avant la publication de ce travail, Georg Cantor avait, dans une lettre, communiqué à son ami Richard Dedekind la démonstration du caractère non dénombrable du continu. Nous allons essayer de préciser la signification de cette découverte. Les paradoxes de l'infini reposent le plus souvent sur le fait, tellement étonnant pour des débutants, qu'on appliquer un ensemble infini de manière biunivoque sur un sous-ensemble propre. Cela parait étonnant parce que la chose est évidemment impossible dans le cas des ensembles finis.

Nous donnerons comme exemple le paradoxe de Galilée. Le grand physicien et astronome s'était étonné de voir que (en terminologie moderne) on peut établir une correspondance biunivoque entre l'ensemble N des nombres naturels ([1]) et le sous-ensemble P des nombres pairs, par l'application $n \to 2n$, $n \in N$. Cette correspondance peut être facilement réalisée en écrivant les deux suite l'une en-dessous de l'autre:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \ldots
\end{array}$$

A chaque nombre naturel on attribue donc un nombre pair, et l'ensemble P est pourtant un sous-ensemble propre de N.

Au séminaire de Karl Weierstrass à Berlin on avait découvert que même l'ensemble (partout dense) des nombres rationnels peut être «dénombré». Bien que les apparences semblent montrer clairement qu'il y a «beaucoup plus» de nombres rationnels que de nombres naturels, il y a moyen d'établir une correspondance biunivoque entre les deux ensembles.

II. Création de la Théorie des ensembles

Georg Cantor (un élève de Carl Weierstrass) se demanda alors s'il était possible aussi de dénombrer l'ensemble des nombres réels ou l'ensemble des *points d'une droite*. Le 9 décembre 1873 il communiqua à son ami Richard Dedekind de Brunswick une démonstration de *l'impossibilité* d'établir une telle correspondance.

Ainsi étaient jetées les bases d'une théorie mathématique de l'infini. Dans la nuit du transfini il devenait possible de faire des distinctions. Il y avait les ensembles dénombrables. C'était là «un vaste domaine»: on y trouvait certains sous-ensembles de N, comme ceux des nombres pair ou des nombres impairs. Mais l'ensembles des nombres rationnels et même celui des nombres algébriques s'avéraient aussi être dénombrables.

L'ensemble de tous les *nombres réels* au contrait ne se laissait pas dénombrer. Mais il pouvait à son tours (comme Cantor le montra plus tard) être appliqué de manière biunivoque sur les points d'un carré, d'un cube, et même sur l'ensemble de tous points de l'espace de 3 dimensions. Cantor appelait *équivalents* de tels ensembles, entre lesquels on pouvait établir une correspondance biunivoque.

Il y avait donc ainsi deux classes d'ensembles équivalents: les ensembles dénombrables et ceux qui avaient «la puissance du continu». Le fondateur de la théorie des ensembles réussit plus tard à démontrer: L'ensemble P(M) des parties d'un ensemble M a *une puissance supérieure à celle de M.*

Ceci veut dire, d'une manière plus précise, qu'on peut appliquer M d'une manière biunivoque sur un sous-ensemble de P(M), mais pas sur P(M) lui-même. Pour chaque ensemble on pouvait donc ainsi donner un ensemble de puissance plus grande. On avait d'abord du croire qu'il serait impossible de distinguer quoi que ce soit dans l'infini, et maintenant on avait toute une hiérarchie d'ensembles transfinis de puissances différentes.

Il est clair que, dans le controverse sur le sujet de l'infini, Cantor se trouvait du côté de ceux qui acceptaient l'infini actuel. Il avait en effet même montré qu'une théorie mathématique des ensembles transfinis était possible.

C'est pourquoi dans la discussion avec les collègues le livre der Gutberlet sur l'infini était pour lui particulièrement bienvenu. Mais sur un point essentiel le fondeur de la théorie des ensembles allait plus loin que Gutberlet. Ce dernier s'était en effet expressivement refusé de parler de *nombres* transfinis. Cantor au contraire introduisait dans sa théorie du transfini des nombres cardinaux et ordinaux infinis et étudiait leur arithmétique, qui sur des points essentiels s'écartait évidement de l'arithmétique des nombres finis.

La définition de ces nouveaux nombres a subi une remarquable évolution. En examinant ses développements on comprend mieux le principe de la construction des concepts mathématiques.

Dans son exposé d'ensemble de sa théorie dans les Mathematischen Annalen de 1895 ([3], p. 282), Cantor donne la définition suivante du nombre cardinal:

> Nous appelons «puissance» ou «nombre cardinal» de M cette notion générale que notre pensée active dégage de l'ensemble M en faisant abstraction de la Nature de ses divers éléments m et de l'ordre dans lequel ils nous sont donnés.

Il explique plus loin (p. 283) que le nombre cardinal M luimême est «un certain ensemble bien défini composé uniquement de 1», qui «existe dans notre esprit comme image intellectuelles ou projection (dans notre esprit)».

Cette définition est encore loin d'être satisfaisante. Il est en général admis (et dans un théorie moderne des ensembles cela résulte directement des axiomes) que deux ensembles sont égaux, quand ils contiennent les mêmes éléments. L'ordre des éléments et aussi la forme de la réprésentation sont sans importance. Si un ensemble ne contient pas d'autres éléments que le nombre 1, il s'agit tout simplement de l'ensemble fini ayant le seul élément 1. Il est clair que Cantor, en définissant ainsi le nombre cardinal, n'acceptait pas une pareille identification.

Le travail cité ici de Cantor est sa dernière publication. Mais nous trouvons dans sa correspondance des années suivantes et dans des rapports de ses collègues la preuve que ses conception ont ensuite encore varié.

On trouve ainsi dans une lettre à *Richard Dedekind* du 28 juillet 1899 ([3], p. 444) la version suivante de la définition:

> Etant donné un ensemble M, j'appelle *nombre cardinal* ou encore *puissance* de M, et je désigne par m, cette notion générale qui s'applique à M et uniquement aussi à tous les ensembles équivalents à M.

Aujourd'hui on exprime habituellement cette deuxième définition sous la forme suivante

> On appelle nombre cardinal ou puissance M d'un ensemble M la classe de tous les ensembles équivalents à M.

Pour la mathématique moderne, cette deuxième définition aussi n'est pas acceptable sans réserves. On ne peut pas sans restriction réunir dans une classe des ensembles équivalents. Il en existe trop et on court le risque de voir ses constructions de concepts conduire à des antinomies. Pour éviter cette difficulté, il est nécessaire de restreindre la construction des ensembles par une axiomatisation appropriée. Nous devons malheureusement renoncer à donner plus de details sur ce problème.

Mais nous voulons mentionner qu'on trouve encore chez Cantor une *troisième* version de la notion de nombre ordinal. Nous donnerons directement la version moderne de la définition dans le cas des nombres naturels. D'après *Hans von Neumann* on peut introduire les nombres naturels de la manière suivante à partir des concepts de la théorie des ensembles: *Le nombre 0 est l'ensemble vide, 1 est l'ensemble qui a pour unique élément l'ensemble vide:*

$$0 = \varnothing,\ 1 = \{\varnothing\},$$

On a ensuite [2],

$$\begin{aligned} 2 &= \{0,1\}, \\ 3 &= \{0,1,2\}, \\ 4 &= \{0,1,2,3\}, \\ 5 &= \{0,1,2,3,4\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans un ensemble M ordonné linéairement le sousensemble des élément de M qui *précédent* x est nommé la *section* A_x. Dans l'ensemble des nombres naturels,

$$\omega = \{0,1,2,3,4,\dots\},$$

la section A_4 (déterminée par 4 est donc l'ensemble $\{0,1,2,3\}$, c'est à dire (d'après la définition donnée ci-dessus) le nombre 4 lui-même. On a en général pour l'ensemble $\omega : n = A_n$: *Chaque nombre naturel n est égal à la section déterminée par ce nombre n.*

On peut alors étendre cette notion de section à des ensembles transfinis bien ordonné (3) quelconque et définir: Un ensemble bien ordonné M sera dit *nombre ordinal* si chaque élément x de M est égale à la section déterminée par $x : x = A_x$.

Tout ensemble de nombres ordinaux est bien ordonné. Ceci signifie que parmi les nombres ordinaux équivalents à un nombre ordinal il y en a un plus petit. En voici un exemple simple. Soit de nouveau ω l'ensemble des nombres naturels et

$$\omega + 1 = \omega^* = \{0,1,2,3,\dots; \omega\}$$

le «suivant» de ω. On peut définir d'une manière analogue $\omega + 2$, $\omega + 3$, ... Il est clair que ces ensembles ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... sont des ordinaux *équivalents*. ω est le petit de ceux-ci (au sens de l'ordre qui existe pour ces nombres).

On peut encore démontrer que *tout* ensemble peut être bien ordonné et qu'on peut attribuer à chaque ensemble bien ordonné, qui lui est semblable (4). Ces nombres ordinaux équivalent entre eux sont appelés par Cantor les nombres d'une *classe de nombres.* C'est ainsi que les ordinaux ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, appartiennent à *une* classe de nombres; au contraire, dans le cas des nombres finis, chaque nombre constitue une classe à lui seul.

Après ces préliminaires on peut donner la troisième définition cantorienne de la notion de nombre cardinal. On la trouve dans la biographie du mathématicien allemand Gerhard Kowalewski ([14] p. 202):

D'ailleurs on peut représenter ces puissances, comme Cantor avait l'habitude de le faire, par le nombre le plus petit ou le nombre initial de chaque classe de nombres, et même identifier les alephs avec ces nombres initiaux.

Nous avons ainsi trois définitions tout à fait différentes de la notion de nombre cardinal. D'après une remarque dans une lettre à Jourdain [5], Cantor avait la notion de nombre cardinal déjà en 1877. Une version publiée en 1884 n'est pas essentiellement différente de la formulation donnée dans le travail de 1895. Nous pouvons donc donner la chronologie suivante:

1877 - 1895	Première définition (... un ensemble de 1),
1899	Deuxième définition (... une classe d'équivalence),
Après 1900	Troisième définition (... nombre initial d'une classe de nombres).

III. Mathématique et métaphysique chez Georg Cantor

Il est indéniable que les trois définitions de la notion de nombre cardinal sont essentiellement différentes. En vertu de la première et de la troisième définition, le nombre cardinal est *un ensemble* (pas le même), en vertu de la seconde c'est *un ensembles d'ensembles*. La première définition de la notion de nombre cardinal est loin d'être claire, et nous pouvons comprendre que beaucoup de mathématiciens de l'époque n'acceptèrent pas la nouvelle théorie de Cantor. Il était particulièrement pénible pour Cantor de voir que son ancien maître Leopold Kronecker se trouvait dans le camp de ses adversaires. Une réconciliation fut tentée en 1884. Cantor écrivit à Kronecker et reçu une réponse somme toute assez conciliante [6]. Mais la vielle querelle reprit plus tard, quand Kronecker traita le fondateur de la théorie des ensembles de «corrupteur de la jeunesse». Il estimait que la formation mathématique des étudiants sera sérieusement compromise si on acceptait de considérer les nombres transfinis de Cantor comme un prologement légitime de la suite des nombres naturels. Nous pouvons aujourd'hui comprendre l'opposition de Kronecker lorsque nous nous reappelons à quel point les premières définitions des nombre cardinaux et ordinaux étaient effectivement insuffisantes.

Cantor lui-même cependant ne renonçait pas à ses nombres transfinis, même lorsqu'en 1884 son ami Mittag-Leffler lui conseilla de retirer et publication sur les nombres ordinaux. Et les quelques rares témoignages de ses dernières années nous apportent aussi la preuve que même la découverte des antinomies n'avait pas ébranlé ses conceptions. Le 9 mars 1907 il écrivait [7] dans une lettre à Mrs. Chisholm-Young à propos des nombres transfinis

> Ne vous laissez pas troubler par ceux qui croient devoir douter de la réalité et de la non-contradiction des nombres transfinis; ces nombres ont la même solide réalité que les nombres cardinaux finis qu'on connaît depuis longtemps.

Nous avons aujourd'hui des constructions axiomatiques de la théorie des ensembles, par laquelle la théorie des nombres transfinis est aussi assurée.

Cette «assurance» est à comprendre comme-ci: il est établi que par exemple dans le système de Abian [8] les antinomies classiques ne peuvent pas se présenter. La non-contradiction ne se laisse cependant démontrer que pour des parties de la théories des ensembles. Mais on sait aussi qu'il est impossible de prouver la consistance de l'analyse ou même de la théorie des nombres par les méthodes du système considéré [9]. La théorie des nombres est donc aussi bien (ou aussi mal assuré que l'analyse, par exemple.

Cantor a d'ailleurs aussi apporté quelques contributions remarquables à l'analyse classique. Dans sa théorie des nombres réels par exemple il se montre un bon élève de son maître Weierstrass. Ses méthodes dans le traitement de l'analyse ne sont pas moins rigireuses que celles par exemple de ses amis Schwarz et Heine. On serait donc en droit de s'étonner qu'il ait introduit la notions «nombre cardinal» et de «nombre ordinal» sous une forme aussi peu précise.

Pour comprendre cette situation, il convient de penser aux débuts de la science mathématique. L'axiomatisation de la géométrie se présente pour la première fois dans les *Eléments d'Euclide*. Mais bien avant lui des mathématiciens babyloniens, égyptiens et même grecs avaient déjà fait de la géométrie. Leurs affirmations reposaient sur les vues immétiates et intuitives.

L'histoire de la théorie des ensembles nous fournit l'importante ocasion de suivre la génèse d'une discipline mathématique depuis ses débuts «naifs» jusqu'à sa fixation axiomatique. Cet aperçu nous est rendu plus facile par le fait que les débuts de la théorie des ensembles sont (essentiellement) l'œuvre d'un *seul* homme. Il exact que ses conceptions étaient assez vagues au début, et qu'il les a lui-même plusieurs fois précisées ensuite. Mais on ne peut manquer d'être frappé par l'assurance presque prophétique avec laquelle il maintenant ses affirmations en face des critiques.

Cette attitude se comprend mieux quand on réfléchit à la conception qu'avait Cantor d'essence de la mathématique. Un feuillet de ses manuscrits inédits nous éclaire mieux encore que ses travaux publiés; il s'agit d'un projet, écrit au crayon, d'un travail «Sur les liens de la théorie des ensembles et de l'arithmétique», datant problement de 1913.

> Sans un petit grain de métaphysique il n'est pas possible, à mon avis, de fonder une science exacte. On excusera donc les quelques mots que je me risque à dire dans cette introduction au sujet de cette doctrine tellement honnis de nos jours. La métaphysique, telle que je la conçois, est la science de *ce qui est*, c'est à dire de ce qui *existe*, donc du monde tel qu'il est en soi, et pas tel qu'il nous apparaît.
>
> Tout ce que nous percevons avec nos sens et ce que nous nous représentons par notre pensée abstraite est du *non-existant* et est ainsi tout au plus une trace de ce qui est.

Mais que peut nous apprendre au sujet de *l'être* une théorie mathématique comme la théorie des ensembles ? Dans son travail «Sur les différents points de vue concernant l'infini actuel» ([3], p. 370-376) Cantor évoque la possibilité d'accepter ou rejeter l'infinie actuel, soit du point de vue abstrait, soit du point de vue concret. Cela fait quatre combinaisons possibles (et chacune a ses défenseurs !). Cantor se range parmi ceux qui acceptent l'infini actuel aussi bien du point de vue concret que du point de vue abstrait ([3], p. 373). Il est peut-être chronologiquement le premier à avoir adopté d'une manière aussi catégorique ce point de vue avec toutes ses conséquences». Il est en tous cas convaincu qu'il «ne sera pas le dernier à le défendre».

La croyance à l'infini actuel du point de vue concret: il faut entendre par là la conviction que des ensembles actuellement infinis se rencontrent dans la réalité. Dans uns lettre à Mittag-Leffler (du 16 novembre 1884) Cantor exprime l'opinion que l'ensemble des atomes dans l'univers est dénonbrable, mais celui des atomes d'«éther» aurait la puissance du continu ([10]). Les mathématiciens au courant des résultats de la physique moderne ne pourront évidemment plus partager son avis.

L'acception de l'infini actuel «du point de vue abstrait» se fonde sur la doctrine des idées de Platon. Cantor se réfère explicitement à la doctrine de Platon dans son grand travail sur la théorie des ensembles ([3], p. 204).

Dans une lettre au P. Jeiler (Pentecôte 1888) il écrivait ([11]):

> Pour comprendre les éléments de la théorie des ensembles, il n'est pas nécessaire d'avoir eu une savante préparation en mathématique moderne; elle serait dans ce but plutôt nuisible qu'utile, parce que par le succès éclatant de leurs formulations de plus en plus parfaites, qui permet des applications toujours plus nombreuses à l'aspect mécanique de la nature, la majorité des mathématiciens modernes se sont laissés aller à une ivresse de la victoire qui les a fait tomber dans une vision matérialiste unilatérale et les a rendus aveugles à toute perception métaphysique objective et par conséquent aussi au fondements de leur propre science.

Nous ne devons à vrai dire pas perdre de vue que ce sont précisément les constructions audacieuses des notions qui ont contribué à inciter les mathématiciens à chercher refuge dans le formalisme. Par sa définition très générale de la notion d'ensemble [12], Cantor permettait de définier aussi des ensembles qui conduisaient à des contradictions. Pour éviter ses antinomies, Hilbert et ses élèves (qui désiraient sauver le «Paradis» du transfini que Cantor nous avait donné) ont procédé à une édification axiomatique des théories mathématiques, afin de pouvoir démontrer la noncontradiction. Comme on le sait [13], ce programme de Hilbert ne s'est pas laissé exécuter complètement. Pour établir la non-contradiction d'un système formel, il faut au moins faire usage de moyen qui n'appartiennent pas au système.

Mais la tendance à la formalisation des théories mathématiques qui s'est avérée à beaucoup d'égards très utile et très favorable à la compréhension entre mathématiciens de divers pays, est restée. Il est aujourd'hui possible de développer toute la mathématique, à la façon du groupe Bourbaki, à partir de quelques structures fondamentales simples.

La mathématique n'est-elle donc alors vraiment rien de plus que la «science des systèmes formels» ? On trouve toujours encore dans la littérature mathématique moderne des protestations contra la conception suivant laquelle la mathématique ne serait rien d'autre qu'un jeu avec des formules vides. On lit par exemple dans l'introduction du livre «Was ist Mathematik ?» de Courant et Robbins ([4], p. XV):

> Le nerf vital de la science mathématique est menacé par l'affirmation que la mathématique n'est rien d'autre qu'un système de déductions à partir de définitions et d'hypothèses qui doivent être exemptes de contradictions, mais qui peuvent être choisies suivant le bon plaisir des mathématiciens. Si tel était le cas, la mathématique ne séduirait aucun homme intelligent. Elle ne serait qu'un jeu de définitions, de règles et de syllogismes sans signification. La prétention que l'intelligence pourrait créer librement des systèmes significatifs de postulats est une trompeuse demi-vérité.

Celui qui lit ceci est tenté de demander «l'entière vérité» c'est à dire donc une interprétation qui ne serait pas purement formaliste de la mathématique. Cet ouvrage est une belle introduction d'une lecture facile, mais il n'apporte pourtant aucune réponse explicité à la question posée par son titre.

IV. La théorie des archétypes

Il est étonnant qu'on ne trouve guère des tentatives, dans la littérature mathématique moderne, pour apporter une réponse aux problèmes de fondements qui ne se laissent pas résoudre par les méthodes formelles. Il y a pourtant quelques raisons de les examiner. Depuis le début de la formalisation des théories mathématiques, la plupart des mathématiciens n'ont plus cherché à fonder la mathématique sur la doctrine des idées. Ils renoncent (avec Hilbert) à chercher la vérité («unique» et «absolue») et se contentent de la «sécurité», la sécurité apportée par le fait que les systèmes formels fonctionnent et ne conduisent pas à des contradictions. Mais nous savons aujourd'hui qu'il n'y a pas de moyen de donner la démonstration absolue de la non-contradiction.

Il est donc assez naturel de ramener parfois les regards vers cette époque où au dessus de la pensée du mathématicien luisait encore (suivant l'expression de Reidemeister) l'«éclat de l'être». La conception suivant laquelle le travail du mathématicien se réduit à un jeu de formules (dépourvues de sens ?) est peu réjouissante. C'est pourquoi Barker a récemment rappelé, dans un ouvrage dédié à Kurt Gödel à l'occasion de son 60ᵉ anniversaire ([6], p. 1 sqq) que Gödel, bien connu par ses pénétrantes recherches sur des problèmes de décidabilité et de non-contradiction, est un adepte d'une conception réaliste de la mathématique. Il cite (loc. cit. p. 1):

> Les classes et les concepts... peuvent être conçus comme des objets réels... existants indépendemment de nos définitions et de nos constructions. Il me paraît qu'il est aussi légitime d'admettre pareils objets que d'admettre

> les corps physiques reéls, et qu'il y a tout autant de raison de croire à leur existence. Ils sont nécessaires pour obtenir une théorie satisfaisante des mathématiques que des corps physiques sont nécessaires pour obtenir une théorie satisfaisante de nos perceptions sensorielles.

Barker qualifie de «réalisme» la conception de Gödel. Il entend par là une philosophie des mathématiques qui considère les lois mathématiques comme une description d'objets de quelconque nature. Suivant une suggestion de Bernays il appelle cette façon de voir un «platonisme» — mais avec un p miniscule». Il entend montrer par là que la conception présentée ici s'apparente à celle de Platon, mais que les partisans d'un «réalisme» moderne ne peuvent pas être considérés tout simplement comme des «élèves de Platon».

Il est très remarquable, que cette forme moderne du platonisme bénéficie aujourd'hui du soutien de beaucoup de physiciens de valeur. Le fait que le physiciens se préoccupent du «statut» de leurs objets a précisément pour conséquence de leur permettre d'aider les mathématiciens à donner une réponse à la question de savoir si et dans quel sens les objets de la mathématique peuvent ê tre considérées comme «réels».

Heisenberg dit dans ses «Gesammelte Reden und Aufsätze» ([10], p. 34)

> ... que les particules élémentaires sont pour ainsi dire toutes formées de la même matière, si vous voulez, d'énergie... Les particules élémentaires de la physique moderne peuvent comme les polyèdres platoniciens se transformer l'une en l'autre. Elles ne sont pas elles-mêmes constituées de matière, mais elles sont les seules formes possibles de la matière.

Et plus loin, p. 39:

> La théorie définitive de la matière sera caractérisée, comme chez Platon, par une série de condition de symétrie.

Ce que la physique moderne peut dire d'essentiel au sujet de la «substance», ce sont des propriétés de symétrie. Ce ne sont pas exactement les symétries des polèdres platoniciens, mais quand même chaque fois des symétries de certaines structures mathématiques. Ainsi la physique moderne se rapproche effectivement de la doctrine classique des idées. Heisenberg cite dans son livre son collègue Pauli, qui l'exprime clairement ([10], p. 46):

> Il s'agit ainsi pour la science de la nature actuelle d'un prolongement chrétien de la mystique lumineuse de Platon, dans laquelle le véritable fondement de l'esprit et de la matière est cherché dans les prototypes.

D'affirmations analogues se trouvent chez Schrödinger et Heitler. On peut par exemple lire chez Heitler ([11], p. 119):

> La loi de la nature (de la physique par exemple) est un pareil protoype, une «idée». Mais elle agit dans la matière, elle en est la véritable essence, sans laquelle il ne peut y avoir aucune matière.

Il est donc possible d'imaginer une conception qui accordait aux «rigides petits morceaux de réalité» de la physique classique un statut dont ne peut parler que dans le langage mathématique. Et quand on constate que l'existence en physique n'est assurée que par des structures mathématiques, on peut aussi se risquer à accorder une réalité aux objets de la mathématique.

Plus important encore pour les problèmes des fondaments de la mathématique sont les résultats de la collaboration entre le physicien W. Pauli et le psychologue C.G. Jung. Dans sa théorie des archetypes, Jung, parle de la découverte de l'existence dans le subconscient de l'homme de «prototypes», qui ne peuvent pas être expliqués par sa propre expérience. On connaît le rapport sur l'expérience de son propre rêve à l'age de 4 ans. Il vit des images, des symboles qui ne pouvaient certainement pas provenir de l'expérience d'un petit enfant ([14]).

A partir d'expériences de genre, Jung conclut à l'existence de subconscience collectif, qui n'a partient pas seulement à l'individu isolé. Jung appelle «archétype» les modèles qui se trouvent dans se subconcient.

Cette notion d'archétypes n'a pas été inventée par Jung. Elle se trouve dans l'antiquité et au Moyen-Age chez beaucoup de philosophes et de théologiens. Pauli a fait remarquer que cette notion d'archétypes se rencontre aussi chez nombre de mathématiciens de valeur, et avant tout chez Kepler dans son «Harmonia Mundi». Il cite ([10], p. 123):

> La géométrie est avant la création des choses, aussi éternelle que l'esprit de Dieu, *est Dieu lui-même.* (Qu'y-at-il en Dieu qui ne soit pas Dieu lui-même ?) et lui a fourni les modèles pour la création du monde.

Voilà pourquoi Kepler appelle la géométrie «l'archétype du cosmos» (a.a.O., p. 121).

Jung a présenté les archétypes comme une «paraphrase explicative» de l'«idée» platonicienne. Par sa collaboration avec Jung, Pauli a jeté un pont entre la doctrine des idées de Platon qui sert à fonder la mathématique classique et la psychologie moderne. Il n'y a pas encore beaucoup de mathématiciens qui ont franchi le pont. Mais une pareille démarche pourrait être utile pour interpréter la constitution de la théorie des ensembles de Cantor. Dans les dernières années de sa vie, Cantor se vit demander par Jourdain quand et comment il avait été conduit à concevoir ses notions. Il répondit le 28 février 1906 ([8], p. 128):

> Dans ce genre de choses le subconcient joue aussi un grand rôle.

Il aurait donc sans doute apprécié les considérations de Pauli. Jadis les enfants jouaient: «Je vois quelque chose, que tu ne vois pas !» Peut-être peut-on décrire l'apport de Cantor de la manière suivante: Il a «vu» quelque chose, que les autres mathématiciens (au début) ne voyaient pas. Il *voyait* les modèles (les «archétypes») des nombres transfinis, *bien avant* d'être capable de donner de ces nouveaux nombres une définition satisfaisante pour les mathématiciens.

Ses vues n'étaient pas par exemple des abstractions d'expérience physique (puisqu'il n'y a pas d'ensembles transfinis dans la nature) et pas davantage des connaissances de généralisations antérieures accumulées dans le subconcient collectif (puisqu'on ne savait encore rien au sujet de ces nombres transfinis). «Avec les yeux de l'esprit» il a vu quelque chose qu'avant lui personne n'avait vu.

Ces considérations appartiennent à un genre de problème dont le mathématicien moderne ne s'occupe pas volontiers. Mais nous devrions essayer de réfléchir sur ces questions évoquées ici. Cardinalement nous devrions quand même pouvoir répondre à la question «Qu'est vraiment la mathématique ?» On peut certainement dire: «Elle est la science des systèmes formels.» Mais cette réponse ne peut pas être le dernier mot, si nous maintenons que la mathématique est plus qu'un jeu de symboles vides de sens.

NOTES

(1) Nous représentons par N l'ensemble des nombres 1,2,3,..., c'est à dire $N = \{1,2,3,...\}$. Par contre nous avons $\omega = \{0,1,2,3,...\}$.

(2) Pour plus de details, voir par exemple [15], p. 193 sqq.

(3) Un ensemble ordonné est dit *bien ordonné* si chaque sous-ensemble non vide possède un premier élément.

(4) Deux ensembles ordonnés sont dits *semblables* quand il existe entre eux une correspondance biunivoque respectant l'ordre.

(5) Voir [8], p. 127.

(6) Voir [15], p. 237 sqq.

(7) Publié dans «Der Mathematikunterricht» [17] 1971, p. 30-34.

(8) Cf. [1], ou aussi [15], p. 176 sqq.

(9) Pour plus de détails, voir par exemple [16], p. 112 sqq.

(10) Publié comme lettre n° 10, dans [15].

(11) Franzisk. Studien 47, 1965, p. 65-73.

(12) [3], p. 282.

(13) Voir par ex. 16, p. 87 sqq.

(14) [7], p. 25 sqq.

LITTERATURE

1. ABIAN, A.: The theory of sets and transfinite arithmetic. Philadelphia und London 1965.
2. BOLZANO, B.: Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851, Neudruck Darmstadt 1964.
3. CANTOR, C.: Gesammelte Abhandlungen und Schriften mathematischen und philosophischen Inhalts. Herausgegeben von E. Zermelo, nebst Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin 1930, Neudruck Hildesheim 1962.
4. COURANT, R., und ROBBINS, H.: Was ist Mathematik ? Berlin-Göttingen — Heidelberg 1962.
5. v. CUES, N.: Die Kunst der Vermutung, Bremen 1957.
6. ———: Foundations of Mathematics. Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel. Ed. by J. J. Bulloff, Th. C. Holyke, S. W. Hahn, Berlin-Heidelberg-New York 1969.
7. v. FRANZ, M.-L.: C. G. Jung, Frauenfeld 1972.
8. GRATTAN-GUINESS, I.: The Correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain. Jahresber. DMV 73, 1971, S. 111-130.
9. GUTBERLET, C.: Das Unendliche mathematisch und metaphysisch betrachtet, Mainz 1878.
10. HEISENBERG, W.: Schritte über Grenzen, München 1971.
11. HEITLER, W.: Naturphilosophische Streifzüge, Braunschweig 1970.
12. HEITLER, W.: Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften Ak. d. Wiss. und d. Lit., Mainz, Abh. Math. Nat. Kl., 1972, S. 45-64.
13. KLAUA, D.: Allgemeine Mengenlehre, 2. Aufl., Berlin 1968.
14. KOWALEWSKI, G.: Bestand und Wandel, München 1950.
15. MESCHKOWSKI, H.: Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig 1967.
16. MESCHKOWSKI, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens, 4. Aufl., Braunschweig 1970.
17. MESCHKOWSKI, H. (Hrsg.): Grundlagen der modernen Mathematik, Darmstadt 1972.
18. MESCHKOWSKI, H.: Platonismus im 20. Jahrhundert. Die Wiss. Red., 1972, S. 20-26.
19. PAULI, W.: Der Einfluß archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler. Studien aus dem C. G. Jung — Institut — Zürich IV, Zürich 1952.
20. PAULI, W.: Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie. Braunschweig 1961.