STRUCTURES ET CATEGORIES

J. Piaget

Etude épistémologique

Les relations épistémologiques entre les catégories et les structures (au sens bourbakiste de celles qui ont été thématisées avant les catégories) soulèvent une série de problèmes non résolus et même peu étudiés, bien que ces relations se présentent sous une forme assez paradoxale et, semble-t-il, peu fréquente dans l'histoire des mathématiques. En effet, d'une part, les catégories les plus intéressantes portent sur les structures les plus fortes, et, même en ce cas, elles sont encore comme asservies à leurs contenus, dont il s'agit sans plus de fournir une analyse en termes de morphismes. Les structures, par contre, paraissent beaucoup plus libres par rapport à leurs propres contenus, car un même contenu (comme les nombres) peut se prêter à de multiples transformations, servant ainsi de matière à des structures bien différentes. Mais, d'autre part, les instruments catégoriels sont très semblables entre eux, visant essentiellement à dégager des formes partiellement ou entièrement communes, la différenciation des catégories tenant alors aux diverses combinaisons possibles des flèches: or, malgré cette soumission aux contenus, il se trouve en fait que les généralisations sont plus larges au plan catégoriel qu'au plan structural et que de nouvelles structures peuvent même être découvertes grâce à des combinaisons rendues ainsi possibles mais jusque là imprévues.

Ce double aspect apparemment antithétique de subordination aux contenus structuraux et de plus grande liberté combinatoire semble montrer que la construction des catégories ne s'oriente pas dans le même sens que celle des structures et n'en constitue donc pas un simple prolongement. C'est cette dualité des directions de développement que nous aimerions analyser dans ce qui suit. L'hypothèse, très simple, sera que les structures s'engendrent les unes à partir des autres par filiations longitudinales (généralisations constructives et complétives) ([1]), tandis que les morphismes et les catégories constituent essentiellement des instruments de comparaisons procédant par analyse réflexive selon une direction transversale, pouvant ainsi dégager les formes communes à des structures proches ou éloignées indépendamment de leurs filiations ou n'utilisant leurs modes de construction qu'à titre d'éléments de comparaisons.

I. QUELQUES CARACTERES SIGNIFICATIFS DES CATEGORIES

Commençons par rappeler quelques propriétés bien connues des catégories, dans le but de montrer en quoi elles sont significatives eu égard à notre hypothèse d'une orientation «transversale», avec naturellement possibilité d'étages superposés en une stratigraphie (mais distincte des branches successives d'un arbre).

(1) Le premier point à noter est qu'il existe une «catégorie de toutes les catégories» (ne se comptant pas elle-même comme élément) et qu'elle n'est pas antinomique comme l'ensemble de tous les ensembles. La raison en est qu'elle ne résulte pas simplement d'une somme d'emboîtements (sans quoi le tout serait à la fois ensemble total et sous-ensemble) mais de la réunion de toutes les correspondances avec leurs compositions, ce qui suppose d'autres relations entre le tout et les parties que les seules relations d'inclusions.

L'axiomatique de Lawvere est claire à cet égard. Elle se compose de trois parties: (a) l'axiomatique préalable des catégories en général, dégageant leurs propriétés communes, qui sont donc tout autre chose que celles de la «catégorie des catégories»; (b) l'axiomatique de la catégorie des ensembles; et (c) l'axiomatique de la «catégorie des catégories» sans passer par les ensembles. En outre, et cela confirme ce que nous dirons sous 2 de la difficulté à définir des extensions, il montre que, pour atteindre celles-ci, il faut faire passer chaque catégorie composante à l'état de catégorie «discrète» et pour cela ramener toutes les flèches à l'identité: c'est assez dire qu'en ce cas il y a «oubli» de tout ce qui est intéressant et recul au niveau des catégories d'ensembles, ce qui peut être utile mais nous éloigne de la «catégorie des catégories».

(2) Si la totalité propre à une catégorie ne constitue pas une classe générale définie par les propriétés communes aux sous-classes, mais un système d'articulations solidaires et différenciées, en ce cas un secteur du tout ne se caractérise pas en termes d'extension ou d'inclusion mais par le rôle nécessaire que ses flèches jouent dans la cohérence du système total. En effet, chaque flèche comporte une signification distincte mais s'ajoute par ailleurs aux précédentes, de telle sorte que leurs relations ne se définissent pas en termes de compréhension et d'extension mais pourraient s'exprimer sous la forme suivante: plus de flèches $\supset$ plus de combinaisons possibles $\supset$ plus de significations. Certes les injections et les surjections peuvent traduire des inclusions lorsqu'elles portent sur des structures emboîtées, mais en tant que structures. On peut ainsi parler d'inclusions dans le cas des morphismes reliant une suite transitive de groupes abéliens finis dont la limite inductive est un groupe infini. Mais de façon générale pour les catégories, les morphismes et foncteurs reliant le tout aux parties sont plus nombreux et complexes qu'entre deux sous-systèmes. C'est d'ailleurs ce fait fondamental qui explique pourquoi la catégorie de toutes les catégories n'est pas antinomique et qui conduit à la différence importante que nous allons souligner maintenant entre l'ordre ascendant et descendant des généralisations structurales et catégorielles.

(3) La construction des structures s'effectue par généralisations synthétiques (combinaisons d'opérations empruntées aux structures précédentes) ou complétives (opérations sur des opérations). Or ce passage de structures plus pauvres à des structures plus riches en compréhension (cf. la filiation conduisant des monoïdes aux groupes, etc.) n'a pas toujours, et même ordinairement pas, d'équivalent fonctoriel: il n'existe donc pas de

généralisation complétive systématique en termes de catégories. Par contre le passage inverse, en ordre descendant est fonctoriellement possible en utilisant les «foncteurs d'oubli» qui font abstraction de certains caractère du tout.

Ce fait est très significatif et montre que la construction catégorielle d'un système total s'effectue selon des itinéraires d'orientation différente de celle des filiations structurales. Celles-ci procèdent selon une direction que nous appellons longitudinale par différenciations et emboîtements que l'on peut disposer sous la forme d'arbres. Les morphismes et foncteurs consistent par contre à comparer entre eux des termes d'abord empruntés à ces constructions structurales, mais à les comparer selon des directions transversales et cela à tous les niveaux, par étages superposés. Cela ne signifie pas que les correspondances n'interviennent pas dans les constructions structurales elles-mêmes: toute transformation opératoire est au contraire préparée par de telles comparaisons, mais locales. D'autre part, les liaisons transversales se relient entre elles par des liaisons entre liaisons jusqu'aux paliers supérieurs, mais par étages superposés selon une disposition stratigraphique, comme dans le cas des morphismes fonctoriels rattachant les uns aux autres de façon transversale les foncteurs eux-mêmes. Or cette construction par superposition d'étages ne se confond pas avec la filiation longitudinale des structures, et c'est bien ce que montre le processus de descente avec les foncteurs d'oubli, opposé à la généralisation complétive ascendante des structures non exprimables de façon générale en termes purement fonctoriels.

(4) A cela s'ajoute le fait que, dans le cas des catégories intercatégorielles, les structures reliées entre elles à titre de contenus, ne sont considérées que de l'extérieur, dans leurs correspondances intersystèmes, sans s'occuper des propriétés internes des objets. Ceci confirme à nouveau l'orientation transversale des morphismes, puisque les propriétés négligées sont celles qui sont en jeu dans les constructions structurales. Mais cela explique, d'autre part, le plus grand degré de liberté des morphismes, permettant de relier des systèmes non directement

transformable l'un dans l'autre. Il en résulte un pouvoir de généralisation supérieur, au plan des catégories à ce qu'il est dans la domaine des structures. La raison en est que des liaisons transversales peuvent s'établir à tous les niveaux de construction des structures et entre des éléments de constructions séparées pour se coiffer enfin, à l'étage transversal supérieur, de liaisons encore plus larges dominant l'ensemble du système. D'autre part, ces connexions transversales demeurant extérieures à la nature interne des objets qui leur servent de contenus, il en résulte aussi, comme déjà dit, que les compositions entre les flèches ouvrent de nouvelles possibilités et qu'apparaissent des combinaisons imprévues pouvant alors se traduire en termes de structures: tels les nouveaux groupes que l'on a découvert par cette méthode et que l'on a pu construire structuralement après que les foncteurs en aient montré l'existence.

(5) Une dernière différence à signaler entre les instruments catégoriels et les transformations structurales est que celles-ci peuvent être annulées, tandis que les comparaisons n'ont pas d'inverses mais seulement des réciproques, une absence de comparaisons n'étant pas une négation. Certes une comparaison peut mettre en évidence des différences, lesquelles sont en un sens des négations implicites, mais il n'y a correspondance entre différences que si celles-ci se répètent (b' est différent de b comme a' c'est de a, etc.) et cela revient donc à les subordonner à des relations d'équivalence partielle. C'est pourquoi nous utilisons la métaphore spatiale d'un trajet transversal pour les morphismes, un tel trajet, s'il existe, ne pouvant qu'être suivi dans les deux sens, tandis que dans l'arbre des filiations structurales le choix d'une branche la différencie des autres et comporte donc des négations partielles.

Il est vrai que l'on peut réunir réciprocités et inversions (au sens de négations) sous le terme générique de symétries et que l'on fera correspondre aux opérations symétriques du groupe la notion de morphismes inversibles. Mais il n'en reste pas moins que les involutions ne sont pas générales, au plan des correspondances, tandis qu'en logique une relation comporte une converse, une complémentaire et une duale avec trois involutions. Et surtout, indépendamment des énoncés comme tels, il est indispensable, dans le domaine des transformations de distinguer celles qui se bornent à modifier l'ordre ou le sens de parcours et celles qui comportent une négation et qui sont nécessaires à toute quantification, à partir déjà des différences d'extension en jeu dans l'inclusion d'une sous-classe en une classe.

Au total les cinq caractéristiques que nous venons de rappeler à propos des instruments catégoriels montrent assez que, s'il existe une étroite interdépendance entre leur constitution et les transformations opératoires propres aux structures, il n'y en a pas moins là deux réalités distinctes. Avant de chercher à préciser leurs relations, il nous reste à essayer de comprendre le pourquoi du décalage entre la thématisation déjà ancienne des structures et celle bien plus récente des catégories qui en sont issues.

II. LA THEMATISATION DES STRUCTURES ET CELLE DES CATEGORIES

Une loi générale de l'histoire des mathématiques est qu'en une période donnée ou dans les travaux d'un novateur, certaines opérations peuvent être utilisées à titre instrumental, sans constituer pour autant des objets de pensée au sens d'une réflexion théorique: il faut donc distinguer pour ces opérations une phase de construction et d'utilisation et une phase de thématisation où elles deviennent des «êtres mathématiques» à étudier pour eux-mêmes et parmi les autres. C'est alors, mais alors seulement, et en fonction de cette thématisation, que l'on dégage explicitement la structure dont témoignaient déjà, mais implicitement, de telles opérations.

Or, si la thématisation est liée à des processus psychologiques complexes de prise de conscience, elle n'en présente pas moins une importance épistémologique évidente, liée aux mécanismes de l'abstraction et sur laquelle ont insisté, entre autres, Cavaillès dès 1938 et depuis lors J. Ladrière et G. Henriques [2]. C'est, par exemple, un fait historique riche d'enseignements épistémiques que la construction des «structures-mères» par les Bourbaki, par un procédé comparatif et régressif analogue selon eux à une sorte d'«induction» et fondé essentiellement sur les correspondances, ne les ait pas conduits à une thématisation des catégories, celle-ci ayant pourtant été dans la suite tirée en bonne partie de leurs travaux.

(1) C'est donc en termes d'abstractions qu'il convient maintenant de poursuivre notre examen en précisant d'abord la terminologie suivante. (*a*) Nous appelons «abstraction empirique» celle qui porte sur des objets physiques extérieurs au sujet. (*b*) L'abstraction logico-mathématique sera dite par contre «réfléchissante» parce qu'elle procède à partir des actions et opérations du sujet. Elle l'est même en un double sens, d'où deux processus solidaires mais distincts: celui d'une projection sur un plan supérieur de ce qui est tiré du niveau inférieur et il s'agit alors d'un «réfléchissement»; et celui d'une «réflexion» en tant que réorganisation sur le nouveau plan, cette réorganisation n'utilisant d'abord qu'à titre instrumental les opérations tirées du niveau précédant mais visant (même si cette visée demeure en partie inconsciente) à les coordonner en une totalité nouvelle. (*c*) Nous parlerons enfin d'«abstraction réfléchie» ou de «pensée réflexive» pour désigner la thématisation de ce qui restait opérationnel ou instrumental en (*b*); La phase *c* constitue ainsi l'aboutissement naturel de *b* mais suppose en plus un jeu de comparaisons explicites d'un niveau supérieur aux «réflexions» à l'œuvre dans les utilisations instrumentales et les constructions en devenir. Il importe donc de distinguer les phases d'abstractions réfléchissantes intervenant en toute construction lors de la solution de problèmes nouveaux et l'abstraction réfléchie y ajoutant un système (en tant que système) de comparaisons (correspondances entre les diverses opérations, etc.), autrement dit une thématisation.

(2) Etant admis que les structures constituent des systèmes de transformations se construisant par filiations en arbres séparés ou avec intersections, elles résultent donc d'une suite

d'abstractions réfléchissantes, chaque nouveau système tirant son appareillage de structures antérieures et aboutissant finalement par abstraction réfléchie à une thématisation qui réunit en un tout les résultats de cette construction. Les structures ainsi thématisées donnent ensuite lieu à de nouvelles abstractions réfléchissantes conduisant à des constructions opératoires ultérieures en attendant d'être thématisées à leur tour et ainsi de suite par filiations longitudinales. Mais il reste à dégager le mécanisme de ces thématisations elles-mêmes, ce sur quoi nous reviendrons (sous 4), étant d'emblée admis que des thématisations locales peuvent se constituer à tous les niveaux mais que leurs pouvoirs sont dautant plus étendus qu'elles sont plus générales ou que l'abstraction réfléchie porte sur des structures plus fortes.

(3) Pour ce qui est des correspondances, on en trouve à toutes les étapes des constructions structurales, bien avant la thématisation des morphismes et des catégories, et en interaction de plus en plus étroite avec les transformations. Aucune de celles-ci ne saurait, en effet, être découverte sans être préparée par des correspondances reliant les états que les transformations modifient. Quant aux mécanismes de l'abstraction réfléchissante, s'ils comportent des compositions d'opérations, il n'en supposent pas moins des correspondances inhérentes en particulier au processus du «réfléchissement». Dans les phases de construction, transformations et correspondances sont ainsi intimément unies et s'appellent les unes les autres de façon nécessaire: il n'est donc pas surprenant qu'on ne les ait dissociées que si tard en termes de structures et de catégories, bien qu'en principe les correspondances relient des termes sans les modifier et pour les comparer, tandis que les transformations vont jusqu'à en engendrer de nouveaux.

Le problème se pose par contre de comprendre pourquoi cette dissociation s'est effectuée, au plan des thématisations, de façon successive et non pas par abstractions réfléchies portant simultanément sur les structures et les catégories: pourquoi le décalage de ces dernières et pourquoi, si des instruments catégoriels interviennent constamment dans la construction des structures, ils ne sont parvenus qu'avec tant de retard à des thématisations non plus locales, mais systématiques ?

(4) C'est ici qu'il nous faut examiner le mécanisme de la thématisation elle-même, car, à supposer qu'il consiste essentiellement en comparaisons et correspondances sans modifier les contenus, cela reviendrait à dire que la thématisation des structures est directe et de premier degré, tandis que celle des morphismes et catégories porterait sur les instruments mêmes de toute thématisation et caractériserait donc un second degré. La thématisation consistant en actes d'abstraction réfléchie, donc en un mode de pensée devenant à la fois réflexif et rétrospectif, elle comporte naturellement un contenu et une forme. Dans le cas des structures, le contenu est l'ensemble des compositions opératoires et des transformations nouvellement découvertes, avec les correspondances qui les relient en tant que dépendances entre transformations. Quant à la forme, elle consiste alors en instruments de comparaisons dégageant explicitement les propriétés générales du nouveau système construit, mais sans y ajouter davantage que leur réunion simultanée en un tout cohérent: cette forme ne relève donc que de correspondances et instruments catégoriels, mais non thématisés en eux-mêmes et ne servant à ce palier que d'appareil instrumental.

(5) En revanche, cette forme peut à son tour être objet d'analyses (comme on l'a fait pour préciser au moyen de quels instruments les Bourbaki avaient thématisé leurs structures) et c'est cette nouvelle thématisation qui conduit aux catégories explicites: celles-ci résultent donc bien, du point de vue de leur formation, d'une réflexion sur la réflexion en tant que thématisation des instruments de thématisation: elle constitue ainsi une abstraction réfléchie de seconde puissance, puisqu'elle a pour objet le processus réflexif lui-même, en tant qu'instrument des comparaisons. En d'autres termes, tandis que la thématisation des structures a pour contenu les opérations transformantes et pour forme certaines correspondances, la thématisation des catégories a pour contenu comme pour forme de tels systèmes de correspondances: en ce cas le contenu est

homogène à la forme et c'est pourquoi il s'agit effectivement de comparaisons à la seconde puissance (ou davantage).

Cela est d'autant plus acceptable que les thématisations catégorielles supérieures englobent naturellement les correspondances locales en jeu dans la construction des structures: le processus de la réflexion sur les réflexions peut ainsi se prolonger selon des degrés multiples, en parallèle avec le jeu des opérations sur des opérations dans la construction des structures, mais en se rappelant que celui-ci procède par filiations longitudinales, tandis que les réflexions sur les réflexions ou comparaisons de comparaisons comportent par leur nature même une orientation transversale par étages superposés dans la mesure où la comparaison ne modifie pas les termes à comparer (problème à examiner sous III). Il importe, à ce propos, de souligner le fait que les comparaisons transversales présentent la même fécondité que les constructions longitudinales et en interaction avec elles puisque l'on peut comparer des transformations entre elles comme leurs résultats entre eux, ou même ces transformations à leurs propres conséquents (ce qui devient comparatif avec la répétabilité qui ajoute alors à la construction une dimension transversale). D'autre part avec les morphismes et foncteurs les comparaisons deviennent de plus en plus méthodiques et comportent les mêmes exigences de fermeture que les structures, quant à leurs conditions d'achèvement, notamment en ce qui concerne les foncteurs intercatégoriels et les morphismes fonctoriels. En effet, les comparaisons entre deux ou plusieurs structures ou déjà entre les parties d'une seule réclament une méthode systématique car elles présentent des degrés variables d'adéquation: bien que les structures soient données à titre de contenue des catégories, les connexions inter-structurales puis intercatégorielles sont plus ou moins apparentes ou profondes et ce n'est qu'en complétant les premières correspondances et en affinant leurs compositions que l'on parvient aux comparaisons les plus significatives qui sont toujours alors des réflexions sur des réflexions.

(6) Mais si l'on comprend ainsi (en raison de 4 et 5) le caractère tardif de la thématisation des catégories, il reste à nous

demander si le cours de l'histoire aurait pu être renversé, donc si l'on aurait pu aboutir à une thématisation des catégories avant celle des structures. Or, dans la mesure où morphismes et foncteurs constituent essentiellement des instruments de comparaison utilisés dans l'intention de dégager des formes partiellement ou entièrement communes, cette marche inverse eût consisté à thématiser les comparaisons avant la connaissance réflexive des objets à comparer, autrement dit à établir des relations transversales (comparaisons) avant de connaître explicitement par réflexion rétrospective les constructions longitudinales dont les secteurs différenciés sont à comparer. Ce n'est donc pas un hasard si, de même qu'Euclide s'est servi d'opérations de groupes des siècles avant que l'on thématise cette structure, Calois a du employer des instruments catégoriels pour engendrer son corps à partir des groupes sans thématiser pour autant une théorie des catégories et en se bornant à ouvrir l'ère des «structures» qui a duré jusqu'aux Bourbaki.

Il s'y ajoute les considérations suivantes. On peut dire qu'une structure existe à l'état implicite avant sa thématisation lorsque le sujet ou l'inventeur encore virtuel en utilise les transformations de façon successive mais cohérente. Or il nous semble que l'on ne peut pas soutenir de façon symétrique qu'une catégorie existe avant les simultanéités du seul fait que des instruments catégoriels (morphismes ou même foncteurs) sont utilisés de façon instrumentale sans que le sujet pensant les réunisse lui-même en un tout simultané. La raison en est que des comparaisons successives ne constituent un système que si elles sont comparées entre elles de façon simultanée, tandis que des transformations successives sont reliées les unes aux autres par l'intermédiaire de leurs résultats: même lorsqu'elles sont thématisées en un tout, elles demeurent à l'état de possibilités successives en leurs actualisations, puis qu'une structure est un système de transformations possibles, tandis qu'une catégorie dégage des formes communes dont la reconnaissance exige la simultanéité. Autrement dit la terminologie que nous employons en parlant de connexions longitudinales et transversales comporte plus qu'une métaphore spatiale: si l'on n'est pas platonicien et que l'on distingue avec Papert les opérations «du mathématicien» et celles «des mathématiques», le transversal caractérise les comparaisons simultanées, car il faut bien que des termes soient pensés simultanément pour qu'il y ait comparaisons, tandis que le longitudinal comporte le successif même si l'ensemble des transformations successivement possibles est thématisé en un tout simultané (mais en ce cas, comme on l'a vu sous 4, avec l'aide d'un ensemble de comparaisons instrumentales non thématisées elles-mêmes en tant que système). Or, la réunion en un tout simultané d'actions, dont l'effectuation successive est possible, étant toujours plus malaisée que ces actualisations plus ou moins ordonnées dans le temps, cette considération s'ajoute donc aux précédentes pour expliquer le fait que, même si, avant la thématisation des catégories on assiste à de multiples emplois d'instruments catégoriels susceptibles de thématisations locales et fragmentaires, la constitution du système total est plus tardive pour une catégorie que pour une structure puisqu'il s'agit d'une hiérarchie simultanée de connexions simultanées.

III. CORRESPONDANCES ET TRANSFORMATIONS

En principe les correspondances de divers niveaux sont transformables et non transformantes: transformables quant à leurs formes car elles peuvent s'enrichir en s'intégrant en des morphismes de plus en plus complexes, mais non transformantes quant à leurs contenus qu'elles devraient laisser inchangés pour pouvoir les comparer. Les opérations structurales, en revanche, sont transformables par élaboration de nouvelles formes et transformantes quant à leurs contenus, qu'elles peuvent modifier jusqu'à en engendrer de nouveaux (cf. les diverses variétés de nombres, N, Z, Q, etc.) .Si nous considérons comme jusqu'ici les structures à titre de contenus des catégories, il y a alors deux questions à distinguer: celle de la construction des formes catégorielles, et nous avons vu qu'elle tient à la composition des comparaisons de divers étages, donc des réflexions sur les réflexions; et celle des actions éventuelles de ces formes sur leurs contenus, ou plus précisément, des relations possibles entre les catégories et les transformations structurales, et c'est ce qui nous reste à examiner. En effet, si l'on admet que les morphismes et les structures ne constituent pas deux mondes séparés, mais qu'il y a constamment appuis mutuels en ce sens que les comparaisons préparent et complètent les transformations et que celles-ci donnent occasion à de nouvelles correspondances, il convient alors de chercher à classer les diverses combinaisons jusqu'ici réalisées et d'en dégager les leçons du point de vue de notre interprétation générale.

Nous distinguerons quatre situations quant à ces rapports entre les constructions transversales et les transformations structurales ou longitudinales. Les morphismes et foncteurs peuvent être, en effet: (1) *non-transformationnels,* en tant que n'engendrant pas de transformations structurales ni ne portant sur elles; (2) *intertransformationnels* en tant que reliant des transformations structurales, sans les modifier; (3) *cotransformationnels* en tant que le morphisme ou le foncteur en jeu s'accompagne nécessairement d'une transformation structurale; et (4) *protransformationnels* en tant qu'engendrant ou révélant des transformations nouvelles non encore connues au plan structural.

(1)Pour ce qui est de la première forme, il va de soi que l'on peut citer les «morphismes d'identité» puisqu'une identité est par définition une absence de modification et même de différence. Certes il a fallu construire un tel morphisme, dont la nécessité pouvait échapper tant qu'on ne s'est pas obligé à fournir une liste exhaustive des flèches nécessaires et suffisantes pour axiomatiser une catégorie et tant que l'on n'a pas distingué un niveau à partir duquel ce morphisme s'impose (comme dans la catégorie des ensembles) et les niveaux de ce que l'on pourrait appeler les «précatégories» sans critères de distinctions et d'identifications. De même les morphismes et foncteurs inversibles, sources d'isomorphismes et de catégories équivalentes ne transforment rien au sein de leur contenu structural. Certes, au plan des correspondanes transversales, celles-ci peuvent donner lieu à des constructions de plusieurs étages et le chercheur peut à cette occasion découvrir des relations non aperçues d'emblée et qui enrichissent son analyse du contenu. Mais il y a là une construction de nouveaux instruments de comparaison et non pas une transformation de ce contenu en lui-même.

(2) Quant aux morphismes et foncteurs *intertransformationnels* ils relient entre elles des transformations comme telles ou encore leurs résultantes mais en tant que telles et non pas qu'états indépendants. Par exemple en une fonction $y = f(x)$ les variations de *x1 en x2, x3,* etc. sont des transformations, celles de *y1 en y2, y3,* etc. le sont également et il y a bijection entre les deux sortes de variations successives ainsi qu'entre les états qui en résultent, mais ce n'est pas cette correspondance qui engendre les transformations puisqu'elle en résulte. Par contre, on peut aussi voir un morphisme dans la relation entre la transformation *1 2* et la suivante *2 3,* etc. et dans ce cas la correspondance devient cotransformationnelle, puisqu'il s'agit des étapes du même processus de transformation, portant sur le même objet; mais ici encore il subsiste une dualité de nature entre la transformation et la correspondance car ce n'est pas celle-ci en tant que comparaison qui engendre celle-là en tant que modification, bien que la construction de la transformation ait pu s'appuyer sur des comparaisons implicites ou explicites.

De même, lorsque l'on compare deux groupes, l'opération directe T de l'un correspond à celle de l'autre, comme leurs symétriques T^{-1} et il y a là un morphisme intertransformationnel. Mais à l'intérieur d'un même groupe, la bijection entre chaque opération et sa symétrique est cotransformationnelle puisque cette relation est à la fois transformation et correspondance. Mais ici à nouveau ce n'est pas celle-ci qui produit celle-là et si la propriété catégorielle de tout groupe est que tout morphisme y est inversible, elle n'a pas modifié la structure du groupe en tant que contenu: elle a simplement doublé le résultat de la filiation ou généralisation complétive conduisant des monoïdes aux groupes en y ajoutant des liaisons transversales.

A analyser la construction structurale on constate certes que cette généralisation complétive a été préparée par des mises en correspondances dont le morphisme inversible final constitue la thématisation généralisée. Il n'en a pas moins fallu que des opérations transformatrices interviennent entre deux, mais au plan des contenus structuraux. La formule devenue courante «tout groupe est une catégorie» ne signifie donc pas que toute opération en tant que transformation interne du groupe se réduit à un morphisme sans rien de plus, mais seulement qu'elle peut, directement et sans modification, revêtir une forme catégorielle, de même que depuis Weierstrass tout nombre naturel ou entier peut être considéré comme un couple ou une classe d'équivalence. Il subsiste ainsi une dualité de construction malgré l'accord complet des transformations et de leurs morphismes ou foncteurs inter ou cotransformationnels.

(3) L'accord devient donc encore plus étroit dans le cas des correspondances *cotransformationnelles* dans lesquelles la construction est à la fois transformation et mise en morphisme, celle-ci résultant alors de la répétabilité de celle-là. Par exemple dans la suite des entiers naturels le morphisme du successeur est indissociable de l'opération $n + 1$ et réciproquement: or l'opération $n + 1$ est une transformation puisqu'engendrant même son contenu jusqu'à l'infini. De même il y a solidarité complète entre les produits cartésiens de deux ensembles et les produits catégoriels avec leur commutativité particulière. En toute structure il est ainsi possible de dégager, quant à ses opérations constitutives un aspect de transformation et un aspect de morphisme, celui-ci étant alors cotransformationnel.

Il est en particulier intéressant de relever qu'il existe deux foncteurs répondant à l'ensemble des parties. L'un n'est que covariant, c'est-à-dire à sens unique, et l'autre est contravariant, c'est-à-dire relatif à une catégorie duale (flèches retournées et ordre de composition renversé); mais seul le second respecte les réunions, intersections et les complémentaires des parties. Or, on sait qu'une catégorie duale constitue une nouvelle catégorie, non engendrée par les compositions internes de celle dont on part: c'est assez dire que la construction catégorielle de l'ensemble des parties coopère avec le contenu structural des opérations réversibles en l'enrichissant de correspondances transversales.

Cette sorte de symbiose est particulièrement frappante dans le cas des groupes d'automorphismes puisqu'ils participent à la fois de la catégorie et de la structure. Mais cette fusion n'est en ce cas possible qu'en conférant à l'opération symétrique le sens d'une réciproque ou converse et non pas d'une inverse ou complémentaire puisqu'une inverse au sens opératoire reviendrait à une négation de l'automorphisme.

(4) Distinguons enfin une quatrième situations: c'est celle des foncteurs *protransformationnels,* qui modifient ou qui engendrent même certains contenus non donnés dans les seules structures de départ. Cela a été le cas pour certains nouveaux groupes découverts par voie catégorielle. Il existe par ailleurs un «foncteur d'abélisation» qui consiste à remplacer un groupe non abélien par son plus grand quotient commutatif (par la relation $fg = gf$). Si ce quotient a été construit opératoirement nous dirons que le foncteur correspondant est cotransformationnel, tandis que si c'est le foncteur qui a conduit au quotient nous le qualifierons de protransformationnel (distinction qui n'a sans doute pas de signification mathématique mais qui en comporte une du point de vue épistémologique). En ce dernier cas il y a donc transformation du contenu structural par la forme catégorielle, tandis que dans le cas de la découverte de groupes non connus il y a même génération d'un nouveau contenu. Il faut cependant encore distinguer là deux éventualités. L'une est que, en combinant les flèches de toutes les manières on s'aperçoive du fait que l'une des combinaisons ne correspond pas à une structure déjà construire: on découvre ainsi une lacune, correspondant à une existence possible, mais qui aurait pu être déjà comblée si la construction structurale avait précédé cette constatation au lieu de la suivre. L'autre éventualité est qu'aucune structure ne suffise à la solution d'un problème, celle-ci pouvant par contre être obtenue en faisant appel aux morphismes interstructuraux. C'est ainsi que R. Garcia en une communication à notre Centre a indiqué

quelques questions de microphysique ne pouvant être dominées par aucune des algèbres de v. Neumann mais susceptibles de l'être en recourant aux morphismes reliant ces algèbres les unes aux autres.

(5) La parenté entre ces quatre situations est qu'en chacune d'elles l'appareil comparatif (morphismes ou foncteurs) tend à dégager des formes entièrement ou partiellement communes: ces formes sont statiques dans la situation (1), elles sont celles des transformation dans les cas (2) et (3) et sont introduites dans le contenu lors de la situation (4) mais en s'appuyant sur les similitudes connues. Le propre des correspondances en tant que comparaisons est donc de dégager de telles formes communes à partir des termes à comparer ,c'est-à-dire en les tirant en premier lieu des contenus structuraux puis, dans la suite, d'un jeu de comparaisons des comparaisons elles-mêmes, donc de réflexions sur les réflexions. Sauf les cas limites de la situation 4 les correspondances sont donc bien, comme indiqué au début de III, transformables quant à leurs formes mais non transformantes quant à leurs contenus, puisqu'une comparaison n'est valable qu'à la condition de ne pas déformer ses termes. Le propre des transformations est par contre de modifier les contenus structuraux et d'en engendrer de nouveaux, dès les opérations génératrices initiales puis par opérations sur les opérations. Or, s'il existe ainsi une dualité assez fondamentale de nature et de fonctionnement, il ne s'en impose pas moins une solidarité tout aussi essentielle entre ces deux sortes d'activités (solidarité dont l'étude psychogénétique de la pensée préscientifique montre la constitution graduelle et longtemps laborieuse). Cette interdépendance se manifeste de deux manières corrélatives.

Pour ce qui est tout d'abord des contenus à analyser ou à transformer, il va de soi qu'il n'y a pas de comparaisons intra- ou interstructurales complètes sans une connaissance des transformations comme des états caractérisant ces structures (cf. les situations (2) et (3) et que réciproquement tout système de transformations exige la connaissance comparative des états qui sont aux points de départ et d'arrivée de chaque transformation. Quant aux formes, c'est-à-dire à la construction des instruments de comparaisons (morphismes) ou de transformations (opérations) il est également évident que la première de ces constructions implique des transformations des modes de comparaisons, par étages superposés, de même que réciproquement la seconde construction suppose une comparaison des transformations selon leurs différenciations longitudinales, donc des comparaisons transversales entre les branches longitudinales.

En conclusion, il semble indiscutable que les deux grands systèmes des transformations et des comparaisons ou morphismes sont étroitement interdépendants. Mais cela n'empêche pas que la thématisation du second ait été plus tardive, pour les raisons qu'on a vues sous II, ni que de larges comparaisons transversales soient toujours possibles aux frontières supérieures du système provisoirement total des structures connues, ce qui confère aux catégories un pouvoir supérieur de généralisation. Mais c'est un pouvoir qui n'existerait pas si, d'un bout à l'autre de ces vastes constructions, la cinématique des comparaisons, pour ainsi parler, n'avait pu s'appuyer sur la dynamique des transformations, étant d'ailleurs entendu par ailleurs qu'une dynamique implique une cinématique et qu'aucune des deux n'est statique.

Centre international d'Epistémologie Génétique (Université de Genève)
Jean PIAGET

NOTES

(1) Voir I sous 3.

(2) J. CAVAILLES, *Méthode axiomatique et formalisme* (Hermann 1938) ainsi que le chapitre de J. LADRIERE et celui de G. HENRIQUES dans *L'explication dans les sciences* (Flammarion 1973).

P.S. — Toute ma reconnaissance à G. Henriques et R. Garcia pour leurs précieux conseils.