

LA COMPLETUE ET LA COMPACITE DE LA PRAGMATIQUE

Daniel VANDERVEKEN

Aspirant F.N.R.S.

529, Chée de Gand, 1080 Bruxelles

En dépit des définitions très précises données par R. Montague (1968) (1972) et D. Scott (1970) de la notion d'une interprétation possible pour un langage pragmatique, aucune axiomatisation de l'ensemble des vérités logiques d'un langage pragmatique ordinaire n'a encore été publiée.

L'objet de cet article est de présenter un système logique VS dont le langage formel est un langage pragmatique ordinaire enrichi par l'introduction de connecteurs, et de prouver la complétude sémantique de ce système ainsi qu'un théorème général de compacité pour la pragmatique.

La technique générale de la preuve qui sera exposée est une adaptation de la preuve de complétude de L. Henkin (1949) pour le calcul des prédicats.

Le langage formel $\mathcal{L}$ de ce système logique VS est définissable comme suit:

Le lexique de VS contient:

- (1) les foncteurs classiques de la négation $\sim$ et de l'implication matérielle $\supset$,
- (2) le quantificateur universel $\wedge$,
- (3) le connecteur L de nécessité universelle (S5),
- (4) les parenthèses (),
- (5) un ensemble dénombrable de variables individuelles $x, x', x'', \text{ etc...}$,
- (6) un ensemble dénombrable de constantes individuelles $a, a', a'', \text{ etc...}$,

- (7) pour chaque nombre naturel n , un ensemble dénombrable de prédicats de degré n , p_n , p'_n , p''_n etc... y compris le prédicat unaire d'existence E et
- (8) pour chaque entier n , un ensemble dénombrable de connecteurs de degré n , d_n , d'_n , d''_n ...

Les règles de formation de $\mathcal{L}$ sont les suivantes:

(i) Les formules atomiques, c'est-à-dire les prédicats de degré n suivis de n variables et/ou constantes individuelles, sont des formules bien formées.

(ii) Si A et B sont des formules bien formées, alors LA , $\sim A$, $(A \supset B)$ et $(\wedge v)A$ où v est une variable individuelle sont encore des formules bien formées. (')

(iii) Si d_n est un connecteur de degré n et $B_1 \dots B_n$ une suite de n formules bien formées, alors $d_n (B_1 \dots B_n)$ est une nouvelle formule bien formée.

$\mathcal{L}$ est donc le plus petit ensemble qui contient toutes les formules atomiques et est fermé sous les opérations définies par le quantificateur $\wedge$ et les connecteurs logiques $\sim$, L et $\supset$.

Un langage pragmatique est un langage qui contient dans son lexique des expressions de catégories (1)-(8) dénommées plus haut, parmi lesquelles certaines, appelées embrayeurs (R. Jakobson 1952) ou termes indiciels (C. S. Peirce), sont caractérisées sémantiquement par la propriété que leur extension ne peut pas être déterminée si on fait abstraction de toute référence à un contexte possible d'énonciation.

Exemple: Tout langage naturel est un langage pragmatique car s'il doit pouvoir être actualisé en actes de discours, comme le veut la dialectique langue-parole (Saussure 1916), alors il doit obligatoirement contenir dans son lexique, en plus des connecteurs logiques ('), des quantificateurs et de ses prédicats, certaines expressions désignées dont on peut postuler la traduction radicale et dont le propre est que leur référence va-

rie d'un contexte possible d'énonciation à un autre en fonction de l'identité de l'énonciateur ou de l'allocutaire ou du moment de l'énonciation, caractéristiques de ce contexte.

Ce qui est le cas, par exemple en français, pour les formes pronominales «Je», «Tu» (Benvéniste 1956) et pour les opérateurs temporels «Il sera vrai que», «Il a été vrai que».

$\mathcal{L}$ est un langage pragmatique *ordinaire*, en ce sens qu'aucune précision n'est donnée quant à la nature et au nombre des embrayeurs qui lui appartiennent, et qu'il est dit simplement qu'il contient (comme tout langage pragmatique) le connecteur logique de nécessité universelle qui quantifie sur l'ensemble des contextes d'énonciation possibles d'un langage, et des constantes représentant des connecteurs intensionnels ou extensionnels (*).

De par la définition-même d'un langage pragmatique, certaines exigences sont évidemment imposées d'emblée à toute sémantique matériellement adéquate d'un tel langage.

Il faut, en effet d'abord, qu'elle permette de déterminer les traits distinctifs des contextes d'énonciation qui sont pertinents pour l'interprétation du langage pragmatique en question — la nature et le nombre de ces traits variant d'un langage à un autre suivant les embrayeurs qu'il contient.

Il faut ensuite qu'elle permette de définir pour chaque expression du lexique de ce langage l'intension qui est propre à cette expression.

Il faut enfin qu'elle permette de spécifier relativement à chaque contexte possible d'énonciation l'ensemble des objets qui sont actuels ou existants dans ce contexte, de façon à définir l'univers du discours du langage pragmatique en question.

Etant donné la structure pragmatique indifférenciée de $\mathcal{L}$, ceci mène naturellement à la définition suivante d'une inter-

prétation possible pour $\mathcal{L}$, définition qui est équivalente à celles formulées par R. Montague et D. Scott:

une *interprétation possible* M est un triple $\langle I, D, V, < \rangle$ où I est un ensemble et D et V deux fonctions, définissables comme suit:

— I est un ensemble non-vidé d'éléments appelés *indices* et notés $i, j, i', j', \dots$, à interpréter comme des contextes possibles d'emploi de $\mathcal{L}$. ⁽⁴⁾

— D est une fonction dont le domaine est I et qui est telle que si i est un indice, alors $D(i)$ est un ensemble — l'union $\bigcup_{i \in I} D(i)$ devant être non-vidé.

L'ensemble $D(i)$ sera interprété comme l'ensemble des objets qui sont actuels relativement à l'indice i , et l'union $\bigcup_{i \in I} D(i)$ de ces ensembles comme l'ensemble des objets possibles pour $\mathcal{L}$, c'est-à-dire l'univers de discours de $\mathcal{L}$ selon M . ⁽⁵⁾

— V est une fonction qui satisfait aux conditions suivantes:

(1) Si e est une constante individuelle, alors V_e est une fonction de I dans $\bigcup_{i \in I} D(i)$, appelée l'intension de e dans $\mathcal{L}$ selon M , qui donne, pour chaque indice i appartenant à I , l'objet de $\bigcup_{i \in I} D(i)$ qui est la dénotation de e pour i .

(2) Si v est une variable individuelle alors V_v est un membre de $\bigcup_{i \in I} D(i)$. ⁽⁶⁾

(3) Si p_n est un prédicat de degré n , alors V_{p_n} est une fonction de I dans $\mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} D(i))^n$, appelée l'intension de p_n dans $\mathcal{L}$ selon M , qui donne, pour chaque indice $i \in I$, l'ensemble des n -tuples $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ $u_1 \in \bigcup_{i \in I} D(i), \dots, u_n \in \bigcup_{i \in I} D(i)$ qui sont l'extension de p_n relativement à i dans M . ⁽⁷⁾

(3') Dans le cas spécial où $n = 0$, c'est-à-dire quand p_n est une constante propositionnelle, alors V_{p_n} est une fonction de I dans

l'ensemble $\mathcal{P}\{\emptyset\}$ appelée proposition exprimée par p_0 dans $\mathcal{L}$ qui donne pour chaque indice $i \in I$ l'ensemble vide $\emptyset$ ou son singleton $\{\emptyset\}$, lesquels seront regardés ici comme les valeurs de vérité, faux F et vrai T. ⁽⁸⁾

(4) V_E est une fonction dont le domaine est I telle que, pour chaque indice $i \in I$, $F_E(i) = (D(i))^1$ et

(5) Si d_n est un connecteur de degré n , alors V_{d_n} est une fonction dont le domaine est I , appelée l'intension de d_n dans $\mathcal{L}$ selon M , qui est telle que pour une relation ⁽⁹⁾ binaire D_{d_n} sur $I \times (\mathcal{P}I)^n$, $V_{d_n}(i) = \{ \langle J_1, \dots, J_n \rangle / J_1 \subset I, \dots, J_n \subset I \text{ et } i R_{d_n} \langle J_1, \dots, J_n \rangle \}$; càd est l'ensemble des n -tuples d'ensembles d'indices qui sont l'extension de d_n relativement à i dans M .

Maintenant, la valeur que prend la fonction V pour chaque formule bien formée A de $\mathcal{L}$, valeur qui sera appelé l'intension de A dans $\mathcal{L}$ selon M et noté VA , peut être effectivement calculée dans chaque cas à partir de la définition récursive suivante faite par induction sur la longueur de A . ⁽¹⁰⁾

— Base: Si A est une formule atomique de la forme $p_n e_1 \dots e_n$ alors $V_{p_n} e_1 \dots e_n$ est une fonction de I dans l'ensemble $\{T, F\}$ qui prend comme valeur, pour chaque indice $i \in I$, T si $\langle \text{Ext}_{e_1 M}(i), \dots, \text{Ext}_{e_n M}(i) \rangle \in V_{p_n}(i)$, et F dans le cas contraire.

— Etape d'induction: Supposons que la valeur de la fonction V ait été définie pour toute formule bien formée dont la longueur est inférieure à k .

Si B, C et $B_1, \dots, B_n$ sont de telles formules et i, j des éléments de I alors

[clause $V \sim$]

$V \sim B$ est une fonction de I dans l'ensemble des valeurs de vérité qui est telle que, pour chaque indice $i \in I$, $V(\sim B, i) = T$ ssi $V(B, i) = F$,

[clause $V \supset$]

$V(B \supset C)$ est une fonction de I dans l'ensemble des valeurs

de vérité qui est telle que, pour chaque indice $i \in I$,
 $V((B \supset C), i) = T$ ssi $V(B, i) = F$ ou $V(C, i) = T$,

[clause V_L]

$V_L B$ est une fonction de I dans l'ensemble des valeurs de vérité telle que, pour chaque $i \in I$, $V(LB, i) = T$ ssi pour tout $j \in I$ $V(B, j) = T$,

[clause V_{d_n}]

$V_{d_n}(B_1 \dots B_n)$ est une fonction de I dans l'ensemble des valeurs de vérité telle que, pour chaque $i \in I$,
 $V(d_n(B_1 \dots B_n), i) = T$ ssi
 $\langle \{j/V(B_1, j) = T\}, \dots, \{j/V(B_n, j) = T\} \rangle \in V_{d_n}(i)$, ⁽¹¹⁾ et enfin

[clause $V(\wedge v)$]

$V(\wedge v)B$ est une fonction de I dans l'ensemble des valeurs de vérité telle que, pour chaque $i \in I$, $V((\wedge v)B, i) = T$ ssi pour toute interprétation possible $M' = \langle I', D', V' \rangle$ qui diffère au plus de M par le fait que $V'_v \neq V_v$ nous avons que $V'(B, i) = T$.

Un ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}$ sera dit *simultanément exemplifiable dans l'interprétation possible* $M = \langle I, D, V \rangle$ ssi il existe un $i \in I$ tel que, pour tout membre B de Γ , $V(B, i) = T$.

Γ est *simultanément exemplifiable* ssi il existe une interprétation possible M telle que Γ est simultanément exemplifiable dans M .

Une formule bien formée A est une *conséquence sémantique* d'un ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}$ ssi, pour toute interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ et pour tout $i \in I$, si pour tout membre B de Γ $V(B, i) = T$, alors $V(A, i) = T$.

En abréviation: $\Gamma \models A$.

Dans le cas où Γ est vide, A sera appelée une formule *logiquement valide*. En abréviation: $\models A$.

Le but de cet article est d'établir que l'ensemble des formules logiquement valides du langage pragmatique $\mathcal{L}$ coïncide avec l'ensemble des théorèmes du système formel VS suivant:

Les formules et schémas de formules suivants sont les axiomes et schémas d'axiomes de VS:

$$\text{Ax. 1. } A \supset (B \supset A)$$

$$\text{Ax. 2. } A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (B \supset C))$$

$$\text{Ax. 2. } A \supset (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (B \supset C))$$

$$\text{Ax. 3. } (\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$$

$$\text{Ax. 4. } (\wedge v)(A \supset B) \supset (A \supset (\wedge v)B) \text{ si } v \text{ est une variable individuelle qui n'a pas d'occurrence libre dans } A.$$

$$\text{Ax. 5. } (\wedge v)A \supset A_e^v \text{ où } v \text{ est une variable individuelle, } e \text{ est une expression de même type que } v, v \text{ n'a pas d'occurrence libre dans une sous-formule de } A \text{ de la forme } (\wedge e)B \text{ et } A_e^v \text{ est la formule qui peut être obtenue à partir de } A \text{ en substituant à toute occurrence libre de } v \text{ dans } A \text{ une occurrence de } e.$$

$$\text{Ax. 6. } LA \supset A$$

$$\text{Ax. 7. } L(A \supset B) \supset (LA \supset LB)$$

$$\text{Ax. 8. } \sim LA \supset L \sim LA$$

$$\text{Ax. 9. } L(A \leftrightarrow B) \supset (d_n(A_1 \dots A_n) \supset d_n(B_1 \dots B_n)) \text{ où } B_1 \dots B_n \text{ est une suite de } n \text{ formules qui diffère au plus de la suite } A_1 \dots A_n \text{ par le fait que pour un } k \text{ tel que } 1 \leq k \leq n \text{ } A_k = A \text{ et } B_k = B \text{ et où } (A \leftrightarrow B) \text{ est une abréviation pour } \sim((A \supset B) \supset \sim(A \supset B)).$$

$$\text{Ax. 10. } (\wedge x) \sim L \sim Ex.$$

Il y a trois règles d'inférence pour VS:

- I la règle du *Modus Ponens* (M.P.): de A et de $(A \supset B)$, inférer B ,
 II la règle de *généralisation* (U.G.): de A , inférer $(\wedge v)A$, où v est n'importe quelle variable individuelle et
 III la règle de *nécessité* (R.L.): de A , inférer LA .

Une *preuve de VS* est une colonne d'un nombre fini supérieur à 0 de formules de $\mathcal{L}$ dont chaque élément ou bien un axiome de VS, ou bien est une conséquence par la règle de Modus Ponens, par la règle de généralisation ou par la règle de nécessité, d'une (de deux formule(s) au-dessus d'elle dans la colonne.

Une colonne $\begin{smallmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{smallmatrix}$ de n formules avec A_1 comme premier, ..., A_n comme dernier élément, sera représentée ici par une suite de la forme $A_1, \dots, A_n$ où pour chaque k , $1 \leq k < n$, A_{k+1} représente la formule qui est exactement au dessus de A_k dans

$\begin{smallmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{smallmatrix}$

Un *théorème de VS* est une formule qui est le dernier élément d'une preuve de VS. Nous écrirons ici « $\vdash A$ » comme abréviation pour l'expression « A est un théorème de VS».

Une colonne de formules ϱ sera appelée une sous-colonne d'une colonne ϱ' ssi toutes les formules de ϱ apparaissent dans ϱ' dans le même ordre que celui qu'elles présentent dans ϱ .

Une *dérivation dans VS* d'une formule A à partir d'un ensemble Γ de formules, appelées hypothèses, est une colonne finie, et non-vide $A_1, \dots, A_n$ de formules de VS dont A est le dernier élément et qui est telle que chaque formule A_k , $1 \leq k \leq n$, de la colonne, ou bien

- a) est un axiome de VS, ou bien
 b) est un membre de Γ , ou bien

- c) est inférée par l'application de M.P. à deux formules A_m et $A_{m'}$, où $m, m' < k$ et $A_{m'} = (A_m \supset A_k)$ ou bien
- d) est inférée par l'application de U.G. ou de R.L. à une formule A_m telle que $m < k$ à condition que A_m soit le dernier élément d'une sous-colonne de $A_1, \dots, A_n$ qui est une preuve de VS. ⁽¹²⁾

S'il existe une dérivation dans VS' d'une formule A à partir de l'ensemble Γ , A sera dite la *conséquence syntaxique* dans VS de Γ .

En abréviation: $\Gamma \vdash_{VS} A$.

Un ensemble Γ de formules de VS sera dit *cohérent* ssi il n'est pas vrai que pour toute formule B de VS, $\Gamma \vdash_{VS} B$. Dans le cas contraire, Γ sera dit incohérent.

Un ensemble de formules fermées de VS Γ est un *ensemble maximal cohérent* ssi aucune formule fermée ne peut être ajoutée à Γ sans le rendre incohérent.

Un ensemble ω -cohérent de VS est un ensemble Γ qui est tel que, pour toute formule A avec exactement une variable libre v, si Γ contient une formule de la forme A_e^v pour toute constante individuelle e de VS, alors Γ contient aussi $(\bigwedge v)A$. Dans le cas contraire, Γ est ω -incohérent.

Soient S, S', S''... des systèmes logiques arbitraires. Un système logique S' sera appelé une *extension* du système VS qui vient d'être spécifié ssi a) le langage $\mathcal{L}'$ de S' peut être obtenu à partir de $\mathcal{L}$ en ajoutant un ensemble comptable de nouvelles constantes individuelles au lexique de VS et/ou b) l'ensemble des axiomes de S' est une extension de l'ensemble des axiomes de VS.

— les notions de *preuve* de S', de *dérivation* dans S' d'une formule A à partir d'un ensemble, d'ensemble cohérent, d'ensemble maximal cohérent, et d'ensemble ω -cohérent de S' étant définies à partir des définitions données plus haut en remplaçant partout dans ces définitions VS par S.

Une *extension cohérente* de VS est une extension de VS dont l'ensemble des axiomes est cohérent.

Une *extension cohérente* de VS est une extension de VS dont qui est telle que tout ensemble cohérent Γ de formules de VS est aussi un ensemble cohérent de cette extension.

Notre objectif dans cet article est de démontrer que tout ensemble cohérent Γ de formules du système VS est un ensemble simultanément exemplifiable dans une interprétation possible M de $\mathcal{L}$.

Nous commencerons dans ce but par établir certains théorèmes préliminaires comme le théorème de validité, le théorème de la déduction et le théorème de la cohérence de VS, théorèmes qui seront utilisés plus tard pour la preuve finale de ce théorème.

Quand la preuve d'un théorème sera considérée comme immédiate ou comme pouvant être obtenue de façon immédiate par des changements évidents à partir de résultats connus, nous nous contenterons de marquer simplement «évident», en référant parfois le lecteur à un travail publié.

Théorème 1: Le théorème de validité de VS.

Pour toute formule bien formée A de $\mathcal{L}$, si $\vdash_{VS} A$ alors $\models A$. La preuve de ce théorème est donnée en montrant (1) que tout axiome de VS est une formule logiquement valide de $\mathcal{L}$ et (2) que les règles d'inférence de VS préservent la propriété d'être une formule logiquement valide.

I.1. L'ensemble des axiomes de VS est un ensemble de formules valides.

I.1.1. Le schéma d'axiomes $A \supset (B \supset A)$ est un schéma de formules valides.

Preuve

Supposons par l'absurde qu'il existe une interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ telle que, pour un $i \in I$, $V(A \supset (B \supset A), i) = F$. Ceci implique, par la clause $V \supset$, que $V(A, i) = T$ et $V((B \supset A), i) = F$, càd que $V(B, i) = V$ et $V(A, i) = F$. Ce qui est absurde. Par

conséquent il n'est pas vrai qu'il existe une interprétation possible dans laquelle la négation d'une instance du schéma d'axiomes 1 est exemplifiable. Donc pour tout A et pour tout B, $\models A \supset (B \supset A)$.

I.1.2. I.1.3. I.1.4. Les schémas d'axiomes 2,3 et 4 sont des schémas de formules valides.

Evident.

I.1.5. Le schéma d'axiomes $(\wedge v)A \supset A_e^v$, où v est une variable individuelle, où e est une expression du même type que v, et où v n'a pas d'occurrence libre dans une sous-formule de A de la forme $(\wedge e)B$, est un schéma de formules valides.

Pour prouver ce théorème, nous démontrerons au préalable les deux lemmes suivants.

Lemme 1: Soit A une formule bien formée et $M = \langle I, D, V \rangle$ et $M' = \langle I', D', V' \rangle$ deux interprétations possibles telles que

- (1) $I = I'$
- (2) $V_v = V'_v$ pour toute variable libre v ayant une occurrence dans A, et
- (3) $V_e = V'_e$ pour tout prédicat, constante individuelle ou connecteur e ayant une occurrence dans A, alors nous avons dans ces conditions que $V_A = V'_A$, c-à-d que pour tout $i \in I$, $V(A, i) = V'(A, i)$.

Preuve.

La preuve se fait par induction sur la longueur de A.

Base: A est une formule atomique. Immédiat.

Etape d'induction: Supposons que le lemme vaut pour toute paire d'interprétations possibles M et M' relativement à toute formule bien formée A dont la longueur est inférieure à m, pour prouver qu'il vaut aussi dans ce cas pour M et M' relativement à toutes les formules de longueur m. Il y a 5 possibilités:

- (1) A est de la forme $\sim B$, où B est une formule dont la longueur est inférieure à m.

Par l'hypothèse d'induction nous avons alors que, pour tout $i \in I$, $V(B, i) = V'(B, i)$. D'où suit immédiatement par la clause $V\sim$ que, pour tout $i \in I$, $V(\sim B, i) = V'(B, i)$, càd que $VA = V'A$.

- (2) A est de la forme $(B \supset C)$, où B et C sont deux formules dont la longueur est inférieure à m. Immédiat.

- (3) A est de la forme LB, où B est une formule dont la longueur est inférieure à m.

Nous avons alors par l'hypothèse d'induction que, pour tout $i \in I$, $V(B, i) = V'(B, i)$. Donc il est vrai dans M que, pour tout $j \in I$, $V(B, j) = T$ ssi il est vrai dans M' que, pour tout $j \in I'$, $V'(B, j) = T$. Ce qui entraîne par la clause VL que, pour tout $i \in I$, $V(LB, i) = V'(LB, i)$.

- (4) A est de la forme $d_n(B_1 \dots B_n)$, où $B_1 \dots B_n$ est une suite de n formules de longueur inférieure à m.

Nous avons alors par l'hypothèse d'induction que, pour tout $i \in I$, $V(B_1, i) = V'(B_1, i), \dots, V(B_n, i) = V'(B_n, i)$.

De plus, par les prémisses du lemme, nous avons que $V_{d_n} = V'_{d_n}$.

Ce qui implique de façon évident que, pour tout $i \in I$, nous aurons que

$$\begin{aligned} \langle \{j/V(B_1, j) = T\}, \dots, \{j/V(B_n, j) = T\} \rangle &\in V_{d_n}(i) \text{ ssi} \\ \langle \{j/V'(B_1, j) = T\}, \dots, \{j/V'(B_n, j) = T\} \rangle &\in V'_{d_n}(i). \end{aligned}$$

- (5) A est de la forme $(\wedge v)B$, où B est une formule de longueur inférieure à m. Supposons que $V((\wedge v)B, i) = T$, pour un $i \in I$, alors clairement par la clause $V(\wedge v)$, il s'ensuit que, pour toute interprétation possible $M'' = \langle I'', D'', V'' \rangle$ qui diffère au plus de M par le fait que $V''_v \neq V_v$, $V''_v(B, i) = T$.

Mais par la définition-même de la relation existant entre les interprétations possibles M et M' décrite dans l'énon-

cé du lemne, si $M'' = \langle I'', D'', V'' \rangle$ est une interprétation possible qui diffère au plus de M par le fait que $V''_v = V_v$ pour une variable v qui n'est pas libre dans A , et si $M''' = \langle I''', D''', V''' \rangle$ est une interprétation possible qui diffère au plus de M' par le fait que $V'''_v \neq V'_v$ pour une variable v qui n'a pas d'occurrence libre dans A , alors M'' et M''' sont deux nouvelles interprétations possibles qui se tiennent elles-mêmes dans la relation décrite dans l'énoncé du lemne.

D'où suit par l'hypothèse d'induction que, s'il est vrai que pour toute interprétation possible $M'', V''(B, i) = T$, alors c'est aussi le cas que pour toute interprétation possible $M''', V'''(B, i) = T$.

Ce qui implique par la clause $V(\wedge v)$ que $V((\wedge v)B, i) = V'((\wedge v)B, i)$.

Lemme 2: Soit A une formule bien formée, v une variable individuelle, e une expression du même type que v telle que v n'a pas d'occurrence libre dans une sous-formule de A de la forme $(\wedge e)B$ et soient $M = \langle I, D, V \rangle$ et $M' = \langle I', D', V' \rangle$ deux interprétations possibles de $\mathcal{L}$.

Si M' diffère au plus de M par le fait que, pour un $i \in I$, V'_v est identique à $\text{Ext}_{eM}(i)$ mais est différent de V_v , alors nous avons que $V'A = VA'_e$, càd que, pour tout $i \in I$, $V'(A, i) = V(A'_e, i)$.

Preuve

La preuve se fait par induction sur la longueur de A .

— Base: A est une formule atomique.

Il est clair que le lemne s'applique si A est une constante propositionnelle. Si A est de la forme $p_n b_1 \dots b_n$ avec $n \geq 1$, alors dans ce cas nous avons, par hypothèse, que $V'_{p_n} = V_{p_n}$ et

$V'_{b_k} = V_{b_k}$ pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$ et b_k est une constante

individuelle ou une variable différente de v .

Supposons maintenant que b_k est identique à v . Alors par l'énoncé-même du lemme $V'_{b_k} = \text{Ext}_{eM}(i)$. Donc pour tout $i \in I$, $\langle \dots, \text{Ext}_{b_{M'}}(i), \dots \rangle$ appartient à $V'_p(i)$ ssi $\langle \dots, \text{Ext}_{eM}(i), \dots \rangle$ appartient à $V_p(i)$ pour chaque k ème place du n -tuple $\langle \text{Ext}_{b_{1M}}(i), \dots, \text{Ext}_{b_{nM}}(i) \rangle$ où $b_k = v$.

D'où suit immédiatement que, pour tout $i \in I$, $V'(A, i) = V(A_e^v, i)$, de telle sorte que $V'A = VA_e^v$.

— Etape d'induction: Supposons que le lemme vaut pour toute paire d'interprétations possibles M et M' relativement à toute formule bien formée A dont la longueur est inférieure à m , et prouvons qu'il vaut aussi dans ce cas pour M et M' relativement à toutes les formules de longueur m .

Il y a cinq possibilités:

- (1) A est de la forme $\sim B$, où B est une formule de longueur inférieure à m . Dans ce cas, $A_e^v = \sim B_e$. Par l'hypothèse d'induction, nous avons alors que $VB_e^v = V'B$. Ce qui implique immédiatement par la clause $V\sim$, que, pour tout i , $V(\sim B_e^v, i) = V'(\sim B, i)$, de telle sorte que $VA_e^v = V'A$.
- (2) A est de la forme $(B \supset C)$, où B et C sont des formules dont la longueur est inférieure à m . Evident.
- (3) A est de la forme LB , où B est une formule dont la longueur est inférieure à m . Dans ce cas $A_e^v = LB_e^v$. Par l'hypothèse d'induction, nous avons alors que, pour tout $j \in I$, $V'(B, j) = T$ dans M' ssi pour tout $j \in I$, $V(B_e^v, j) = T$ dans M .
D'où suit immédiatement par la clause VL que $V'LB = VLB_e^v$.

(4) A est de la forme $d_n(B_1 \dots B_n)$, où $B_1 \dots B_n$ est une suite de n formules de longueur inférieure à m . Immédiat.

(5) A est de la forme $(\wedge v')B$ où B est une formule dont la longueur est inférieure à m . Il y a trois cas à considérer:

- ou bien v n'est pas libre dans A,
- ou bien v est libre dans A et $v' \neq v$,
- ou bien $v' = v$.

a) v n'est pas libre dans A.

Dans ce cas $A_e^v = A$. Cependant dans cette hypothèse M et M' sont deux interprétations possibles qui se tiennent dans la relation décrite dans le lemme I pour la formule A, puisqu'elles diffèrent au plus par le fait que, pour un $i \in I, V_v' = \text{Ext.}_{iM}^e \neq V_v$ pour une variable v qui n'a pas d'occurrence libre dans A. Donc $V'A = VA_e^v$.

b) v est libre dans A et $v' \neq v$.

Dans ce cas $A_e^v = (\wedge v')B_e^v$. Supposons par l'absurde pour un $j \in I$ $V'((\wedge v')B_e, j) \neq V((\wedge v')B_e^v, j)$, par exemple que $V'((\wedge v')B_e, j) = F$ et $V((\wedge v')B_e^v, j) = T$.

Alors clairement par la clause $V(\wedge v)$ il existe une interprétation possible M''' qui diffère au plus de M' par le fait que $V_{v'}''' \neq V_{v'}'$ telle que $V'''(B_e, j) = F$.

D'autre part pour toute interprétation possible M^x qui diffère au plus de M par le fait que $V_{v'}^x \neq V_{v'}$, donc aussi pour l'interprétation M'' définie de telle sorte que $V_{v'}'' = V_{v'}^x$, nous avons que $V^x(B_e^v, j) = T$.

Donc nous concluons que $V'''(B_e, j) \neq V''(B_e^v, j)$.

Cependant ceci contredit l'hypothèse d'induction, car M''' et M'' sont deux interprétations possibles qui se tiennent dans la

relation décrite dans l'énoncé du lemme, puisque par définition elles diffèrent au plus par le fait que $V_v''' = \text{Ext}_{iM''}^e \neq V_v''$ pour une variable v qui n'a pas d'occurrence dans une sous-formule de A de la forme $(\wedge e)B$.

c) $v' = e$

Dans ce cas, par hypothèse, v n'est pas libre dans A .

Ce qui nous ramène au cas a) envisagé plus haut.

I.1.5. Toute instance du schéma d'axiomes 5 est une formule valide.

Preuve

Supposons que M est une interprétation possible de $\mathcal{L}$ telle que, pour un $i \in I$, $V((\wedge v)A, i) = T$. Alors par définition pour toute interprétation possible M' qui diffère au plus de M par le fait que pour une expression e de même type que v .

$V'_v = \text{Ext}_{eM}(i) \neq V_v$, nous avons que $V'(A, i) = T$.

D'où suit immédiatement par le lemme II si v n'a pas d'occurrence libre dans une sous-formule de A de la forme $(\wedge e)B$ que $V(A_e^v, i) = T$.

Corollaire I: Soit $M = \langle I, D, V \rangle$ une interprétation canonique de $\mathcal{L}$, c-à-d une interprétation telle que, pour tout membre u de l'ensemble $\bigcup_{i \in I} D(i)$ et pour tout $i \in I$, il existe une constante individuelle e de $\mathcal{L}$, telle que $V(A_e^v, i) = T$ pour un $i \in I$, alors $V((\wedge v)A, i) = T$ dans M .

Preuve

Supposons que pour toute constante individuelle e , $V(A_e^v, i) = T$.

Alors clairement par le lemme II nous avons que: pour tout e si M' est une interprétation possible qui diffère au plus de M

par le fait que $V'_v = V_e(i) \neq V_v$, $V'(A, i) = V(A_e^v, i) = T$.

D'où nous concluons, puisque, pour tout objet u du domaine de M , il existe une constante individuelle e telle que $V_e(i) = u$ que, pour tout M' qui diffère au plus de M par le fait que $V'_v \neq V_v$, $V'(A, i) = T$ dans M' .

Par conséquent par la clause $V(\wedge v)$, $V((\wedge v)A, i) = T$.

I.1.6. I.1.7. Les schémas d'axiomes 6 et 7 sont des schémas de formules valides. Immédiat.

I.1.8. Le schéma d'axiomes $\sim LA \supset L \sim LA$ est un schéma de formules valides.

Supposons, en effet, par l'absurde qu'il existe une interprétation possible M telle que pour une formule A et un indice $i \in I$ $V(\sim LA, i) = T$ et $V(L \sim LA, i) = F$.

Ceci implique clairement par les clauses $V\sim$ et VL à la fois
 1° qu'il existe un $j \in I$ tel que $V(A, j) = F$ et
 2° qu'il existe un $j \in I$ tel que $V(LA, j) = T$, autrement dit que pour tout $j \in I$ $V(A, j) = T$

— ce qui est clairement contradictoire.

Donc il n'existe pas d'interprétation possible dans laquelle la négation d'une instance du schéma d'axiomes 8 est exemplifiable et par conséquent $\models \sim LA \supset L \sim LA$.

I.1.9. Le schéma d'axiomes 9 est un schéma de formules valides. Pour tout A et pour tout B , $\models L(A \leftrightarrow B) \supset (d_n(A_1 \dots A_n) \supset d_n(B_1 \dots B_n))$ si $B_1 \dots B_n$ est une suite de n formules qui diffère au plus de la suite $A_1 \dots A_n$ par le fait que pour un k tel que $1 \leq k \leq n$, $A_k = A$ et $B_k = B$.

Preuve.

Supposons qu'il existe une interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ telle que pour un $i \in I$, $V(d_n(A_1 \dots A_n), i) = T$ et $V(d_n(B_1 \dots B_n), i) = F$. Alors, par la définition-même des suites $A_1 \dots A_n$ et $B_1 \dots B_n$, nous concluons que $\{j/V(A_k, j)\} \neq \{j/V(B_k, j)\} = T$, vu que par hypothèse, pour tout m , $1 \leq m \leq n$, différent de k $A_m = B_m$ et que $\langle \{j/V(A_1, j) = T\}, \dots, \{j/V(A_n, j) = T\} \rangle$

$\in V_d(i)$ alors que $\langle \{j/V(B_1,j) = T\}, \dots, \{j/V(B_n,j) = \} \rangle \notin V_d(i)$.

Par conséquent, il existe un $j \in I$ tel que $V(A,j) \neq V(B,j)$, càd tel que $V((A \leftrightarrow B),j) = F$.

D'où il s'ensuit immédiatement par la clause VL que, pour tout $j \in I$, $V(L(A \leftrightarrow B),j) = F$.

Donc s'il existe un $i \in I$ tel que $V(L(A \leftrightarrow B),i) = T$ dans M , alors, pour tout $j \in I$, il n'est pas vrai que $V(d_n(A_1 \dots A_n),j) = T$ et que $V(d_n(B_1 \dots B_n),j) = F$, càd il n'est pas vrai que $V((d_n(A_1 \dots A_n) \supset d_n(B_1 \dots B_n)),j) = F$.

I.1.10. L'axiome 10 — $(\wedge x) \sim L \sim Ex$ — est une formule logiquement valide.

Preuve

Supposons par l'absurde qu'il existe une interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ telle que, pour un $i \in I$, $V((\wedge x) \sim L \sim Ex, i) = F$.

Alors clairement par la clause $V(\wedge v)$, il existe une interprétation possible $M' = \langle I', D', V' \rangle$ qui diffère au plus de M par le fait que $V'_x \neq V_x$ pour laquelle $V'(\sim L \sim Ex, i) = F$.

Ce qui implique immédiatement par la clause VL que, pour tout $i \in I'$, $V'(Ex, i) = F$, càd, par la définition-même de V' que, $\langle V'_x \rangle \notin \bigcup_{i \in I} V'_E(i)$.

Ce qui est absurde car par définition nous avons que pour toute interprétation possible $M' = \langle I', D', V' \rangle$ 1° l'ensemble $\bigcup_{i \in I} V'_E(i)$ est égale à $\bigcup_{i \in I} D'(i)$ et 2° V'_x appartient à $\bigcup_{i \in I} D'(i)$.

I.2. Les règles d'inférence de VS préservent la validité.

I.2.1., I.2.2. et I.2.3. Les règles du Modus Ponens, de généralisation et de nécessité préservent la validité.

Evident.

Théorème II: La cohérence de VS.

Il n'est pas vrai que pour toute formule A de $\mathcal{L}$ $\vdash_{VS} A$.

Preuve

Supposons, en effet, que $\vdash_{VS} A$ pour quelque formule A de $\mathcal{L}$.

Alors par le théorème de validité nous concluons que $\models A$, donc que $\{\sim A\}$ n'est pas exemplifiable.

D'où il s'ensuit qu'il n'est pas vrai que $\vdash \sim A$.

Ce qui implique par le théorème de validité qu'il n'est pas vrai que $\vdash_{VS} \sim A$.

Théorème III: Le théorème de la déduction

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{VS} B$ alors $\Gamma \vdash_{VS} A \supset B$.

Preuve.

La preuve se fait par induction sur la longueur m d'une dérivation dans VS de B à partir de $\Gamma \cup \{A\}$.

Elle s'obtient par une modification évidente de la preuve du théorème de la déduction pour le calcul des prédicats en considérant dans l'étape d'induction le cas où B est obtenu par l'application de la règle de nécessité à une formule D qui la précède dans la dérivation.

Alors, par définition, nous savons qu'il existe une colonne q qui est une preuve dans VS de D.

Si à cette colonne q nous ajoutons successivement les formules suivantes: LD (par RL à partir de D), $LD \supset (A \supset LD)$ (Axiome), $(A \supset LD)$ par M.P. à partir des deux formules précédentes, nous obtenons évidemment une dérivation de $(A \supset B)$ à partir de Γ .

Corollaire I: Le théorème de la déduction pour tout extension de VS.

Evident à partir de l'examen-même de la preuve du théorème

de la déduction pour VS et de la définition d'une extension de VS.

Théorème IV: Pour tout ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}$ et pour toute formule $A \in \mathcal{L}$ si $\Gamma \vdash_{VS} A$ alors $\Gamma \models A$.

Preuve.

Supposons que $\Gamma \vdash_{VS} A$.

Alors par définition il existe une dérivation dans VS de A à partir de Γ . Cette dérivation, étant une colonne finie de formules, ne peut comporter qu'un nombre fini de membres de Γ . Donc il existe un sous-ensemble fini, soit $\{A_1, \dots, A_n\}$, de Γ tel que $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{VS} A$.

Par le théorème de la déduction répéter n fois, nous obtenons par conséquent que $\vdash_{VS} (A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset A) \dots))$.

D'où suit immédiatement par le théorème de validité que

$$\models (A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset A) \dots)).$$

Ce qui par la définition-même de la fonction V de toute interprétation possible de $\mathcal{L}$ implique clairement que $\{A_1, \dots, A_n\} \models A$.

Par conséquent, comme $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un sous-ensemble de Γ , $\Gamma \models A$.

Théorème V: Toute instance de substitution d'une formule valide du calcul des prédicats est un théorème de VS.

Pour une preuve de ce théorème, voir A. Church, Introduction to Mathematical Logic, Princeton, New Jersey, Princeton University Press 1956 d'où les axiomes 1-5 et les règles d'inférence 1-2 de VS sont tirés.

Théorème VI: Toute instance de substitution d'une formule valide de S5 est un théorème de VS.

Pour une preuve de ce théorème voir S. Kripke (1959).

Nous utiliserons souvent ces deux théorèmes V et VI comme des règles dérivées d'inférence pour raccourcir les preuves qui suivront.

Théorème VII: Si Δ est un ensemble de formules fermées de VS qui est cohérent alors Δ est simultanément exemplifiable.

Lemme 3: Si Δ est un ensemble cohérent de formules fermées de VS alors il existe un système logique VS^+ qui est une extension cohérente de VS dans laquelle (1) Δ est cohérent et (2) tout ensemble maximal cohérent de formules fermées est également ω -cohérent.

Preuve

3.1. Si VS est cohérent alors le système VS_e obtenu en ajoutant un ensemble dénombrable de nouvelles constantes individuelles à VS est une extension préservative de VS.

Preuve

Supposons que VS_e ne soit pas une extension préservative de VS càd qu'il existe un ensemble ζ de formules de VS qui est cohérent dans VS et incohérent dans VS_e .

Alors clairement, pour un sous-ensemble fini $\{A_1, \dots, A_n\}$ de ζ et pour une formule B de VS_e , il est vrai que $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{VS_n} \sim(B \supset B)$.

Ce qui implique, par le théorème de la déduction pour VS_e (Corollaire I, Théorème III) répété n fois, que $\vdash_{VS_e} A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset \sim(B \supset B)) \dots)$.

Cependant par le théorème V nous avons que

$\vdash_{VS_e} (A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset \sim(B \supset B)) \dots)) \supset \sim(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$, où $A \wedge A'$ est une abréviation pour $\sim(A \supset \sim A')$.

D'où suit immédiatement par la règle du Modus Ponens que

$\vdash_{VS_e} \sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ où $A_1, \dots, A_n \in \zeta$.

Nous concluons donc qu'il existe une preuve dans VS_e de $\sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$. Soit $C_1, \dots, C_m$ cette preuve et soit $\langle c_1, c_2, \dots \rangle$ une énumération des nouvelles constantes de VS_e qui ont une occurrence dans cette preuve.

Soit h une bijection ayant comme domaine l'ensemble des c_i de l'énumération et comme valeur pour chaque c_i une variable $h(c_i)$ de VS qui n'a pas d'occurrence dans cette preuve.

Pour chaque formule $C_k (1 \leq k \leq m)$, soit C'_k la formule de VS qui peut être obtenue en substituant à tout occurrence d'une nouvelle constante une occurrence de son image par h .

Nous allons montrer maintenant que si $C_1, \dots, C_m$ est une preuve dans VS_e de $\sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ alors $C'_1, \dots, C'_m$ est une preuve dans VS de $\sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ et donc que ζ n'est pas un ensemble cohérent de VS .

Ce qui amène comme conclusion que, si ζ est un ensemble cohérent de VS , alors ζ est encore un ensemble cohérent de VS_e .

La preuve se fait par induction sur la longueur m de la preuve de C_m .

— *Base* : $m = 1$ càd C_m est un axiome de VS .

Alors par hypothèse il n'y a pas d'occurrence de nouvelles constantes de VS_e dans C_m de telle sorte que $C_m = C'_m$.

Donc s'il existe une preuve dans VS_e de C_m de longueur 1, alors il existe aussi une preuve dans VS de C_m .

— *Etape d'induction*: Supposons que l'énoncé qui doit être vérifié a été établi dans tous les cas où la longueur de la preuve m est inférieure à un certain nombre m' , et prouvons qu'il vaut aussi dans le cas où $m = m'$.

Cas 1. C_m est obtenu par l'application de M.P. à une paire de formules $C_k C_{k'}$ telles que $k, k' < m$ et $C_k = (C_{k'} \supset C_m)$.

Dans l'hypothèse d'induction nous avons donc que $C'_1, \dots, C'_k$ et $C'_1, \dots, C'_{k'}$ sont deux preuves dans VS respectivement de C'_k et de $C'_{k'}$.

Il est clair que dans ce cas C'_m sera aussi obtenue par l'application de M.P. à C'_k et à $C'_{k'}$ puisque $C'_m = (C'_k \supset C'_{k'})$.

Cas 2. C_m est obtenu par l'application de la règle de généralisation à une formule C_k telle que $k < m$ et $C_m = (\wedge v) C_k$.

Il est clair, dans ce cas, que C'_m sera aussi obtenue par l'application de la règle de généralisation à C'_k puisque $C'_m = (\wedge v) C'_k$.

Cas 3. C_m est obtenu par l'application de la règle de nécessité à une formule C_k telle que $k < m$ et $C_m = LC_k$.

Par l'hypothèse d'induction nous avons donc que $C'_1, \dots, C'_k$ est une preuve dans VS de C'_k .

Il est clair que dans ce cas C'_m sera aussi obtenue par l'application de la règle de nécessité à C'_k puisque $C'_m = LC'_k$.

3.2. Soit $\langle D_1, D_2, D_3, \dots \rangle$ une énumération des formules de VS_c avec exactement une variable libre, et soit $\langle c_1, c_2, c_3, \dots \rangle$ une énumération des constantes individuelles nouvelles de VS_c .

Soit E_1 la formule $(D_{1c_{11}}^{v_1} \supset (\wedge v_1) D_1)$ où v_1 est la variable libre de D_1 et où c_{11} est la première constante de notre énumération qui n'a pas d'occurrence dans D_1 .

Pour chaque nombre entier n , soit E_n la formule $(D_{nc_{in}}^{v_n} \supset (\wedge v_n) D_n)$ de VS_c où v_n est la variable libre de D_n et où c_{in} est la première constante de l'énumération qui n'a pas d'occurrence dans D_n ni dans aucun des $E_1, \dots, E_{n-1}$.

Soit $\langle VS_{e0}, VS_{e1}, VS_{e2}, \dots \rangle$ une série d'extensions de VS ordonnée par la règle récursive suivante:

- (a) $VS_{e0} = VS_e$,
- (b) VS_{en+1} est le système logique qui est obtenu en ajoutant E_{n+1} comme axiome à VS_{en} .

VS^+ est l'extension de VS qui prend comme axiomes propres tous les axiomes de chacun des VS_{ei} .

Nous allons prouver maintenant que VS^+ 1° est une extension de VS dans laquelle Δ est cohérent et 2° dans laquelle tout ensemble maximal-cohérent de formules fermées est aussi ω -cohérent.

(1) VS^+ est une extension préservative de VS.

Pour prouver que VS^+ est une extension cohérente de VS dans laquelle Δ est cohérent, il suffit évidemment de prouver que VS^+ est une extension préservative de VS, car VS est cohérent (Théorème II), et toute extension préservative d'un système cohérent est cohérente par définition.

La preuve de cet énoncé se fait en établissant par induction que chacun des VS_{ei} est une extension préservative de VS.

Base: $VS_{e0} = VS_e$ est une extension préservative de VS par le lemme 3.1.

Etape d'induction: Si VS_{en} est une extension préservative de VS alors c'est aussi le cas pour VS_{en+1} .

Supposons, en effet, qu'il existe un ensemble ζ de $\mathcal{L}$ tel que ζ est un ensemble cohérent de VS_{en} et est un ensemble incohérent de VS_{en+1} .

Alors par un raisonnement identique à celui effectué plus haut dans le lemme 3.1., nous parvenons à la conclusion que pour

un sous-ensemble fini, disons $\{A_1, \dots, A_r\}$, de ζ , il existe une preuve dans VS_{en+1} de $\vdash \sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$.

Soit $B_1, \dots, B_m$ cette preuve dans VS_{en+1} avec $B_m = \sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$; et soit v une variable qui n'a pas d'occurrence dans cette preuve.

Nous pouvons montrer maintenant, en utilisant le même argument que celui présenté plus haut, que $B_{1v}^{c_{in+1}}, \dots, B_{mv}^{c_{in+1}}$ est alors une preuve dans VS_{en} de $B_{mv}^{c_{in+1}} = B_m = \sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$.

La preuve se fait facilement par induction sur le nombre m .

Conclusion: Si $\{A_1, \dots, A_r\}$ est un ensemble incohérent de VS_{en+1} , alors $\{A_1, \dots, A_r\}$ et donc aussi ζ , puisque $\{A_1, \dots, A_r\} \subset \zeta$ sont encore des ensembles incohérents de VS_{en} .

Donc, si VS_{en} est une extension préservative de VS alors c'est aussi le cas pour VS_{en+1} .

Supposons maintenant par l'absurde que VS^+ ne soit pas quant à lui une extension préservative de VS .

Alors clairement par le même raisonnement que celui déjà utilisé par deux fois, nous aboutissons à la conclusion que pour un ensemble fini $\{A_1, \dots, A_r\}$ et cohérent de formules de VS , il existe une preuve dans VS^+ de $\sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$.

Cette preuve étant une séquence finie ne peut évidemment contenir qu'un nombre fini de nouveau axiomes.

Soit E_z le nouvel axiome de cette preuve dont le numéro d'ordre est le plus grand dans la séquence $\langle E_1, E_2, \dots \rangle$.

Il est clair que dans ces conditions il existe aussi une preuve dans VS_{ez} de $\sim (A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$ et donc que $\{A_1, \dots, A_r\}$ est un ensemble incohérent de VS_{ez} .

Ce qui contredit l'énoncé qui a été démontré selon lequel chacun des VS_{ci} est une extension préservative de VS .

Donc VS^+ est bien une extension préservative de VS càd une extension cohérente dans laquelle Δ est cohérent.

(2) Tout ensemble maximal cohérent Γ de formules fermées de VS^+ est aussi un ensemble ω -cohérent.

Soit D une formule de VS^+ avec exactement une variable libre v et soit Γ un ensemble maximal cohérent de formules fermées de VS^+ qui contient une formule de la forme D_e^v pour toute constante individuelle e de VS^+ .

Alors clairement si D est la k ème formule de notre énumération $\langle D_1, D_2, \dots \rangle$ des formules avec exactement une variable libre de VS_c , Γ contient par hypothèse la formule $D_{c_{ik}}^v$ où c_{ik} est la constante propre de l'axiome E_k de VS_{ck} identique à la formule $(D_{c_{ik}}^v \supset (\wedge v)D)$.

D'autre part comme Γ est maximal cohérent, Γ contient aussi cet axiome $E_k = (D_{c_{ik}}^v \supset (\wedge v)D)$.

Ce qui implique immédiatement par le M.P. et le maximale cohérence de Γ que $(\wedge v)D$ appartient à Γ .

Lemme 4: Soit $\langle A_1, A_2, A_3, \dots \rangle$ une énumération des formules fermées de VS^+ et soit $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \rangle$ une séquence ordonnée d'ensembles de formules fermées de VS^+ qui satisfait aux deux conditions suivantes:

- (i) l'origine Γ_0 est l'union des ensembles d'une série formelle $\langle \Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \dots \rangle$ gouvernée par la règle récursive suivante:
— $\Gamma_{00} = \Delta,$

— $\Gamma_{0(n+1)} = \Gamma_{0n} \cup \{A_{n+1}\}$ si A_{n+1} peut être ajoutée avec cohérence à Γ_{0n} . Autrement $\Gamma_{0(n+1)} = \Gamma_{0n}$.

(ii) pour chaque ensemble Γ_i de la séquence et chaque formule fermée A de VS^+ , si $\sim LA$ appartient à Γ_i , alors il existe un Γ_j dans la séquence, tel que $j > i$, qui est l'union des ensembles d'une série formelle $\langle \Gamma_{j0}, \Gamma_{j1}, \dots \rangle$ gouvernée par la règle récursive suivante:

— $\Gamma_{j0} = \{ \sim A \} \cup \{ C/LC \in \Gamma_i \}$

— $\Gamma_{j(n+1)} = \Gamma_{jn} \cup \{A_{n+1}\}$ si A_{n+1} peut être ajoutée avec cohérence à Γ_{jn} . Autrement $\Gamma_{j(n+1)} = \Gamma_{jn}$.

Soit ∇ l'ensemble des termes de $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \dots \rangle$.

Nous allons prouver maintenant que $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \rangle$ est une séquence qui possède les propriétés suivantes:

a) L'origine Γ_0 contient chaque membre de Δ .

(Immédiat par construction.)

b) Pour chaque $\Gamma_i \in \nabla$, Γ_i est un ensemble maximal et ω -cohérent de VS^+ .

c) Pour chaque $\Gamma_i \Gamma_j \in \nabla$, Γ_j est accessible à partir de Γ_i , càd Γ_j comprend $\{A/LA \in \Gamma_i\}$. En abréviation: $\Gamma_i S_L \Gamma_j$.

Preuve

(1) Chaque Γ_i est un ensemble maximal et ω -cohérent.

Comme tout ensemble maximal cohérent de VS^+ est aussi ω -cohérent par le Lemme 3.2, il suffit donc de prouver que chaque $\Gamma_i \in \nabla$ est maximal cohérent.

Ce qui se démontre facilement par induction sur le nombre k .

Base: Γ_0 est maximal cohérent.

1.0. Γ_0 est cohérent.

En effet, $\Gamma_{00} = \Delta$ est un ensemble cohérent de VS^+ par le lemme 3. et $\Gamma_{0(n+1)}$ est cohérent dans VS^+ si Γ_{0n} l'est par construction-même de la série formelle $\langle \Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \dots \rangle$.

1.1. Γ_0 est maximal cohérent.

Supposons qu'il existe une formule fermée A qui n'est pas membre de Γ_0 . Soit A la n ième formule dans notre énumération. Alors par définition $\Gamma_{0(n-1)} \cup \{A\}$ est incohérent.

Donc pour toute formule B il est vrai que $\Gamma_{0(n-1)} \cup \{A\} \vdash_{VS+} B$.

Comme $\Gamma_{0(n-1)}$ est inclus dans Γ_0 , nous concluons donc que pour toute formule B , $\Gamma_0 \cup \{A\} \vdash_{VS+} B$.

Par conséquent, si A n'est pas membre de Γ_0 , alors $\Gamma_0 \cup \{A\}$ est incohérent.

Donc pour toute formule fermée A , ou bien A est membre de Γ_0 , ou bien A ne peut pas être ajoutée avec cohérence à Γ_0 .

Etape d'induction: Si $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ sont maximaux cohérents alors Γ_{n+1} est aussi maximal cohérent.

2.0. Γ_{n+1} est cohérent.

En effet, $\Gamma_{(n+1)0}$ est un ensemble cohérent de VS^+ , car $\Gamma_{(n+1)0}$ est tel, par la définition-même de la séquence $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \dots \rangle$, que, pour un ensemble $\Gamma_i \in \Gamma$ avec $i \leq n$, $\Gamma_{(n+1)0}$ contient une formule $\sim A$, telle que $\sim LA \in \Gamma_i$ ainsi que l'ensemble des C qui sont telles que $LC \in \Gamma_i$.

Or, à supposer que $\Gamma_{(n+1)0}$ soit incohérent alors cela signifierait qu'il existe un sous-ensemble fini de $\Gamma_{(n+1)0}$ de la forme $\{\sim A, C_1, \dots, C_m\}$ tel que, pour une formule B , $\{\sim A, C_1, \dots, C_m\} \vdash_{VS+} B$ et $\{\sim A, C_1, \dots, C_m\} \vdash_{VS+} \sim B$.

Ce qui implique clairement par le théorème V que $\vdash_{VS+} (C_1 \supset (\dots \supset (C_m \supset A)) \dots$

Or, ceci implique en retour par la règle de nécessité que $\vdash_{VS+} L(C_1 \supset (\dots \supset (C_m \supset A)) \dots)$. D'où par le schéma d'axiomes 7, nous concluons que $\vdash_{VS+} (LC_1 \supset (\dots \supset (LC_m \supset LA)) \dots)$ càd que $\{LC_1, \dots, LC_m, \sim LA\}$ est incohérent.

Ce qui contredit l'hypothèse d'induction suivant laquelle Γ_i , qui comprend par définition $\{LC_1, \dots, LC_m, \sim LA\}$ est cohérent.

Donc, si Γ_i est cohérent ($i < n$), alors $\Gamma_{(n+1)0}$ est également cohérent.

D'autre part, par la définition-même de la série formelle

$\langle \Gamma_{(n+1)0}, \Gamma_{(n+1)1}, \Gamma_{(n+1)2}, \dots \rangle$, $\Gamma_{(n+1)(n'+1)}$ est cohérent dans VS^+ si $\Gamma_{(n+1)n'}$ l'est.

2.1. $\Gamma_{(n+1)}$ est maximal cohérent.

Preuve exactement similaire à celle donnée en 1.1. pour établir la maximale cohérence de Γ_0 .

(2) Pour tout Γ_i et pour tout $\Gamma_j \in \nabla$, Γ_j est accessible à partir de Γ_i .

La preuve de ce théorème qui dit que, pour toute formule A et pour tout ensemble $\Gamma_i \in \nabla$, si $LA \in \Gamma_i$, alors, pour tout $\Gamma_j \in \Gamma$, $A \in \Gamma_j$, se fait par induction croisée sur les nombres i et j .

Base: $i = 0$.

Pour toute formule A , si $LA \in \Gamma_0$, alors, pour tout $\Gamma_j \in \Gamma$, $A \in \Gamma_j$.

— Si $j = 0$, alors par le schéma d'axiomes 5 il est clair que $LA \in \Gamma_0$ implique que $A \in \Gamma_0$, puisque Γ_0 est cohérent (1.0.).

Nous appliquons ensuite l'hypothèse d'induction relative à j , c'est-à-dire nous supposons qu'il a été démontré pour tout A que, si $LA \in \Gamma_0$, alors pour tout $\Gamma_j \in \Gamma$ tel que $j \leq k$, $A \in \Gamma_j$, pour prouver que dans ce cas il est vrai aussi que $A \in \Gamma_{k+1}$.

Supposons, en effet, que $A \notin \Gamma_{k+1}$. Alors par la maximale cohérence de cet ensemble nous concluons que $\sim A \in \Gamma_{k+1}$.

Donc, pour l'ensemble $\Gamma_{j'} \in \nabla$ ($j' \leq k$) qui est tel que pour un $\sim LB$ appartenant à cet ensemble $\Gamma_{k+1(0)} = \{ \sim B \} \cup \{ C/LC \in \Gamma_{j'} \}$ nous avons que $LA \notin \Gamma_{j'}$ sinon Γ_{k+1} serait incohérent. Ce qui implique par l'hypothèse d'induction, puisque $j' \leq k$, que $LLA \notin \Gamma_0$.

Donc, $\sim LLA \in \Gamma_0$.

Cependant par le schéma de théorèmes bien connu de S_5 :
 $\vdash_{VS} (LLA \leftrightarrow LA)$, ceci nous force à conclure que $LA \notin \Gamma_0$.

Donc si $LA \in \Gamma_0$ alors $A \in \Gamma_{k+1}$.

Etape d'induction: Supposons que le théorème a été vérifié pour tous les $\Gamma_i \in \nabla$ qui sont tels que $i < n$, et prouvons qu'il vaut encore pour Γ_i quand $i = n$.

Soit maintenant A une formule fermée telle que $LA \in \Gamma_n$.

Il est clair que si $LA \in \Gamma_n$ alors il n'est pas vrai que, pour tout $i < n$, $L \sim LA \in \Gamma_i$, car autrement Γ_n devrait contenir $\sim LA$, et serait incohérent.

Cependant, si pour un $i < n$ il n'est pas vrai que $L \sim LA \in \Gamma_i$, alors $\sim L \sim LA \in \Gamma_i$, par la maximale cohérence de cet ensemble.

Or, par le schéma d'axiomes 8, nous avons que
 $\vdash_{VS} \sim LA \supset L \sim LA$.

Ce qui implique clairement par contraposition, si Γ_i est cohérent, que $LA \in \Gamma_i$.

Cependant alors il suit de l'hypothèse d'induction, puisque $i < n$, et que $LA \in \Gamma_i$, que, pour tout $\Gamma_j \in \nabla$, $A \in \Gamma_j$.

Donc si $LA \in \Gamma_n$, alors pour tout $\Gamma_j \in \nabla$, $A \in \Gamma_j$.

Th. VII: Δ est un ensemble cohérent de formules fermées de VS^+ qui est simultanément exemplifiable.

Soit $M = \langle I, D, V \rangle$ l'interprétation possible suivante:

(1) I est un ensemble, noté $\{i_0, i_1, i_2, \dots\}$, de même cardinalité que l'ensemble ∇ tel que, pour tout $\Gamma_k \in \nabla$, il existe un et un seul $i \in I$ associé à Γ_k , à savoir i_k .

(2) D est une fonction, dont le domaine est I , telle que si

$i_k \in I$ alors $D(i_k)$ est l'ensemble des constantes individuelles e de VS^+ qui sont telles que $Ee \in \Gamma_k$.

$\bigcup_{i \in I} D(i)$, le domaine de M est donc l'ensemble dénombrable des constantes individuelles de VS^+ , comme cela apparaît à partir des considérations suivantes:

Supposons qu'il existe une constante individuelle e de VS^+ telle que pour tout $\Gamma_k \in \nabla$, il n'est pas vrai que $Ee \in \Gamma_k$.

Alors clairement par la maximale cohérence des membres de ∇ , il s'ensuit que, pour tout $\Gamma_k \in \nabla$, $\sim Ee \in \Gamma_k$.

Ce qui implique immédiatement par la clause (ii) de la définition-même de $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \rangle$ que, pour tout $\Gamma_k \in \nabla$, $L \sim Ee \in \Gamma_k$.

Or, nous avons par un schéma de théorèmes bien connu du calcul des prédicats que $\vdash_{VS^+} L \sim Ee \supset \sim (\wedge x) \sim L \sim Ex$.

Donc, pour tout $\Gamma_k \in \nabla$, il s'ensuit que $\sim (\wedge x) \sim L \sim Ex \in \Gamma_k$. Ce qui contredit la preuve de la cohérence des membres de ∇ , puisque chacun d'eux par définition doit aussi contenir l'axiome de VS $(\wedge x) \sim L \sim Ex$. Donc pour toute constante individuelle e de VS^+ il existe au moins un $\Gamma_k \in \nabla$ tel que $Ee \in \Gamma_k$.

Donc par la définition-même de $D(i_k)$, pour toute constante individuelle e de VS^+ , il existe un $i_k \in I$ tel que $e \in D(i_k)$.

(3) V est une fonction qui satisfait aux conditions suivantes:

- Si e est une constante individuelle, alors V_e est une fonction de I dans $\{e\}$.
- Si v est une variable individuelle, alors V_v est un membre de $\bigcup_{i \in I} D(i)$.
- Si p_n est un prédicat n -aire, alors $V_{p_n}(i_k) = \{ \langle e_1, \dots, e_n \rangle / e_1 \in \bigcup_{i \in I} D(i) \dots e_n \in \bigcup_{i \in I} D(i) \text{ et } p_n e_1 \dots e_n \in \Gamma_k \}$.

— Si d_n est un connecteur de degré n , alors V_{d_n} est une fonction dont le domaine est I , qui est définissable comme suit: Soit $\mathcal{L}(VS^+)$ l'ensemble des formules fermées de VS^+ et soit $s_n(\mathcal{L}(VS^+))$ une énumération de l'ensemble des n -tuples $\langle A_{i1}, \dots, A_{in} \rangle$ tels que $A_{i1} \in (\mathcal{L}(VS^+))_1, \dots, A_{in} \in (\mathcal{L}(VS^+))_n$.

Pour chaque m , si $\tau_m = \langle A_{m1}, \dots, A_{mn} \rangle$ est le m -ième n -tuple de $s_n(\mathcal{L}(VS^+))$, alors $S_{d_n \tau_m}$ est une relation sur $\nabla x(\mathcal{P}\nabla)^n$ satisfaisant aux conditions suivantes:

pour chaque $\Gamma_k \in \nabla$

(i) $\Gamma_k S_{d_n \tau_m} \langle \{\Gamma_j/A_{m1} \in \Gamma_j\}, \dots, \{\Gamma_j/A_{mn} \in \Gamma_j\} \rangle$ si $d_n(A_{m1} \dots$

$A_{mn}) \in \Gamma_k$ et autrement,

(ii) pour tout $\Phi \in (\mathcal{P}\nabla)^n$, il n'est pas vrai que $\Gamma_k S_{d_n \tau_m} \Phi$.

V_{d_n} maintenant est une fonction telle que pour une relation binaire R sur $I \times (\mathcal{P}I)^n$ s'appliquant à un indice $i_k \in I$ et à $\langle J_1, \dots, J_n \rangle \in (\mathcal{P}I)^n$ ssi il existe un m tel que $\Gamma_k S_{d_n \tau_m} \langle \{\Gamma_j/j \in J_1\}, \dots, \{\Gamma_j/j \in J_n\} \rangle$, $V_{d_n}(i_k) = \{ \langle J_1, \dots, J_n \rangle / i_k R_{d_n} \langle J_1, \dots, J_n \rangle \}$.

Nous allons prouver maintenant l'énoncé que pour tout indice $i_k \in I$ et pour toute formule fermée A de VS^+ , $V(A, i_k) = T$ dans M ssi $A \in \Gamma_k$.

Autrement dit nous allons démontrer que M est une interprétation possible qui est telle que tous les ensembles maximaux cohérents de ∇ et donc aussi Δ , puisque $\Delta \subset \Gamma_0$ sont simultanément exemplifiables dans M .

Preuve

La preuve se fait par induction sur la longueur de A .

Base: $m = 0$.

Il y a deux cas à considérer:

Cas 1. A est un symbole propositionnel. Evident.

Cas 2. A est de la forme $p_n e_1 \dots e_n$, où $e_1, \dots, e_n$ sont des constantes individuelles et où $n > 1$.

Il est clair que, par les définitions-mêmes de V_{p_n} et de $V_{e_1}, \dots, V_{e_n}$ dans M, nous avons que $\langle \text{Ext}_{e_1 M}(i_k), \dots, \text{Ext}_{e_n M}(i_k) \rangle \in V_{p_n}(i_k)$ ssi $p_n e_1 \dots e_n \in \Gamma_k$.

Etape d'induction: Supposons que l'énoncé à vérifier a été établi pour toutes les formules fermées de VS^+ dont la longueur est inférieure à m, et prouvons qu'il vaut encore dans ce cas pour toutes les formules fermées de VS^+ de longueur m.

Il y a cinq cas à considérer:

Cas 1. A est $\sim B$ où B est une formule de longueur inférieure à m.

— Supposons que, pour un $i_k \in I$, $V(\sim B, i_k) = T$. Alors clairement, par la clause $V \sim, V(B, i_k) = F$. D'où suit par l'hypothèse d'induction que $B \notin \Gamma_k$. Donc si $V(\sim B, i_k) = T$, alors $\sim B \in \Gamma_k$.

— Supposons d'autre part que, pour un $\Gamma_k \in \Gamma$, $\sim B \in \Gamma_k$. Alors clairement par la cohérence de Γ_k , $B \notin \Gamma_k$. Ce qui implique par l'hypothèse d'induction que $V(B, i_k) = F$ et donc par la clause $V \sim$ que $V(\sim B, i_k) = T$.

Cas 2. A est $(B \supset C)$ où B et C sont deux formules fermées de longueur inférieure à m. Immédiat.

Cas 3. A est LB, où B est une formule de longueur inférieure à m.

— Supposons que pour un $i_k \in I$, $V(LB, i_k) = T$. Alors claire-

ment, par la clause VL, nous avons que, pour tout $j \in I$, $V(B, j) = T$. Ce qui implique par l'hypothèse d'induction que, pour tout $\Gamma_j \in \nabla$, $B \in \Gamma_j$.

D'où suit immédiatement que $LB \in \Gamma_k$, car autrement si $LB \notin \Gamma_k$, alors $\sim LB$ appartiendrait à Γ_k , vu la maximale cohérence de cet ensemble, et il devrait exister par la clause (ii) de la définition de $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \dots \rangle$ un $\Gamma_j \in \nabla$ tel que $\sim B \in \Gamma_j$, càd tel que $B \notin \Gamma_j$.

— Supposons d'autre part que, pour un $\Gamma_k \in \nabla$, $LB \in \Gamma_k$. Alors clairement pour tout $\Gamma_j \in \nabla$ nous avons que $B \in \Gamma_j$ par le lemme 4.

Ce qui implique par l'hypothèse d'induction que, pour tout $j \in I$, $V(B, j) = T$, autrement dit que $V(LB, i_k) = T$ étant donné la clause VL.

Cas 4. A est $d_n(B_1 \dots B_n)$ où la longueur de $B_1 \dots B_n$ est inférieure à m .

— Supposons que, pour un $\Gamma_k \in \nabla$, $d_n(B_1 \dots B_n) \in \Gamma_k$. Alors clairement pour le nombre q tel que $\langle B_1, \dots, B_n \rangle$ est le q ème terme τ_q de $s_n(\mathcal{L}(VS^+))$, nous avons que $\Gamma_k S_{d_n \tau_q} \langle \{ \Gamma_j / B_1 \in \Gamma_j \}, \dots, \{ \Gamma_j / B_n \in \Gamma_j \} \rangle$, étant donné la définition-même de la relation $S_{d_n \tau_q}$.

D'où suit, par l'hypothèse d'induction et la définition de la relation R_{d_n} , que $i_k R_{d_n} \langle \{ j / V(B_1, j) = T \}, \dots, \{ j / V(B_n, j) = T \} \rangle$, et donc que $V(d_n B_1 \dots B_n) = T$, puisque dans ce cas évidemment $\langle \{ j / V(B_1, j) = T \}, \dots, \{ j / V(B_n, j) = T \} \rangle \in V_{d_n}(i_k)$.

— Supposons d'autre part que, pour un $\Gamma_k \in \nabla$, $d_n(B_1 \dots B_n) \notin \Gamma_k$. $\{ \Gamma_j / B_n \in \Gamma_j \} \rangle$.

Alors clairement, par la définition-même de la relation fonctionnelle $S_{d_n \tau_q}$, il n'est pas vrai que $\Gamma_k S_{d_n \tau_q} \langle \{ \Gamma_j / B_1 \in \Gamma_j \}, \dots, \{ \Gamma_j / B_n \in \Gamma_j \} \rangle$.

Supposons maintenant qu'il existe un q' tel que $\tau_{q'} = \langle B'_1, \dots, B'_n \rangle$ et $\Gamma_k S_{d_n \tau_{q'}} \langle \{\Gamma_j/B_1 \in \Gamma_j\}, \dots, \{\Gamma_j/B_n \in \Gamma_j\} \rangle$.

Alors, par la définition de la relation $S_{d_n \tau_{q'}}$, nous savons que $d_n(B'_1 \dots B'_n) \in \Gamma_k$.

Cependant, si $d_n(B'_1 \dots B'_n) \in \Gamma_k$, cela signifie que $\{\Gamma_j/B'_1 \in \Gamma_j\} = \{\Gamma_j/B_1 \in \Gamma_j\}, \dots, \{\Gamma_j/B'_n \in \Gamma_j\} = \{\Gamma_j/B_n \in \Gamma_j\}$.

Par conséquent, pour tout $\Gamma_j \in \nabla$, $L(B'_1 \leftrightarrow B_1) \in \Gamma_j, \dots, L(B'_n \leftrightarrow B_n) \in \Gamma_j$.

Ce qui implique clairement par le schéma d'axiomes 9 de VS, que, pour tout $\Gamma_j \in \nabla$, $d_n(B'_1 \dots B'_n) \leftrightarrow d_n(B_1 \dots B_n) \in \Gamma_j$.

Donc si $d_n(B_1 \dots B_n) \notin \Gamma_k$, alors $d_n(B'_1 \dots B'_n) \notin \Gamma_k$.

Ce qui contredit l'hypothèse qu'il existe un q' tel que $\tau_{q'} = \langle B'_1, \dots, B'_n \rangle$ et $\Gamma_k S_{d_n \tau_{q'}} \langle \{\Gamma_j/B_1 \in \Gamma_j\}, \dots, \{\Gamma_j/B_n \in \Gamma_j\} \rangle$.

Ce qui a pour conséquence immédiate, par la définition de la relation R_{d_n} et l'hypothèse d'induction, qu'il n'est pas vrai

que $i_k R_{d_n} \langle \{j/V(B_1, j) = T\}, \dots, \{j/V(B_n, j) = T\} \rangle$ et donc que $V(d_n(B_1, \dots, B_n, i)) = F$.

Cas 5. A est $(\wedge v)B$, où B est une formule dont la longueur est inférieure à m.

Il y a deux possibilités: ou bien B est une formule fermée, ou bien B est une formule ouverte dont v est la seule variable libre.

— B est une formule fermée.

. Supposons que, pour un $i_k \in I$, $V((\wedge v)B, i_k) = T$. Alors par la clause $V(\wedge v)$, $V(B, i_k) = T$. Donc par l'hypothèse d'induction nous avons que $B \in \Gamma_k$. D'où il s'ensuit, par le schéma de théorèmes: $\vdash_{VS^+} B \supset (\wedge v)B$, si v n'a pas d'occurrence libre dans B , que $(\wedge v)B$ appartient aussi à Γ_k .

. Supposons d'autre part que, pour un $\Gamma_k \in \nabla$, $(\wedge v)B \in \Gamma_k$. Alors B appartient aussi à Γ_k par le schéma d'axiomes 5 de VS .

Ce qui implique par l'hypothèse d'induction que $V(B, i_k) = T$. Cependant si B est fermée, nous avons que $\{B\} \models (\wedge v)B$. D'où nous concluons que $V((\wedge v)B, i_k) = T$.

— B est une formule ouverte.

Comme A est fermée, la seule variable libre de B est v .

. Supposons que pour un $\Gamma_k \in \nabla$, $(\wedge v)B \in \Gamma_k$. Alors par le schéma d'ax. 5 pour toute constante individuelle e de VS^+ , toute formule de la forme B_e^v appartient aussi à Γ_k . Donc par l'hypothèse d'induction nous avons que pour tout e , $V(B_e^v, i_k) = T$. Maintenant, pour tout objet u de $\bigcup_{i \in I} D(i)$, il est vrai qu'il existe une constante individuelle e telle que $V(e, i_k) = u$, puisque le domaine de M est l'ensemble des constantes individuelles de VS^+ , et que $V(e, i_k) = e$ pour toute constante individuelle e . Donc M est une interprétation canonique. Par conséquent, par l'application du corollaire I du théorème I.1.5. nous concluons que $V((\wedge v)B, i_k) = T$.

. Supposons d'autre part que, pour un $i_k \in I$, $V((\wedge v)B, i_k) = T$. Alors par la validité de toute instance de substitution du schéma d'axiomes 5 de VS (I.1.5.), nous avons que, pour toute constante individuelle e de VS^+ , $V(B_e^v, i_k) = T$. Ce qui implique par l'hypothèse d'induction que, pour tout e , $B_e^v \in \Gamma_k$. D'où suit immédiatement par la ω -cohérence de Γ_k que Γ_k contient également $(\wedge v)B$.

Corollaire I: La complétude de VS.

Pour toute formule A de $\mathcal{L}$, si $\models A$, alors $\vdash_{VS} A$.

Preuve

Il y a deux cas à distinguer: ou bien A est une formule fermée de $\mathcal{L}$ ou bien A contient des variables libres.

Cas 1. A est une formule fermée.

Supposons qu'il n'est pas vrai que $\vdash_{VS} A$. Alors $\{\sim A\}$ est un ensemble cohérent de VS par hypothèse.

Donc $\{\sim A\}$ est exemplifiable par le théorème VI. Ainsi il n'est pas vrai que A est valide. D'où nous concluons par contradiction que si $\models A$ alors $\vdash_{VS} A$.

Cas 2. A est une formule ouverte.

Supposons que A est valide. Alors comme la règle de généralisation préserve la validité (I.2.5.), nous avons que $\models (\wedge v_1) \dots (\wedge v_n) A$, où $v_1, \dots, v_n$ sont toutes les variables libres de A . Etant donné que $(\wedge v_1) \dots (\wedge v_n) A$ est une formule fermée, nous pouvons donc conclure en vertu du résultat obtenu dans le cas 1 précédent que $\vdash_{VS} (\wedge v_1) \dots (\wedge v_n) A$. Cependant nous avons par le schéma d'axiomes 5 que $\vdash_{VS} ((\wedge v_1) \dots (\wedge v_n) A \supset A)$. D'où il s'ensuit immédiatement par M.P. que $\vdash_{VS} A$.

Théorème VII: La complétude forte de VS.

Pour tout ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}$ et pour toute formule $A \in \mathcal{L}$, si $\Gamma \models A$, alors $\Gamma \vdash_{VS} A$.

Lemme 5

Si B est une formule de VS et $\vdash_{VS} B_e^v$, où e est une constante individuelle qui n'a pas d'occurrence dans B , alors $\vdash_{VS} B$.

Preuve

Supposons, en effet, que $\vdash_{VS} B_e^v$. Alors il existe une preuve

dans VS de B_e^v . Soit $B_1, \dots, B_m$ cette preuve de VS, et soit $B'_1, \dots, B'_m$ la séquence de formules de VS qui peut être obtenue à partir de cette preuve en substituant à toute occurrence de e dans un B_k ($1 \leq k \leq m$) de la preuve, une variable individuelle v' n'ayant pas d'occurrence dans cette preuve.

Il est facile de prouver par le même type d'arguments que celui déjà présenté dans le lemme 3 que $B'_1, \dots, B'_m$ est une preuve dans VS $B'_m = (B_e^v)_{v'}^e$. D'où l'on obtient en généralisant sur v' que $\vdash_{VS} (\wedge v') B$.

Ce qui implique clairement par le schéma d'axiomes 5 que $\vdash_{VS} B$.

Th. VII. Si $\Gamma \models A$, alors $\Gamma \vdash_{VS} A$.

Supposons, en effet, qu'il n'est pas vrai que $\Gamma \vdash_{VS} A$. Alors clairement $\Gamma \cup \{ \sim A \}$ est un ensemble cohérent de formules de VS. Soit $\Delta = \Gamma \cup \{ \sim A \}$.

Si $v_1, \dots, v_k, \dots$ représentent toutes les variables qui ont une occurrence libre dans un membre de Δ , soit Δ' l'ensemble des formules fermées de VS qui peut être obtenu à partir de Δ en substituant les nouvelles constantes $c_1, \dots, c_k, \dots$ à toutes les occurrences libres de ces variables — différentes constantes étant substituées à différentes variables.

Il est facile de montrer que Δ' est un ensemble cohérent de VS. A supposer, en effet, que Δ' soit incohérent dans VS, alors il existerait une constante propositionnelle p_0 de VS telle que, pour un ensemble fini $\{A_1, \dots, A_n\}$ de Δ' , nous aurions que $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{VS} p_0$ et $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{VS} \sim p_0$.

Ce qui implique par le théorème de la déduction répété n fois que $\vdash_{VS} (A_1 \supset (\dots \supset (A_n \supset p_0) \dots))$ et que $\vdash_{VS} (A'_1 \supset (\dots \supset (A'_n \supset \sim p_0) \dots))$.

D'où il s'ensuit par le lemme 5 ci-dessus que $\vdash_{VS}(A'_1 \supset (\dots \supset (A'_n \supset p_0) \dots))$ et que $\vdash_{VS}(A'_1 \supset (\dots \supset (A'_n \supset \sim p_0) \dots))$, où, pour chaque A_k ($1 \leq k \leq m$), A'_k est la formule de $\mathcal{L}$ à partir de laquelle A_k a été obtenue par les substitutions indiquées plus haut.

Conclusion: Il existe un ensemble fini $\{A'_1, \dots, A'_n\}$ inclus dans Δ qui est incohérent dans VS, et donc Δ est incohérent dans VS. Par conséquent, si Δ est cohérent dans VS alors Δ' est cohérent dans VS.

Comme Δ' est un ensemble de formules fermées de VS, ceci implique par le théorème VII que Δ' est simultanément exemplifiable dans une interprétation possible. Soit $M = \langle I, D, V \rangle$ cette interprétation possible dans laquelle Δ' est simultanément exemplifiable, et soit $i \in I$ l'indice relativement auquel nous avons, pour tout $D \in \Delta'$, que $V(D, i) = T$.

Par définition, tout membre D de Δ' est de la forme $D' \begin{smallmatrix} v_1 \dots v_k \dots \\ c_1 \dots c_k \dots \end{smallmatrix}$

où D' est la formule à partir de laquelle D a été obtenue par les substitutions indiquées plus haut.

Soit maintenant $M' = \langle I', D', V' \rangle$ l'interprétation possible qui diffère au plus de M par le fait que, pour tout variable v appartenant à $\{v_1, \dots, v_k, \dots\}$, $V_v = V_c(i)$, où c est la constante nouvelle qui a été substituée à toutes les occurrences libres de v dans les membres de Δ pour obtenir Δ' .

Par le lemme 2 répété autant de fois qu'il y a de variables libres dans Δ , il est clair que nous obtenons une interprétation possible dans laquelle, pour tout $D' \in \Delta$, $V'(D', i) = T$. Donc $\Delta = \Gamma u \{ \sim A \}$ est simultanément exemplifiable dans M' . Par conséquent il n'est pas vrai que $\Gamma \models A$.

Conclusion: Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash_{VS} A$.

Corollaire I. Le théorème de Löwenheim-Skolem

Si un ensemble de formules Γ de $\mathcal{L}$ est simultanément exemplifiable, alors il est simultanément exemplifiable dans une interprétation possible ayant un domaine dénombrable.

Preuve

Si Γ est simultanément exemplifiable, alors Γ est un ensemble cohérent de VS.

En effet, à supposer le contraire, il devrait exister un sous-ensemble fini de Γ qui soit tel que, pour une formule B de $\mathcal{L}$, $\zeta \vdash_{VS} B$ et $\zeta \vdash_{VS} \sim B$ càd, vu le théorème IV, qui soit tel que $\zeta \models_{VS} B$ et $\zeta \models_{VS} \sim B$.

Ce qui est impossible, car ceci signifie que, dans toute interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ où ζ est simultanément exemplifiable, il existerait un indice $i \in I$ tel que $V(B, i) = V(\sim B, i) = T$.

Conclusion: ζ est une ensemble cohérent de VS.

Par conséquent, il s'ensuit par le théorème VII que ζ est simultanément exemplifiable dans une interprétation possible dont le domaine est une ensemble dénombrable de constantes individuelles.

Corollaire II. Si un ensemble Γ de formules du langage pragmatique $\mathcal{L}$ est simultanément exemplifiable, alors il est simultanément exemplifiable dans une interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ ayant un ensemble d'indices I dénombrable.

Preuve

Si Γ est simultanément exemplifiable, alors par un raisonnement exactement similaire à celui donné pour le corollaire I, Γ est cohérent dans VS, et si Γ est cohérent alors, par le théorème VII, Γ est simultanément exemplifiable dans une

interprétation possible $M = \langle I, D, V \rangle$ qui est telle que $I = \mathcal{N}_0$, car la séquence $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ du Lemme 4 est une séquence dénombrable d'ensembles maximaux cohérents, étant donné la clause (ii) de sa définition et le fait qu'il existe dans Γ_0 un ensemble dénombrable de formules de la forme $\sim LA$. Or, I par définition est un ensemble de même cardinalité que l'ensemble des termes de cette séquence.

Corollaire III. Le théorème de compacité

Un ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}$ est simultanément exemplifiable ssi tout sous-ensemble fini de Γ est simultanément exemplifiable.

Preuve.

Le théorème est trivial dans un sens: par définition, en effet, si Γ est simultanément exemplifiable, alors tout sous-ensemble fini de Γ l'est aussi.

Supposons maintenant que Γ ne soit pas simultanément exemplifiable. Alors Γ est un ensemble incohérent de VS par le théorème VII.

Par conséquent, il existe un sous-ensemble fini ζ de Γ qui est tel que pour une formule B de $\mathcal{L}$, $\zeta \vdash_{VS} B$ et $\zeta \vdash_{VS} \sim B$.

Ce qui implique immédiatement par le théorème IV que $\zeta \models B$ et $\zeta \models \sim B$ càd que ζ n'est pas simultanément exemplifiable.

Donc, si tout sous-ensemble fini de Γ est simultanément exemplifiable alors Γ est aussi simultanément exemplifiable.

Corollaire IV. Le théorème de finitude.

Pour tout ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}$ et pour toute formule $A \in \mathcal{L}$, $\Gamma \models A$ ssi il existe un sous-ensemble fini ζ de Γ qui est tel que $\zeta \models A$.

Preuve.

Immédiat à partir de l'équivalence entre les relations « $\models$ » et « $\vdash_{VS}$ » engendrée par les théorèmes IV et VII et la définition-même de la relation « $\vdash_{VS}$ » qui a été donnée plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

- E. BENVÉNISTE. Extrait de *For Roman Jakobson*, Mouton & Co, La Haye, 1956.
- A. CHURCH. *Introduction to Mathematical Logic*, Volume I, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.
- L. HENKIN. The Completeness of the First-Order Functional Calculus, *Journal of Symbolic Logic*, Volume 14, 1949, p. 159-66.
- R. JAKOBSON. Les catégories verbales. *Cahiers Ferdinand de Saussure*, 1950, IX, 6.
- S. KRIPKE. A Completeness Theorem in Modal Logic, *The Journal of Symbolic Logic*, 1959, p. 1-13.
- R. MONTAGUE. Pragmatics. Extrait de *Contemporary Philosophy* — La Philosophie Contemporaine (édité par R. KLIBANSKY), La Nuova Italia Editrice, Florence 1968.
- , Pragmatics and Intensional Logic. Extrait de *Semantics of Natural Language*, (édité par D. DAVIDSON et G. HARMAN), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1972.
- D. SCOTT. Advice on Modal Logic. Extrait de *Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments*, (édité par K. LAMBERT), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1970.

NOTES

(¹) Toute occurrence de la variable v dans une formule de la forme $(\wedge v)A$ sera dite *liée*.

Une occurrence d'une variable qui n'est pas liée sera dite *libre*. Une formule de $\mathcal{L}$ est *fermée (ouverte)* suivant que toutes les occurrences des variables qu'elle contient sont (ne sont pas) liées.

(2) Pour une définition de la notion de connecteur logique qui s'applique au foncteur modal de nécessité universelle, voir D. Scott (1970) p. 161.

(3) Un connecteur n -aire d_n d'un langage Q est *extensionnel* ssi l'extension de toute formule de la forme $d_n(A_1 \dots A_n)$ reste inchangée quand on substitue à un (ou plusieurs) A_i ($1 \leq i \leq n$) des formules de même extension. Pour tout connecteur extensionnel est donc valide la loi: $(A \leftrightarrow B) \supset (d_n(A_1 \dots A_n) \supset d_n(B_1 \dots B_n))$ où $B_1 \dots B_n$ est une suite de n formules de Q qui diffère au plus de la suite $A_1 \dots A_n$ par le fait que pour un k tel que $1 \leq k \leq n$, $A_k = A$ mais $B_k = B$.

Un connecteur qui n'est pas extensionnel est dit *intensionnel*.

(4) En règle générale, I est à construire pour chaque langage pragmatique comme un ensemble de séquences finies ayant comme termes les différents traits distinctifs des contextes possibles d'énonciation qui ont été relevés comme pertinents pour l'interprétation. Ici, bien entendu, comme $\mathcal{L}$ est un langage pragmatique ordinaire, tout ensemble I de structure totalement indéterminée peut servir d'ensemble d'indices.

(5) En accord avec Montague (1972), nous postulons donc ici explicitement que tout objet du domaine d'une interprétation possible M d'un langage pragmatique existe relativement à un indice au moins.

Cette exigence jugée non-nécessaire par Montague (1968) peut être levée si l'on se donne comme chez Montague (1968) un ensemble U fixé d'avance comme domaine de M .

Une interprétation possible M est alors un triple $\langle I, U, V \rangle$ avec U à la place de D .

(6) Si e est un terme, variable ou constante individuelle, l'*extension de e relativement à l'indice i dans M* sera notée $\text{Ext}_{eM}(i)$ et définie comme suit:

1° Si e est une variable individuelle v , alors $\text{Ext}_{eM}(i) = V_v$.

2° Autrement c'est si e est une constante individuelle c , alors $\text{Ext}_{eM}(i) = V_c(i)$.

(7) Si X et Y sont des ensembles et si n est un nombre naturel et f une fonction dont les valeurs sont des ensembles alors $\mathcal{P}X$, $\{X\}$, $(X)^n$, $X \times Y$, et $\bigcup_{x \in X} f(x)$ sont de nouveaux ensembles, à l'interpréter respectivement comme

l'ensemble des parties de X , l'ensemble dont le seul élément est X , l'ensemble des n -tuples $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ tels que $u_1 \in X, \dots, u_n \in X$, le produit cartésien de X et de Y , et l'union des $f(x)$ qui sont tels que $x \in X$.

(8) Cet ensemble $\mathcal{P}\{\emptyset\}$ à interpréter comme l'ensemble $\{T, F\}$ sera appelé à partir d'ici, l'*ensemble des valeurs de vérité*.

(⁹) Si X et Y sont des ensembles, par une *relation* sur X et Y on entend ici une relation dont le domaine est X et dont le rang est Y .

(¹⁰) Par *longueur* d'une formule A on entend ici le nombre des occurrences différentes des connecteurs $\sim, \wedge, \vee, \supset$, du quantificateur universel $\forall$ et des constantes fonctorielles dans A .

(¹¹) Remarquons que les connecteurs extensionnels peuvent aussi être interprétés par la clause V_{d_n} .

Ainsi, par exemple, si $\sim$ est le négateur classique, nous pouvons construire, dans notre théorie sémantique $\langle V, \sim \rangle$, comme une fonction de I dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}I)^1$, qui est telle que, pour une relation binaire R sur $I \times (\mathcal{P}I)^1$ s'appliquent à un indice $i \in I$ et à une séquence $\langle J \rangle \in (\mathcal{P}I)^1$, ssi $i \notin J$, $V_{\sim}(i)$ pour chaque indice $i = \{ \langle J \rangle / iR \langle J \rangle \}$.

Si nous appliquons maintenant la clause V_{d_n} , à savoir:

$V(\sim A, i) = T$ ssi $\langle \{ j / V(A, j) = T \} \rangle \in V_{\sim}(i)$, il est clair que nous obtenons une définition analogue à la clause habituelle $V_{\sim}$ présentée plus haut, à savoir que $V(\sim A, i) = T$ ssi $i \notin \{ j / V(A, j) = T \}$, c'ad ssi $V(A, i) = F$.

(¹²) Cette définition d'une *dérivation* dans le système VS est dans les lignes de la correction apportée par Henkin et Montague à la définition de Church (1956) qui souffrait du défaut d'invalider la loi d'atténuation, suivant laquelle si $\vdash_{VS} A$ alors $\vdash_{VS} \neg A$.

Voir R. MONTAGNE et L. HENKIN, On the Definition of 'Formal Deduction' dans *The Journal of Symbolic Logic* — Volume 21, Numéro 2, Juin 1956, p. 129-136.