LA LOGIQUE SUR LE CORPS DE RUPTURE DES PARADOXES

P. V. GROSJEAN

Introduction: *Des paradoxes aux extensions algébriques*

Comme on sait, les théories des types et des langues éliminent les paradoxes classiques en opérant une nette distinction entre les énoncés dits «bien formés» ou «dotés de sens», et les énoncés dits «mal formés» ou «dénués de sens» (Russell), que nous appellerons plus simplement, par la suite, les *insensés*. Selon ces théories, les insensés sont à rejeter dans les ténèbres extérieures, leur péché étant de mélanger indûment les types ou les langues.

Si l'on se réfère à l'histoire de la mathématique, on est en droit de se demander si un tel ostracisme constitue bien la solution finale du problème des antinomies. Car en bien des cas la Mathématique, après avoir rencontré des paradoxes et après avoir manifesté une réaction initiale de rejet, n'en a pas moins fini par absorber les objets étranges, — les sophistiques, comme disait Cardan, — qui se trouvaient à l'origine de ces paradoxes. Deux exemples sont typiques à cet égard, et bien connus.

Le paradoxe des irrationnels, scandale de l'Ecole pythagoricienne: Si, avec cette dernière, nous nous cantonnons dans le cadre des seuls entiers pour traduire le théorème de Pythagore, dans le cas du triangle rectangle isocèle, alors nous tombons en plein paradoxe. Par un raisonnement élémentaire en effet, les deux entiers h et c, premiers entre eux et donnant $h^2 = c^2 + c^2 = 2 . c^2$, apparaissent à la fois pairs et impairs ! On sait que le paradoxe disparaît dès qu'on adjoint ,au corps des rationnels, un élément «symbolique» nouveau, désigné par $\sqrt{2}$ et décrété racine de l'équation litigieuse $x^2 - 2 = 0$.

Le paradoxe des imaginaires: Historiquement issu des équations du 3e degré, il se pose beaucoup plus simplement à propos de l'équation $x^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire $x . x = -1$. Si, avec les premiers mathématiciens de la Renaissance, nous refusons de quitter le domaine de ces nombres qu'on appelle aujourd'hui les «réels», alors cet x devra être positif dans le premier facteur de $(x \,.\, x)$ et négatif dans le second, donc à la fois positif et négatif ! Ici aussi l'antinomie se maîtrise, non point par un ostracisme (Simon Stévin), mais bien par l'adjonction, au corps des réels, d'un *symbole* noté i, et décrété racine de la malencontreuse équation.

Il est frappant que, dans ces deux cas historiques, comme dans celui des antinomies de la Logique, l'élément «sophistique» ait été affublé, dès l'origine, d'une épithète négative, voire même péjorative, qui lui est restée: irrationnel, imaginaire (c'est-à-dire irréel), insensé.

Mais il est un autre point commun aux trois cas, un point beaucoup plus important. Dans les deux exemples mathématiques d'abord, les équations contestées ne sont que des cas particuliers d'équations à 2 variables, définissant des relations parfaitement innocentes, à savoir $x \,.\, y = 2$ et $x \,.\, y = -1$, satisfaites par quantité de couples (x, y) formés de rationnels dans le premier cas, et de réels dans le second cas. Le paradoxe surgit dès que, sans vouloir quitter l'ensemble numérique sur lequel on a défini initialement la relation, on veut néanmoins doter celle-ci de *réflexivité* en l'appliquant au cas où $x = y$.

Dans le cas des antinomies de la Logique maintenant, les choses se passent exactement de la même manière. Prenons par exemple le cas des imprédicables x, dont X est la classe; posons $\bar{p} = (x \notin x)$ et $q = (x \in X)$. Pour toute imprédicable x, les deux propositions sont simultanément vraies, et ainsi nous avons $\bar{p} \,.\, q = 1$, c'est-à-dire $p \,.\, q + q + 1 = 0$. C'est là une innocente relation à 2 variables, satisfaite d'ailleurs par quantité de couples (p, q) de propositions «sensées». L'antinomie arrive avec la réflexivité: Examinant le cas de «imprédicable» lui-même, on doit poser $x = X$, d'où $p = q$, et on est conduit à l'équation litigieuse

$$p^2 + p + 1 = 0$$

que nous appellerons l'*équation des paradoxes.*

L'antinomie apparaît plus brutalement encore lorsqu'on applique à cette équation le principe d'identité $p^2 = p$, car alors on obtient $p \Longleftrightarrow \overline{p}$, où, comme dans tout ce qui suivra, $\overline{p}$ désigne la négation $(p + 1)$ de p: la proposition p est à la fois vraie et fausse ! Le même résultat se retrouve si l'on traduit les paradoxes par l'antique schéma cyclique dit «du Menteur» (Cicéron) $p \Rightarrow \overline{p} \Rightarrow p \Rightarrow \overline{p} \Rightarrow \ldots$

Mais alors, la vieille technique de l'*adjonction symbolique,* qui remonte à Cauchy et à Galois, et qui a si bien réussi dans les deux cas mathématiques cités ci-avant, ne réussirait-elle pas tout aussi bien dans le cas des antinomies logiques ? La réponse est affirmative, comme on va le voir.

Il s'agit donc maintenant, non plus de rejeter les insensées, mais bien de les intégrer dans un *calcul des insensées,* lequel ne sera pas plus insensé que le calcul des irrationnels n'est irrationnel ou que le calcul des imaginaires n'est imaginaire. Cette Logique des insensées, que nous appellerons plutôt la *Logique des propositions complexes,* se fera très simplement en remplaçant le corps binaire $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ de la Logique classique par la plus simple de ses extensions algébriques finies, le *corps de rupture (du polynome) des paradoxes.*

On se verra ainsi conduit à une logique plurivalente, dont les 4 valeurs seront appelées ci-après le faux, le vrai, l'alpha et l'oméga. Mais comme cette logique ne repose que sur une extension du corps binaire, *elle sauvera les structures fondamentales de la Logique ordinaire.*

Chapitre I

Algèbre du corps de rupture des paradoxes

§ 1 — *Les corps de Galois*

A l'intention des lecteurs non spécialisés ,rappelons qu'un *corps (ou champ) de Galois* est un corps *fini* $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un ensemble fini doté d'une addition et d'une multiplication ayant toutes les propriétés des opérations analogues que connaît l'arithmétique des nombres rationnels (dont le corps n'est pas fini). Le plus simple des corps galoisiens est le corps binaire $\mathbb{B}$, le corps de base de la logique classique .

Puisqu'un corps de Galois est fini, tous ses éléments sont *cycliques,* aussi bien pour l'addition que pour la multiplication, lesquelles définissent ici des structures de groupes. On appelle: 1°) *caractéristique* k du corps le nombre de fois qu'il suffit de répéter un élément quelconque (non précisé a priori), dans une addition avec lui-même, pour obtenir comme total le neutre «0» de l'addition; 2°) *ordre* N du corps le nombre de fois qu'il suffit de répéter un élément a priori quelconque, mais non nul, dans une multiplication par lui-même, pour obtenir comme produit le neutre «1» de la multiplication.

On démontre les théorèmes suivants:

1. — La caractéristique k d'un corps est un nombre premier.
2. — Le cardinal C du corps est k^n; l'entier non nul n est le *degré* du corps (pour $n = 1$, le corps est dit *premier*).
3. — Le corps admet n automorphismes, dont l'identité.
4. — L'ordre du corps est $N = C - 1 = k^n - 1$.
5. — Tout corps galoisien est commutatif pour la multiplication.

Ainsi le corps binaire $\mathbb{B}$ de la Logique est de caractéristique

$k = 2$ (on a: $x + x = 0$), de cardinal 2, de degré 1 (on a: $2 = 2^1$), d'ordre 1 (on a: $1^1 = 1$); c'est un corps premier, qui n'admet d'autre automorphisme que l'identité.

§ 2 — *Les polynomes sur un corps de Galois*

Soit alors X une *indéterminée*, comme disent les algébristes: Bien que X n'appartienne pas nécessairement au corps galoisien $\mathbb{K}$ considéré, on postule qu'elle est indéfiniment multipliable par elle-même et par les éléments du corps (avec associativité mixte et commutativité), et que les résultats de ces opérations sont additionnables entre eux. En conséquence, si k est la caractéristique, on aura, *par k additions*, quelle que soit X (même étrangère au corps):

$$(1) \quad X + X + \ldots + X = (1 + \ldots + 1) \, . \, X = 0$$

Ces hypothèses permettent de construire sur $\mathbb{K}$ des polynomes de degré m quelconque:

$$(2) \quad P(X) = X^m + a_m X^{m-1} + \ldots + a_2 X + a_1 \, , \, a_i \in \mathbb{K} \, .$$

Ces polynomes seront eux-mêmes des indéterminées, multipliables et additionnables entre elles. Leurs ensemble, noté $\mathbb{K}[X]$ aura une *structure d'anneau*, — et non de corps: un polynome n'a pas d'inverse.

Si exceptionnellement X est une indéterminée x ne pouvant recevoir de valeur que dans le corps $\mathbb{K}$, alors le degré d'un polynome ne pourra être supérieur à l'ordre N, puisque ($x \neq 0$): $x^N = 1$. Avec le corps binaire, on ne pourra donc construire que 4 polynomes en x, à savoir: 0, 1, x, x + 1. On reconnaît là les 2 fonctions logiques d'ordre zéro (les constantes 0 et 1), et les 2 fonctions logiques d'ordre 1, celles que l'on construit sur une seule proposition $p = x$, et qui sont p elle-même, et sa négation $\overline{p} = p + 1$. Ainsi, ce que le logicien appelle une «proposition sensée», l'algébriste l'appelle une «indéterminée à valeur dans $\mathbb{B}$».

Et si X est a priori quelconque, le nombre des polynomes distincts de degré m est celui des suites $[a_m, \dots, a_1]$ formées au moyen d'éléments de $\mathbb{K}$; ce nombre est donc k^{nm}.

§ 3 — *La réductibilité et l'irréductibilité*

Un polynome de degré non nul ,élément de $\mathbb{K}[X]$, est dit *réductible ou irréductible sur* $\mathbb{K}$, selon qu'il est ou n'est pas le produit d'au moins deux polynomes de degré $\neq 0$ de $\mathbb{K}[X]$; tout binome $(X - a)$ est donc irréductible.

On démontre le théorème suivant, relatif à un corps galoisien $\mathbb{K}$ de degré n: Dans $\mathbb{K}[X]$ tout polynome irréductible, de degré $m > 0$, est un diviseur exact de:

$$(3) \quad P_{(m)}(X) \overset{def}{=} X^D - X \quad \text{où} \quad D = (k^n)^m = k^{nm}$$

Pour $m = 1$, ce polynome devient le *polynome fondamental* de $\mathbb{K}$:

$$(4) \quad P_*(X) \overset{def}{=} X^C - X = X(X^N - 1)$$

Pour le corps binaire $(k = 2)$, on a $X + X = 0$, c'est-à-dire $-X = X$. Son polynome fondamental est donc $P_* = X^2 + X$;

en l'annulant, on formule le principe d'identité de la Logique, lequel va caractériser les propositions sensées: $p^2 = p$. Ses diviseurs sont évidemment les irréductibles de degré 1, à savoir $P = X$ et $\overline{P} = X + 1$: *en annulant la décomposition* $P \cdot \overline{P}$ *de* P_*, *on formule le principe de contradiction de la Logique,*

$p \cdot \overline{p} = 0$.

Au moyen de ces 2 irréductibles du corps binaire, on forme les 3 seuls *réductibles de degré 2,* à savoir:

$$(5) \quad P_* = X^2 + X \; ; \; P_1 = X^2 \; ; \; P_2 = (X+1)^2 = X^2 + 1 = \overline{P_1} \, .$$

Et avec ces réductibles, on construit l'*irréductible de degré 2*:

$$(6) \quad P_0 \overset{def}{=} P_1 + \overline{P} = \overline{P}_1 + P = P_* + 1 = X^2 + X + 1 = \overline{P}_* ,$$

lequel est justement le *polynome des paradoxes*, apparu dans l'Introduction ci-avant. D'après le théorème signalé au début du présent § 3, c'est même là *le seul irréductible de degré 2*; en effet, pour $m = 2$, on a $D = 2^2 = 4$, et un calcul simple donne:

$$(7) \quad X^4 + X = X\,(X+1)\,(X^2 + X + 1).$$

Or, (3) est le polynome fondamental d'un certain corps $\mathbb{K}'$, doté de la même caractéristique k que le corps $\mathbb{K}$ primitif, mais ayant le degré $n' = n \,.\, m$, et ainsi le cardinal $C' = k^{n'}$. Pour un tel corps, les irréductibles qui divisent (3) *sont au maximum de degré 1*; en conséquence, les diviseurs de degré supérieur à 1, qui étaient irréductibles sur le corps primitif $\mathbb{K}$, sont réductibles sur le nouveau corps $\mathbb{K}'$. Pour cette raison $\mathbb{K}'$ est appelé un *corps de rupture* pour chacun des ex-irréductibles. Ses éléments sont les racines de (3), et l'on démontre d'ailleurs que celles-ci sont toutes distinctes (pas de racines multiples).

Dans le cas qui nous occupe, (7) sera le polynome fondamental du *corps de rupture des paradoxes*, puisque, grâce à lui, le polynome P_0 des paradoxes est réductible. *En annulant P_0, on formule un nouveau principe d'identité*, que nous appellerons le «principe faible»:

$$(8) \quad P^4 = P \, .$$

Ce principe va caractériser une famille de propositions, — désormais notées par les majuscules $P, Q, \ldots$, — dont certaines seront sensées (cas particulier $p^2 = p$, d'où $p^4 = p$), et d'autres ne le seront pas ($P^2 \neq P$), *sans être pour cela dépourvues de valeur.*

§ 4 — *Le corps de rupture des paradoxes*

On définit strictement un corps de rupture $\mathbb{K}'$ comme une *extension algébrique* d'un corps $\mathbb{K}$ primitivement donné, extension obtenue en adjoignant à ce dernier un symbole nouveau α désignant une racine d'un certain polynome P_0 irréductible sur $\mathbb{K}$: $P_0(\alpha) = 0$. L'Introduction aura ainsi fait allusion à deux corps de rupture très classiques, relatifs aux polynomes respectifs $x^2 - 2$ et $x^2 + 1$, le second de ces corps étant le plus connu (corps des nombres complexes).

En général, il existe plusieurs corps de rupture pour un même polynome de $\mathbb{K}[X]$, mais on démontre qu'ils sont tous isomorphes. On appelle *corps de décomposition* de l'irréductible $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ le corps-extension de $\mathbb{K}$ qui contient *tous* les symboles des racines de P_0; dans le cas qui nous occupe, le corps de rupture des paradoxes sera aussi le corps de décomposition de (6), l'une des racines étant la négation de l'autre. Ce corps est donc unique, et nous le désignerons par $\mathbb{P}$.

Désignons par α et ω les racines de P_0. Les binomes de la décomposition s'écriraient donc en algèbre ordinaire $(X - \alpha)$ et $(X - \omega)$; mais comme le corps de rupture est de caractéristique 2, ces binomes s'écriront $(X + \alpha)$ et $(X + \omega)$. On a ainsi:

$$\begin{aligned} (9) \quad P_0(X) &= X^2 + X + 1 = (X \alpha)(X + \omega) \\ &= X^2 + (\alpha + \omega) \,.\, X + \alpha\omega \end{aligned}$$

D'où:

$$(10) \qquad \alpha + \omega = 1 \quad , \quad \alpha \,.\, \omega = 1 \,.$$

Les deux nouvelles valeurs logiques, *l'alpha et l'oméga,* sont donc la négation (au sens classique) l'une de l'autre:

(11) $\alpha = \overline{\omega} \quad , \quad \omega = \overline{\alpha}\,.$

Et dans le corps IP, elles sont inverses l'une de l'autre; d'où $\alpha\,.\,\overline{\alpha} = 1$, relation qui violerait le principe classique de contradiction, si nous prétendions encore identifier la multiplication avec la composition ET, comme en Logique binaire.

En fait, la «Logique des insensées» n'admet qu'un *principe «faible» de contradiction utilisant la multiplication,* obtenu en annulant la décomposition sur IP du polynome (7). Si P obéit à (8), nous avons le principe faible:

(12) $P\,.\,\overline{P}\,.\,\hat{P}\,.\,\hat{\overline{P}} = 0$

où $\overline{P} = P + 1$ est la *négation* de P, tandis que $\hat{P} = P + \alpha$ et $\hat{\overline{P}} = P + \omega = \overline{\hat{P}}$ sont ses *métanégations,* dont chacune est la négation de l'autre.

Les valeurs α et ω obéissent aussi aux relations:

(13) $\begin{cases} \omega^2 = \omega + 1 = \alpha = \alpha^2 + 1 \quad ; \\ \alpha^2 = \alpha + 1 = \omega = \omega^2 + 1 \quad ; \\ \alpha^3 = 1 = \omega^3 \quad ; \quad \alpha^4 = \alpha \quad ; \quad \omega^4 = \omega\,. \end{cases}$

Puisque IP est un corps, ses éléments s'engendrent eux-mêmes par additions et/ou multiplications; leur formule la plus générale sera donc:

(14) $P = p + p'\,.\,\alpha\,,$

où p et p' désignent des éléments du corps binaire $\mathbb{B} = \{0\,,1\}$. Plus généralement ,la même formule (14) désignera, pour l'algébriste, une indéterminée à valeurs dans IP, et pour le logicien *une proposition d'une logique étendue aux insensées russelliennes;* en ce cas, p et p' désignent des propositions classiques, des propositions qui ne peuvent être que vraies ou fausses. Par la suite, les minuscules *p, q,...* désigneront toujours des propositions sensées; elles seront accentuées lorsqu'elles se présenteront en coefficients de α ou de ω. Et nous dirons que les (14) sont des *propositions complexes.*

Le corps de rupture étant de degré $n = 2$, il présentera *un automorphisme non identique*, que nous appellerons la *conjugaison;* le groupe des automorphismes sera ainsi isomorphe au groupe binaire, et la conjugaison sera une opération involutive. Celle-ci se définit immédiatement par la *permutation des symboles* α *et* ω, c'est-à-dire par leur négation simultanée; nous la désignerons par le signe involutif (*), et nous aurons:

$$(15) \quad \alpha^* = \omega = \bar{\alpha} = \alpha^{-1} \qquad \omega^* = \alpha = \bar{\omega} = \omega^{-1}$$

$$P^* = p + p'\omega = (p + p') + p'\alpha \quad ; \quad P^{**} = P$$

Toute complexe est donc dotée d'une conjugée. Et à toute propriété, à tout théorème relatifs aux propositions complexes, correspondra une propriété conjuguée, un théorème conjugué; les relations (9) à (12) illustraient déjà cet automorphisme. C'est ainsi que la conjugaison (*) sera distributive sur l'addition et sur la multiplication.

Tout ceci présente une grande analogie avec l'algèbre des nombres complexes, ceux-ci étant des combinaisons linéaires $(x + x' . i)$ de deux «unités», le «1» et le «i», combinaisons à coefficients réels. Et la conjugaison complexe est, pour ces nombres, un automorphisme obtenu par la négation (au sens de l'algèbre ordinaire), — ou par l'inversion, — de l'élément «sophistique» noté i. Les deux termes de cette combinaison sont appelés respectivement la partie *réelle* et la partie *imaginaire* (irréelle) du nombre complexe; par analogie, nous dirons que, dans (14), p est la *partie sensée* de la complexe P, et $(p' . \alpha)$ sa *partie insensée.* L'adjectif «insensé» est donc en train de subir ici la même catachrèse que celle subie par ses prédécesseurs, «irrationnel» et «imaginaire», dans l'histoire de la mathématique.

§ 5 — *L'algèbre sur le corps de rupture des paradoxes*

Tout comme le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le corps de rupture est d'abord un *espace vectoriel.* Il est construit sur le corps binaire, et il admet comme *base* la paire $[1, \alpha]$ à partir de laquelle tous les autres «vecteurs» se déduisent par des combinaisons linéaires à coefficients binaires 0 ou 1. Les deux vecteurs basiques 1 et α sont bien *indépendants,* car sinon il existerait sur eux une combinaison linéaire à valeur nulle, si bien que l'alpha serait le vrai ou le faux, ce qui est précisément exclu. Une autre base, qui se déduit de la première par combinaison linéaire, est évidemment la paire $[1, \omega]$. Le vectoriel est donc *de dimension 2,* et chacun de ses éléments est ainsi défini univoquement, — dès qu'une base est adoptée, — par une *paire ordonnée de composantes binaires.* Grâce à cette propriété, tout problème de cette «Logique des complexes» peut être traité sans difficulté *par n'importe quelle machine logique binaire,* ordinatrice ou simulatrice.

D'après (14), l'ensemble des propositions de cette Logique est lui-même un vectoriel de dimension 2, et toute proposition complexe est représentable par une paire ordonnée $[p, p']$ de propositions sensées. Et toute combinaison linéaire, à coefficients sensés a et b, de propositions complexes P et Q, engendre une proposition de la même Logique:

$$(16) \quad R = aP + bQ = (ap + bq) \,.\, 1 + (ap' + bq') \,.\, \alpha \\ = r + r'\alpha \,.$$

Mais $\mathbb{P}$ n'est pas seulement un vectoriel, c'est aussi une *algèbre* (comme l'est l'ensemble des nombres complexes) : Il existe en effet une composition associative non additive entre vecteurs, à savoir la multiplication sur le corps $\mathbb{P}$. De la même manière, l'ensemble des propositions complexes reçoit une *structure d'algèbre.* Nous adopterons désormais comme signe multiplicatif la $(\times)$, — et *jamais plus* le simple point (éventuellement sous-entendu), *sauf* si l'un des multiplicateurs au moins est sensé, comme dans (16) par exemple.

Par un calcul simple, il vient:

$$(17)\quad P \times Q = (pq + p'q') \cdot 1 + (pq' + p'q + p'q') \cdot \alpha .$$

En particulier, $P \times P*$ doit donner un résultat sensé, puisqu'une telle expression est auto-conjuguée (propriété caractéristique des propositions classiques); en effet, on a :

$$(18)\quad P \times P* = p + pp' + p' = p \vee p' .$$

Puisque IP est un corps, la multiplication est distributive sur l'addition, et cette propriété se retrouve dans le calcul des propositions:

$$(19)\quad P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R.$$

Les deux compositions fondamentales définissent les tables de Pythagore (tables de valeurs) ci-après :

Table 1

$\times$	0	1	α	ω
0	0	0	0	0
1	0	1	α	ω
α	0	α	ω	1
ω	0	α	1	ω

Table 2

$+$	0	1	α	ω
0	0	1	α	ω
1	1	0	ω	α
α	α	ω	0	1
ω	ω	α	1	0

Dans la composition ($\times$), le zéro est élément «permis» (au sens des algébristes), c'est-à-dire *dominant:* $0 \times P = 0 , \forall P$. Les autres éléments forment un groupe ternaire, isomorphe à celui qui laisse invariant un triangle équilatéral tournant autour de son centre (rotations de $\pm$ 120°). Il est aussi isomorphe au groupe des racines cubiques complexes de l'unité, lesquelles sont le réel 1 et les deux complexes (cos 120° $\pm$ i.sin 120°); ces deux dernières sont d'ailleurs les racines du polynome des paradoxes ($x^2 + x + 1 = 0$), lorsqu'on considère ce dernier comme construit sur le corps $\mathbb{R}$ *des réels.*

La composition $(+)$ définit une structure de groupe de Klein, isomorphe au groupe des symétries d'un rectangle, alors que le $(+)$ de la logique classique ne donne que le groupe des symétries d'un segment (rectangle à 1 dimension).

Les deux compositions sont associatives; et elles sont commutatives, puisque les deux groupes sont abéliens.

§ 6 — *Les représentations matricielles*

On démontre que toute algèbre associative est *représentable par une algèbre de matrices,* et ce, en général, de plusieurs manières. L'une de celles-ci, dite *canonique*, est assez facile à obtenir, en vertu d'un théorème classique, dont nous n'indiquerons ici que le résultat qui nous intéresse: On vérifiera aisément que les 3 *matrices* $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, et Ω (caractères gras) ci-après se comportent, *pour la multiplication matricielle dans le corps binaire,* comme les éléments 1, α et ω qu'elles représentent:

$$(20) \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{-1}$$

C'est une représentation *d'ordre 2* (l'ordre des matrices) *sur le corps binaire* (qui fournit tous les termes de ces matrices). Il en existe évidemment une seconde, obtenue par conjugaison: *A* représentera l'élément ω, et Ω l'élément α. Ces représentations peuvent être utiles au calcul électronique.

Toute proposition complexe (14) est donc représentable, au choix, par l'une des matrices ci-après:

$$(21) \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & p' \\ p' & p + p' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P_*} = \begin{bmatrix} p + p' & p' \\ p' & p \end{bmatrix}$$

Bien entendu, dans un même calcul, il faut s'en tenir à l'une

Chap. II

Eléments de la Logique des propositions complexes

§ 7 — *La négation, l'équivalence, l'égalité*

En exprimant le principe faible de contradiction (12) nous avons vu apparaître la *négation* d'une complexe:

$$(22) \quad \overline{P} = P + 1 = (p + 1) + p'\alpha = \overline{p} + p'\alpha\,,$$

ainsi que ses deux *métanégations*

$$(23) \quad \hat{P} = P + \alpha = p + \overline{p'}\alpha \quad ; \quad \overline{\check{P}} = p + \omega = \overline{p} + \overline{p}'\alpha = \hat{\overline{P}}\,.$$

Jointes à l'*affirmation* ($P = P + 0$), ces opérations forment un groupe de Klein, évidemment isomorphe au groupe additif du corps $\mathbb{P}$. La situation est donc analogue à celle qui se présente en Logique classique, où *le groupe additif est un groupe d'affirmation-négation.*

En conséquence, et par analogie avec la logique classique, nous appellerons *équivalence* la négation (ordinaire) de l'addition et nous conserverons le signe habituel ($\Longleftrightarrow$) pour désigner cette composition. La table des valeurs de ($\Longleftrightarrow$) est donnée ci-après, en même temps que celle de ($=$).

Table 3

$=$	0	1	α	ω
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
α	0	0	1	0
ω	0	0	0	1

Table 4

$\Longleftrightarrow$	0	1	α	ω
0	1	0	ω	α
1	0	1	α	ω
α	ω	α	1	0
ω	α	ω	0	1

Le signe $(=)$ désigne l'*égalité* ou l'*identité*, et c'est dans ce sens qu'il a toujours été employé ici. Cette relation n'est jamais que vraie ou fausse, alors que maintenant l'équivalence peut être vraie, fausse, alpha ou oméga. En logique classique, on peut, *à la rigueur*, confondre les signes $(\Longleftrightarrow)$ et $(=)$, comme en calcul booléen; ici, cette confusion est formellement proscrite, d'après les tables 3 et 4. Tout au plus a-t-on l'implication ci-après (qui sera démontrée dans un moment):

$$(24) \quad (P = Q) \Rightarrow (P \Longleftrightarrow Q) .$$

§ 8 — *La composition ET $(\wedge)$*

Il n'est plus question ici d'identifier les compositions $(\times)$ et $(\wedge)$ comme en Logique classique, et ce pour diverses raisons. Nous *définirons la fonction ET* par :

$$(25) \quad P \wedge Q = P \times Q + p' \,.\, q' .$$

Si l'une au moins des propositions est sensée, mais seulement alors, on a :

$$(26) \quad p \wedge Q = p \times Q = p \,.\, Q = pQ .$$

En dehors de ce cas, les deux fonctions sont bien distinctes.

D'après (17) et (25), la formule vectorielle de ET sera

$$(27) \quad P \wedge Q = pq + (pq' + p'q + p'q') \,.\, \alpha .$$

Sa table des valeurs est la table 5:

Table 5

$\wedge$	0	1	α	ω
0	0	0	0	0
1	0	1	α	ω
α	0	α	α	0
ω	0	ω	0	ω

Il va être aisé de voir que *cette onction ET possède toutes les propriétés algébriques de son homologue classique,* — la question des valeurs étant mise à part, bien sûr.
En effet:

a) Elle est *commutative* (table symétrique); elle admet le faux comme élément dominant et le vrai comme neutre.

b) Elle est *idempotente*:

(28) $P \wedge P = P$,

et ainsi elle réintroduit un *principe fort d'identité* (28). D'autre part, elle réintroduit aussi un *principe fort de contradiction:*

(29) $P \wedge \overline{P} = 0$.

c) Elle est *associative*, car le résultat :

(30) $(P \wedge Q) \wedge R = pqr +$
$+ (p'qr + pq'r + pqr' + p'q'r + p'qr' + pq'r' + p'q'r') \,.\, \alpha$

est symétrique sur les 3 lettres p, q, r. Donc:

(31) $(P \wedge Q) \wedge R = \quad P \wedge Q \wedge R = \quad P \wedge (Q \wedge R)$.

d) Elle est *distributive sur l'addition :*

(32) $$\begin{aligned}(P + Q) \wedge R &= (P + Q) \times R + (p' + q') \,.\, r' \\ &= (P \times R + p'r') + (Q \times R + q'r') \\ &= P \wedge R + Q \wedge R \,.\end{aligned}$$

Notre composition ET est donc une *représentation d'ordre 4, sur le corps de rupture, de la composition classique ET,* — laquelle est classiquement représentée en ordre 2 sur le corps binaire.

§ 9 — *La composition OU* ($\vee$)

Le OU des complexes sera défini exactement comme en logique classique:

$$(33) \quad P \vee Q = P \wedge Q + P + Q \, .$$

Sa formule vectorielle sera ainsi :

$$(34) \quad P \vee Q = p \vee q + (pq' + p'q + p' \vee q') \, . \, \alpha \, .$$

Et sa table de Pythagore sera la table 6 ci-après :

Table 6

$\vee$	0	1	α	ω
0	0	1	α	ω
1	1	1	1	1
α	α	1	α	1
ω	ω	1	1	ω

De par sa définition même, *cette fonction OU présentera toutes les propriétés algébriques de son homologue classique,* propriétés bien connues, qu'il est inutile d'énumérer ici.

Les compositions ET et OU seront *duales* au sens de De Morgan, ce qui se démontre sans peine grâce à la propriété (32). Elles seront *réciproquement distributives,* et elles satisferont à la *loi d'absorption* :

$$(35) \quad P \vee (P \wedge Q) = P = P \wedge (P \vee Q) \, .$$

Enfin, notre OU conduit au *principe du tiers exclu :*

$$(36) \quad P \vee \overline{P} = 1 \, ,$$

lequel est le dual morganien du principe fort de contradiction. Peut-être s'étonnera-t-on de voir apparaître ce principe dans une logique plurivalente; mais celle-ci étant bidimensionnelle, le principe du tiers exclu est valable dans chacune des deux dimensions. Les insensées α et ω ne sont ni vraies ni fausses certes, mais chacune n'en est pas moins la contradictoire de l'autre, toute tierce possibilité étant exclue pour elles, tant qu'on ne fait pas intervenir les métanégations.

§ 10 — *L'implication SI...ALORS* ($\Rightarrow$)

Ici encore, la définition sera celle même adoptée par la logique classique:

$$(37)\quad (P \Rightarrow Q) = \overline{P} \vee Q = \overline{P \wedge \overline{Q}}\,.$$

Sa formule vectorielle sera donc :

$$(38)\quad (P \Rightarrow Q) = (p \Rightarrow q) + (pq' + p'q + (p' \not\Rightarrow q'))\,.\,\alpha\,.$$

Et sa table des valeurs est la table 7 ci-après, laquelle voisine avec la table 8 de la contre-implication ($\Leftarrow$) :

Table 7

$\Rightarrow$	0	1	α	ω
0	1	1	1	1
1	0	1	α	ω
α	ω	1	1	ω
ω	α	1	α	1

Table 8

$\Leftarrow$	0	1	α	ω
0	1	0	ω	α
1	1	1	1	1
α	1	α	1	α
ω	1	ω	ω	1

Cette composition possède donc, elle aussi, toutes les propriétés de son homologue classique, à la table près; en particulier, elle est réflexive et transitive. Elle est antisymétrique en ce sens qu'elle vérifie la tautologie:

$$(39)\quad [(P \Rightarrow Q) = (Q \Rightarrow P)] = \quad [P = Q]$$

L'équivalence se définira à la manière classique :

(40) $\quad (P \Longleftrightarrow Q) = \quad (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\,.$

On vérifie immédiatement que cette fonction est la négation de l'addition $(P + Q)$, si bien que (40) n'est autre que la fonction introduite au § 7, et caractérisée par la table 4.

§ 11 — *La relation d'ordre* $(\subset)$

Comme en logique classique, la relation $\mathscr{R}$ ci-après, qui s'écrit de deux manières à cause de (35) :

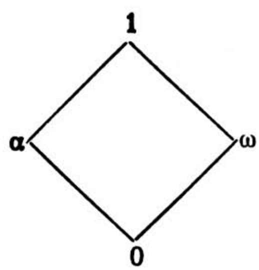
(41) $\quad P \mathscr{R} Q: \quad P \wedge Q = P \quad \text{ou} \quad P \vee Q = Q\,,$

est une *relation d'ordre* (non strict) entre P et Q. La vérification est aussi aisée qu'en logique classique: a) la réflexivité de $\mathscr{R}$ découle de l'idempotence de ET; b) son antisymétrie découle de la commutativité de ET; c) sa transitivité découle de l'associativité de ET.

Nous emploirons le signe d'ordre $(\subset)$, et nous traduirons la relation $\mathscr{R}$ par $P \subset Q$. Par un calcul immédiat, on voit que celle-ci exprime la *vérité de l'implication* $P \Rightarrow Q$. Dès lors, en consultant les tables de $(\Rightarrow)$ ou de $(\wedge)$, on arrive au tableau et au *graphe de Hasse* ci-après, résumant la relation d'ordre que (22) établit sur le corps de rupture:

(42)

P	$\subset$	Q
0		$0, 1, \alpha, \omega$.
1		1
α		$1, \alpha$
ω		$1, \quad \omega$



Le graphe de Hasse est celui d'un *treillis de Boole;* la relation $P \subset Q$ se traduit par «le sommet P est sur ou en dessous du sommet Q». En composant par OU, on monte dans le graphe, et en composant par ET, on y descend.

L'ordre ($\subset$) n'est donc *pas un ordre total*, tel que l'ordre des entiers par exemple (signe $\leqq$), ou l'ordre donné par l'implication vraie au corps binaire ($0 \leqq 0$; $0 \leqq 1$; $1 \leqq 1$). Ainsi, dans le corps IP, *l'alpha et l'oméga ne sont pas «comparables»* (ne sont pas ordonnés). Bien entendu, l'ordre est invariant pour la conjugaison, laquelle ne fait que permuter les deux éléments non comparables. Et c'est l'existence de cet ordre qui a permis d'écrire la tautologie (24).

§ 12 — *Les seize compositions-relations binaires — Les syllogismes*

D'après ce qui précède, les 16 compositions binaires de la Logique classique auront chacune au moins une représentation sur le corps IP, laquelle figurera parmi les 4^{4^2} compositions binaires internes possibles sur le corps IP. Tout comme en Logique classique ,leurs matrices, — d'ordre 4 maintenant, — résulteront des diverses composition (OU, ET) qu'on peut exécuter sur les *compositions basiques*:

$$(43) \quad P \wedge Q \, , \, \overline{P} \wedge Q \, , \quad P \wedge \overline{Q} \, , \, \overline{P} \wedge \overline{Q} \, ,$$

lesquelles donnent le résultat 0 par composition ET.

L'ensemble de ces 16 fonctions est une *trame*, c'est-à-dire un treillis de Boole dont la base (43) est elle-même un treillis de Boole ; le diagramme de la trame est un graphe de Hasse (cube à 4 dimensions), et l'ordre y est défini par ($\subset$), c'est-à-dire par l'implication vraie.

L'examen des matrices de valeurs montre que toutes contiennent des α et des ω, sauf celle du majorant ultime (la *tautologie*, peuplée de 1 exclusivement) et celle du minorant ultime (la *contradiction*, peuplée de 0 exclusivement). La trame est ainsi dotée d'une conjugée, si bien que les 16 fonctions classiques possèdent en fait 2 représentations définissant 2 trames isomorphes ; la tautologie et la contradiction ne possèdent toutefois qu'une seule représentation. A noter que la conjugaison (*) est distributive sur les 16 compositions, en vertu de l'automorphisme propre au corps IP :

(44) $P* \mathrm{T}\, Q* = (P \mathrm{T}\, Q)*$

où le «truc» T désigne l'un quelconque des 16 signes de composition.

La composition ou relation (=) ne fait pas partie de la trame. Si donc on réduit la Logique des complexes à un calcul ne mettant en jeu que les 16 compositions, alors le signe (=) doit être considéré comme métalogique.

Les 16 compositions classiques possèdent une propriété remarquable, qui ne semble pas avoir retenu l'attention des logiciens : *Toute composition binaire sur le corps* $\mathbb{B} = \{1, 0\}$ *est aussi une relation sur le même corps.* En effet, toute table de Pythagore sur $\mathbb{B}$ est aussi une *matrice d'incidence* (matrice de relation) sur $\mathbb{B}$, puisqu'elle n'est peuplée que de 1 et de 0 exclusivement. Plus précisément, chaque table définit deux relations complémentaires, l'une valorisée à 1 et qui est retenue, et l'autre valorisée à 0 et qui s'élimine d'elle-même à cause de cette valeur.

Dès lors, la multiplication booléenne des matrices (*produit relationnel*) confère à l'ensemble des 16 fonctions binaires classiques une *structure d'algèbre*. Rappelons que ce produit matriciel utilise les compositions ($\wedge$) et ($\vee$), et *non* les compositions ($\times$) et ($+$) utilisées au § 6. Dans cette algèbre, la matrice représentant l'implication est idempotente ; cette simple remarque est à la base d'une théorie algébrique du syllogisme catégorique (*).

Il se fait que *tout ceci se transpose isomorphiquement en Logique des complexes,* à condition de remplacer la notion classique de «relation» par celle d'«hyperrelation» ou de «*quadrirelation*» : Une quadrirelation $\mathcal{R}$ d'ordre n sur un ensemble $\mathbb{E}$ est une application de l'ensemble-produit $\mathbb{E}^n$ sur le corps de rupture IP. En particulier, pour $n = 2$, la matrice qui représente la quadrirelation est la somme de 4 matrices $\mathcal{R}_i$ *dis-*

* P.V. Grosjean: Théorie algébrique du syllogisme catégorique, in «*Logique et Analyse*», n° 59-60, Septembre-Décembre 1972.

jointes (composées 2 à 2 par ET, elles donnent zéro), et ce selon la formule générale :

$$(45) \quad \mathscr{R} = 0 \,.\, \mathscr{R}_0 + 1 \,.\, \mathscr{R}_1 + \alpha \,.\, \mathscr{R}_\alpha + \omega \,.\, \mathscr{R}_\omega \,.$$

Les matrices $\mathscr{R}_i$ sont des matrices d'incidence classiques ; on pourra appliquer (45) à la comosition $(+)$ par exemple.

Dès lors, chacune des 16 compositions (fonctions) de la Logique des complexes est aussi *une quadrirelation sur le corps* $\mathbb{P}$ *de rupture* ; notamment la partie $\mathscr{R}_1$ de l'implication définit la relation d'ordre (42) sur $\mathbb{P}$. Le produit relationnel se définit alors par le produit matriciel utilisant les compositions $(\wedge)$ et $(\vee)$ de la Logique des complexes; et ce produit donne à l'ensemble des 16 compositions-relations une structure d'algèbre. Dans cette algèbre, la matrice d'implication du syllogisme se transpose sans plus dans cette Logique.

§ 13 — *Retour aux (soi-disant) antinomies*

Revenons au paradoxe-type des imprédicables, tel que rappelé dans l'Introduction. Les énoncés $(x \in x)$ et $(x \notin x)$ étant dénués de sens, nous les valuerons par alpha-oméga, soit, plus précisément :

$$(46) \quad \bar{P} = (x \notin x) = \begin{cases} \alpha, \text{ si x est prédicable} & : \boldsymbol{P} = \omega \,. \\ \omega, \text{ si x est imprédicable} & : \boldsymbol{P} = \alpha \,. \end{cases}$$

Posons alors :

$$(47) \quad q = (x \in X) \quad ; \quad q' = (x = X) \quad ; \quad Q = q + q' \,.\, \omega$$

Les propositions classiques q et q' peuvent être vraies ou fausses ; cependant, nous conviendrons que X désigne toujours la classe à laquelle appartient effectivement x, si bien que nous aurons toujours $q = 1$, et par conséquent :

(48) $Q = 1 + q'\omega$

$$\begin{cases} \text{si } q' = 0, & \text{aucun paradoxe en Logique classique } (x \neq X). \\ \text{si } q' = 1, & \text{paradoxe classique des imprédicables } (x = X). \end{cases}$$

Examinons la proposition $P \times Q$, qui engendre l'équation des paradoxes, pour les imprédicables, lorsque l'on pose : $P = Q =$ proposition sensée. Tout d'abord, si $q' = 0$, il n'y a pas de paradoxe, mais la proposition-produit n'est ni vraie ni fausse ; on a en effet :

$$(49) \quad \begin{cases} \text{Prédicables : } \overline{P} = \alpha\,, \ Q = 1\,, \ \overline{P} \times Q = \overline{P} \wedge Q = \alpha\,. \\ \text{Imprédicables : } \overline{P} = \omega\,, \ Q = 1\,, \ \overline{P} \times Q = \overline{P} \wedge Q = \omega\,. \end{cases}$$

Pour $q' = 1$ maintenant, *il n'y aura pas davantage de paradoxe si* x *est imprédicable,* avec $x = X$:

$$(50) \quad \begin{cases} \text{Prédicables : } \begin{Bmatrix} \overline{P} = \omega\,, \ Q = \alpha = \overline{P}\,; \\ \overline{P} \times Q = 1\,, \ \overline{P} \wedge Q = 0\,. \end{Bmatrix} \\ \\ \text{Imprédicables : } \begin{Bmatrix} \overline{P} = \alpha\,, \ Q = \alpha = P\,; \\ \overline{P} \times Q = \omega\,, \ \overline{P} \wedge Q = \alpha\,. \end{Bmatrix} \end{cases}$$

L'antinomie ne surgirait que si l'on confondait les compositions ($\times$) et ($\wedge$), comme en Logique classique, et comme si P et Q étaient toutes deux sensées.

L'équation $P \times P + 1 = P^2 + P + 1 = 0$ n'est paradoxale que si on lui applique *indûment* le principe fort d'identité, sous sa forme classique $P^2 = P$. Tout ce qu'on peut lui appliquer, c'est le principe faible $P^4 = P$, lequel ne donne nullement $P^2 = P$, sauf si $P = p$ est une proposition sensée.

Toujours comme dans l'Introduction, traduisons maintenant les paradoxes classiques par le schéma cicéronien du Menteur : $P \Rightarrow \overline{P} \Rightarrow P \Rightarrow \ldots$ D'après la table 7, ces implications ne sont ni vraies ni fausses, *puisque* α *et* ω *ne sont pas comparables dans l'ordre* ($\subset$). Ces implications ne sont qu'alpha ou oméga, et l'on a les relations tout-à-fait correctes ci-après, où la valeur prise par l'implication figure au-dessus du signe ($\Rightarrow$) :

$$(48) \quad \alpha \overset{\omega}{\Rightarrow} \omega \overset{\alpha}{\Rightarrow} \alpha \Rightarrow \ldots$$

Passons aux équivalences découlant de (48). Ceci ne conduira nullement à l'antinomie classique $(P \Longleftrightarrow \overline{P}) = 1$, mais bien à la relation irréprochable ci-après, indiquant la fausseté de l'équivalence entre contradictoires, sensées ou non :

$$(49) \quad (\alpha \Longleftrightarrow \omega) = (\alpha \overset{\omega}{\Rightarrow} \omega) \wedge (\omega \overset{\alpha}{\Rightarrow} \alpha) = \omega \wedge \alpha = \acute{\alpha} \wedge \alpha = 0 .$$

Enfin, si l'on voulait, par équivalence, donner une valeur sensée 1 ou 0 aux insensées russelliennes, on obtiendrait des relations insensées, parfaitement correctes :

$$(50) \quad (x \in x) \overset{\alpha}{\Longleftrightarrow} 1 \ ; \ (x \in x) \overset{\omega}{\Longleftrightarrow} 0 \ ;$$

$$(x \notin x) \overset{\alpha}{\Longleftrightarrow} 0 \ ; \ (x \notin x) \overset{\omega}{\Longleftrightarrow} 1 .$$

Les diverses causes de paradoxes sont apparues clairement ici : confusion de $(\times)$ et de $(\wedge)$, emploi de la table classique de l'implication, application indue du principe classique d'identité, confusion entre $(\Longleftrightarrow)$ et $(=)$,... Grâce à la Logique des complexes, *il n'y a plus de paradoxes* ; il y a simplement *des raisonnements à structure classique* (puisque l'algèbre des ET OU, etc, est conservée), mais où apparaissent, à l'occasion, des propositions à valeurs non classiques.

§ 14 — *Un cas pratique d'application*

Dans certains pays, en Allemagne et en Israël notamment, les *feux de signalisation* sont conçus de manière à ce que le Vert, aussi bien que le Rouge, soit annoncé par l'Orange. Ces dispositifs sont donc, en fait, des feux à 4 couleurs, des systèmes à 4 états. Nous désignerons les deux Oranges par des sigles à 2 initiales, dont la première désigne la couleur passée et la seconde la couleur future. Et nous uniformiserons les notations en symbolisant Rouge par RR et Vert par VV, si bien que les 4 états seront VV, RR, VR et RV ; le sigle VR désigne donc le seul feu orange utilisé en France et en Belgique, entre autres.

Les couleurs principales, le Rouge et le Vert, traduisent chacun une actualité, à savoir : «Rouge» = «Maintenant, on doit s'arrêter», et «Vert» = «Maintenant, on peut passer» (Rouge est impératif, et Vert ne l'est jamais, selon le Code).

A l'opposé, les deux Oranges traduisent chacun une potentialité, une attente, un avertissement, une transition, un devenir passé-futur. En ce sens, ils appartiennent à une autre dimension logique que le Rouge et le Vert, ce qui nous incite à les traiter par la Logique bidimentionnelle des complexes. Nous les valoriserons donc comme suit sur le corps de rupture des paradoxes :

$$(51) \quad VV = 0 \ , \ RR = 1 \ , \ VR = \alpha \ , \ RV = \omega \, .$$

En adoptant ces notations par paires de lettres, on traduit parfaitement la bidimensionnalité de l'espace vectoriel des états de notre système de signalisation.

Toute voiture, située quelque part en avant du feu, est elle aussi un système à 4 états, au point de vue qui nous intéresse ici. Car elle peut se trouver dans l'un des 2 états principaux, à valeur actuelle, la marche (MM) et l'arrêt (AA). mais aussi dans l'un des 2 états intermédiaires, à valeur d'attente, de transit, de préparation, que nous noterons MA et AM. Dans l'état MA, l'automobiliste, qui est en mouvement, freine ou rétrograde ; dans l'état AM, il accélère, ou bien, s'il est à l'arrêt, il débraye et passe en première vitesse. Nous valoriserons comme suit ces états sur le corps IP :

$$(52) \quad MF = 0 \qquad AA = 1 \qquad MA = \alpha \qquad AM = \omega$$

La composition-relation qui va du système-feu au système-voiture définit un troisième système, dont les états sont fonction des états des deux autres. Lesdits états sont d'ordre moral ou juridique, et on en distingue immédiatement deux principaux : le conducteur peut être en règle, en droit (symbole: D) ou en contravention, en faute (symbole: F). S'il n'existait que R et V, que M et A, et ainsi D et F seulement, la composition s'exprimerait par la matrice ci-dessous. En posant D = 1 et F = 0, on identifie la matrice à celle de *l'implication classique,* — ce qui est par ailleurs évident : Le Vert, tout comme le Faux en logique, implique ici n'importe quoi.

$\Rightarrow$	M	A
V	D	D
R	F	D

Complétons le système des états juridico-moraux du conducteur par deux états intermédiaires, à valeur d'attente, de risque, de possibilité, et notons-les FD et DF. Dans l'état FD, le conducteur, qui aurait pu être en faute ,s'achemine vers une régularisation possible ; et dans l'état DF, la situation est inverse. Représentant maintenant D par DD et F par FF, nous valoriserons comme suit les états juridico-éthiques :

$$(53) \quad \mathrm{FF} = 0 \quad , \quad \mathrm{DD} = 1 \quad , \quad \mathrm{FD} = \alpha \quad , \quad \mathrm{DF} = \omega \, .$$

Les 3 valorisations sont parfaitement cohérentes, car elles se résument toutes par un même schéma :

$$(54) \quad (0\,,0) = 0 \;,\; (1\,,1) = 1 \;,\; (0\,,1) = \alpha \;,\; (1\,,0) = \omega \, .$$

A noter qu'en vertu de l'automorphisme, on peut permuter *partout* les symboles α et ω, sans toucher en rien à la validité de la symbolique ou à la rigueur des raisonnements.

Traduisons la table 7 de l'implication en utilisant les notations propres aux états des 3 systèmes mis ici en relation ; nous obtenons :

	$\Rightarrow$	Voiture			
		MM	AA	MA	AM
Signaux	VV	DD	DD	DD	DD
	RR	FF	**DD**	FD	DF
	VR	DF	DD	DD	DF
	RV	FD	DD	FD	DD

Les commentaires se lisent d'eux-mêmes (étant bien entendu que ce petit problème de circulation routière est strictement ramené aux rapports feu-voiture, toute autre considération étant écartée). Le conducteur est en faute si et seulement si il brûle le feu rouge ; et il est toujours en droit s'il reste arrêté quel que soit le signal, ou bien si, le feu étant vert, il fait n'importe quoi. Si l'Orange VR annonce le Rouge, le conducteur est en droit s'il décélère (MA) ou s'il s'arrête (AA), mais il est en danger de faute (DF) s'il maintient sa vitesse (MM) et a fortiori s'il accélère (AM). Etc, etc.

Ce cas d'application de la Logique des complexes semble bien éloigné de la théorie des paradoxes. Cependant si, par distraction, on tenait pour des «droits» (D = 1) les implications VR $\Rightarrow$ AM et RV $\Rightarrow$ MA, on arriverait à l'antinomie AM $\Longleftrightarrow$ MA, et on verrait réapparaître le schéma cicéronien du Menteur : Si le conducteur accélère, alors il décélère, et vice versa. Selon la classification russellienne, les opérations de changement de vitesse se traduiraient par des énoncés dénués de sens ...

§ 15 — *Remarque finale*

Nous avions terminé le § 13 en concluant «qu'il n'y a plus de paradoxe». Précisons : Dans la Logique des complexes, il n'y a plus de *paradoxe classique* (Menteur, Imprédicable, etc), de ceux que nous appellerons maintenant les *antinomies de degré 2*. Mais si, sans vouloir quitter cette Logique, nous prétendions traiter comme une proposition complexe ($P^4 = P$) une proposition qui ne l'est pas ($P^4 \neq P$), alors nous verrions surgir des «antinomies de degré *n*», avec n >2.

Par définition, le degré d'une antinomie est le plus petit nombre *n* tel que ladite antinomie se résolve sur une extension algébrique de degré *n* du corps binaire $\{0, 1\}$. Le corps de rupture d'une antinomie de degré *n* admet donc, comme polynome fondamental, $X^C + X$, avec $C = 2^n =$ nombre des «valeurs». Les $(C - 1)$ racines non nulles (toutes distinctes) de ce polynome sont les puissances $\beta^o = 1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{C-2}$, d'un même symbole β ; mais toutes peuvent s'exprimer *additivement* en fonction de *n* d'entre elles qu'on peut choisir de différentes manières, — en y incluant toujours la racine privilégiée $\beta^o = 1 = \beta^{C-1}$ («sensée»).

Ainsi, le degré d'une antinomie est le nombre minimal de *dimensions logiques* nécessaires pour la construction du vectoriel de rupture. On ouvre ainsi la porte aux propositions hypercomplexes dont l'ensemble, pour un même *n* donné, va former un *système d'hypercomplexes* (nom donné anciennement à ces structures qu'on appelle aujourd'hui des «algèbres»). Posant $D = 2^m$, on démontre que $(X^D + X)$ divise $(X^C + X)$ si et seulement si l'entier *m* divise l'entier *n*. En conséquence, une extension de degré *n* ne résout que les antinomies dont le degré est un diviseur de *n*. Si bien qu'en voulant résoudre de plus en plus d'antinomies on est conduit à une succession indéfinie d'extensions algébriques, succession qui ne va pas sans rappeler celle des métalangues. A la limite, la logique sans antinomie devrait admettre une infinité de valeurs, dont l'ensemble définit une *extension infinie (transcendante*) du corps binaire.