LA Σ_3-COMPLÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES TYPES DE RÉDUCTION

Egon Börger

§ 0. *Introduction*

Quelques travaux récents dans la littérature traitent certains méta-problèmes de décision pour des classes d'expressions de la logique des prédicats du premier ordre (voir par ex. [3], [10]). En particulier, le lien établi (en [7]) entre les problèmes de décision pour classes d'expressions du premier ordre et les problèmes combinatoires courants (comme les problèmes du Halt ou de l'immortalité pour machines) soulève de façon naturelle le problème de situer exactement, dans la hiérarchie arithmétique de Kleene-Mostowski, les types de problèmes étudiés depuis plus de cinquante ans dans la théorie des fragments décidables et dans la théorie de la réduction pour la logique des prédicats du premier ordre (voir [4] et [14]); comme cela a été fait par ailleurs pour les problèmes combinatoires mentionnés ci-dessus (voir par ex. [2], [5], [6], [8], [9], [11].)

Une pareille classification a été obtenue (en [7: Cor.2.3]) pour les propriétés (de classes d'expressions) suivantes: ne contenir aucune expression déducible (resp. non-contradictoire), en contenir au moins une, en contenir un nombre fini, un nombre infini, ne contenir (presque seulement) que des expressions déducibles (resp. non-contradictoires), avoir une méthode récursive de décision pour la déducibilité (resp. pour la non-contradictoriété). Divers essais de dériver, par la même méthode, une mesure exacte de la complexité — c.à.d. la Σ_3-complétude — pour la propriété d'être un type de réduction (1) n'ont pas abouti. Finalement nous avons essayé de procéder par un argument de priorité, adaptant la preuve que H. Rogers [13: Th. XVI, p. 327] a donnée pour la Σ_3-complétude de l'ensemble $\{x \mid W_x \text{ récursif}\}$, encore que la version finale de la preuve ici présentée n'en conserve plus beaucoup de traces:

Théorème: L'ensemble (des indices) de types de réduction par rapport à la déducibilité (resp. à la non-contradictoriété) est Σ_3-complet.

Ainsi les types de réduction représentent la même classe d'isomorphie récursive que les ensembles d'expressions ayant une méthode récursive de décision, ceux contenant seulement un nombre fini d'expressions non-contradictoires, ainsi que ceux qui ne contiennent qu'un nombre fini d'éléments non-déducibles (voir [7: Cor. 2,3].)

§ 1. *Preuve du théorème.*

Nous adoptons la terminologie de [13]. Puisque une classe d'expressions X est un type de réduction par rapport à la déducibilité si et seulement si (ssi) l'ensemble $\neg X$ des négations d'éléments de X est un type de réduction par rapport à la non-contradictoriété, il suffit de considérer la propriété de type de réduction au premier sens. Par définition, X est un type de réduction ssi il existe une fonction récursive f telle que, pour chaque expression α, $f(\alpha) \in X$ et ($\vdash \alpha$ ssi $\vdash f(\alpha)$), c.à.d. ssi il existe un nombre k tel que, pour chaque nombre x (nombre de Gödel d'une expression logique quelconque α et identifié avec α sans perte de la généralité), $\varphi_k(x)$ est défini et est un élément de X satisfaisant à l'équivalence: ($\vdash x$ ssi $\vdash \varphi_k(x)$). Ceci montre que l'ensemble $\{x | W_x$ est un type de réduction$\}$ est un élément de Σ_3.

Le théorème sera donc démontré si nous réussissions à réduire (au sens de $\leqslant_1$) à la classe des types de réduction un ensemble déjà connu comme Σ_3-complet. Pour faire cela, nous nous appuyons sur la possibilité (observée pour la première fois par Aanderaa [1: pg. 13, Th. 3(iii)]) de réduire, au sens de $\leqslant_m$, chaque ensemble récursivement énumérable au problème de décision d'une classe d'expressions; dans la terminologie de [7]:

(1) on a une fonction récursive injective associant à chaque paire de nombres (x,b) une expression $\alpha_{x,b}$ telle que l'ensemble des $\alpha_{x,b}$ soit récursif, qu'on puisse calculer les nombres

x et b si $\alpha_{x,b}$ est donné, et qu'on ait: $b \in W_x$ ssi $\vdash \neg \alpha_{x,b}$. Prenons comme ensemble de référence l'ensemble $\{x | \alpha(PL) \leqslant_m W_x\}$ (2) lequel est Σ_3-complet puisqu'il est identique à $\{x | \alpha(PL) \equiv_m W_x\}$ par (1), et celui-ci est Σ_3-complet comme démontré par Yates pour un ensemble E arbitraire au lieu de α(PL), à condition qu'il soit récursivement énumérable, infini et ait un complément non-vide [15: Lemma 1, Th. 1].

Nous construisons maintenant, par étapes successives et partant d'un nombre x quelconque, un ensemble A d'expressions tel que, pour chaque x:

(2) $\alpha(PL) \leqslant_m W_x$ ssi A est un type de réduction. Cela établit le théorème, la construction de A étant uniforme en x et injective.

Soit x alors u nombre quelconque. A l'étape n (pour un nombre n arbitraire) nous effectuons les opérations suivantes:

(i) exécuter les n premières étapes du procédé d'énumération pour W_x indiqué par x;

(ii) exécuter les n premières étapes d'une énumération (3) des théorèmes logiques;

(iii) pour chaque $k \leqslant n$, exéturer les n premières étapes de la computation de chacun des $\varphi_k(0), \ldots, \varphi_k(n)$;

(iv) pour chaque $k \leqslant n$, énumérer tous les $b \leqslant n$ tels que

(3) pour chaque $a \leqslant b$, la computation de $\varphi_k(a)$ est terminée après tout au plus n étapes, et a apparait dans l'énumération (ii) [de cette étape n] ssi $\varphi_k(a)$ apparaît dans l'énumération (i) [toujours de cette étape n];

(v) s'il n'existe aucun $k \leqslant n$ ayant un $b \leqslant n$ satisfaisant (3), passer à l'étape n + 1; autrement choisir pour chaque $k \leqslant n$ qui a au moins un $b \leqslant n$ satisfaisant (3), le plus grand tel $b \leqslant n$, placer dans A toutes les expressions $\neg \alpha_{x,\varphi_k(0)}, \ldots, \neg \alpha_{x,\varphi_k(b)}$ et passer à l'étape n + 1.

La construction de A est clairement uniforme en x et injective (voir la construction des $\alpha_{x,b}$ en [7]). Reste à démontrer (2).

Soit $\alpha(PL) \leqslant_m W_x$ ar une fonction récursive $\vdash$ c f, alors ssi $f(c) \in W_x$ pour chaque c. Soit k un indice de f, c.à.d. $f = \varphi_k$.

Alors, pour chaque b, il existe un nombre $n \geqslant b,k$ tel que les computations de $\varphi_k(0),\ldots,\varphi_k(b)$ seront terminées après tout au plus n étapes, chaque $a \leqslant b$ déducible est énuméré dans l'énumération de tous les théorèmes logiques après tout au plus n étapes, et chaque $\varphi_k(a)$, s'il est élément de W_x et si $a \leqslant b$, apparait dans l'énumération de W_x au plus tard à l'étape n. Par conséquent — à raison de l'équivalence: $\vdash a$ ssi $\varphi_k(a) \in W_x$ pour *chaque* a — pour un tel n, la condition (3) est satisfaite au moins pour le nombre b donné et l'indice k de f, et au plus tard à l'étape n, toutes les expressions $\neg\alpha_{x,f(0)},\ldots,$ $\neg\alpha_{x,f(b)}$ (éventuellement avec d'autres) apparaissent dans A. On a donc, pour chaque b, $\vdash b$ ssi $f(b) \in W_x$ ssi $\vdash \neg\alpha_{x,f(b)}$ (par (1)), et $\neg\alpha_{x,f(b)} \in A$, c.à.d. que A est un type de réduction avec la fonction de réduction $\lambda b \neg\alpha_{x,f(b)}$.

Soit inversément A un type de réduction avec une fonction de réduction f, donc $\vdash b$ ssi $\vdash f(b)$, et $f(b) \in A$ pour chaque expression (nombre) b. A contenant, par construction, seulement des expressions de la forme $\neg\alpha_{x,m}$ avec m calculable à partir de $\neg\alpha_{x,m}$ (par (1)), il existe alors une fonction récursive g, telle que $f(a) \equiv \neg\alpha_{x,g(a)}$ pour chaque a. Il s'en suit par (1) que, pour chaque a: $\vdash a$ ssi $\vdash \neg\alpha_{x,g(a)}$ ssi $g(a) \in W_x$, donc $\alpha(PL) \leqslant_m W_x$.

Remarques finales.

Il n'est peut-être pas inutile de signaler une difficulté qui nous a gêné beaucoup dans notre recherche, afin d'en rendre plus claire l'idée de la construction. Il était facile de faire l'ensemble A suffisamment grand et contenant un sous-ensemble sufisamment «uniforme» pour qu'il devienne un type de réduction au cas où on part d'un ensemble W_x avec une propriété Σ_3-complète, en cherchant à vérifier pas à pas, sur une partie initiale toujours plus grande des nombres, la propriété considérée pour W_x, et d'augmenter A en corrélation avec les résultats de ces vérifications partielles. Mais de cette manière, A devient toujours plus grand, même si l'ensemble de départ W_x ne possède pas la propriété considérée, parce qu'il y aura des segments initiaux des nombres toujours plus grands où la propriété considérée pour W_x «semble» vérifiée: Si $\alpha(PL)$ n'est pas $\leqslant_m W_x$, il y a cependant des indices k et des b et n arbitrairement grands tels que (iv) soit vérifié pour k,b et n; l'impossibilité de définir une fonction de réduction avec les images choisies entre les $\neg\alpha_{x,\varphi_k(a)} \in A$ pour $a \leqslant b$ de ces k e b reflète l'impossibilité de définir, pour chaque suite infinie $(\varphi_i)_i$ avec $\varphi_i \subset \varphi_{i+1}$, une seule fonction récursive étendant toutes les φ_i.

A partir du théorème 1 de [12] on obtient que les propriétés suivantes sont Π_2-complètes: a) être une fonction de réduction pour R — où R est une type de réduction quelconque; b) λxy (φ_x est une fonction de réduction pour W_y). Nous avons essayé en vain d'en déduire que l'ensemble $\{x \mid W_x$ est un type de réduction$\}$ est Σ_3-complet. (4)

(*Münster i. W.*) Egon Börger

NOTES

(1) voir la définition ci-dessous.

(2) $\alpha(PL)$ est la classe de toutes les expressions déducibles (toujours de la logique des prédicats du premier ordre).

(3) arbitraire mais fixée une fois pour toutes.

(4) Nous remercions Dr. Helmut Schwichtenberg pour avoir signalé un erreur commis dans un essai de preuve du théorème selon cette route.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. O. Aanderaa: On the decision problem for formulas in which all disjunctions are binary. *Proc. of the Second Scand. Log. Symp.* (Amsterdam 1971), pp. 1-18.

[2] S. Aanderaa and D. Belsnes: Decision problem for Tag systems. *JSL* 36,2 (1971) 229-239.

[3] S. O. Aanderaa and F. V. Jensen: On the existence of recursive models for Krom-formulas. Underground (Oslo 1972/73).

[4] W. Ackermann: Solvable cases of the decision problem. Amsterdam 1962.

[5] D. Belsnes: The immortality problem for non-erasing Turing machines. *Proc. of the Second Scand. Log. Symp.* (Amsterdam 1971). pp. 19-26.

[6] S. L. Bloom: Some remarks on uniform halting problems. *ZMLG* 17 (1971) 281-284.

[7] E. Börger und K. Heidler: Die m-Grade logischer Entscheidungsprobleme. Présenté à l'*Archiv für math. Logik und Grundlagenforschung*, 1973.

[8] P. C. Fischer: Quantificational variants on the halting problem for Turing machines. ZMLG 15 (1969) 211-218.

[9] P. C. Fischer: Degree of unsolvability of Turing machine immortality problems. *Notices AMS* 17,1 (1970) 209, abstr. no. 672-444.

[10] Yu. Sh. Gurevich: A decision problem for decision problems. *Algebra and Logic* 9 (1969) 362-363.

[11] G. T. Herman: Strong computability and variants of the uniform halting problem. ZMLG 17 (1971) 115-131.

[12] F. D. Lewis: Classes of recursive functions and their index sets. ZMLG 17 (1971) 291-294.

[13] H. Rogers, Jr.: *Theory of recursive functions and effective computability*. New York et al. 1967.

[14] J. Surányi: *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems*. Budapest 1959.

[15] C.E.M. Yates: On the degrees of index sets. *Transactions AMS* 121 (1966) 309-328.