# SUR LES DEFINITIONS DES ALGEBRES TRIVALENTES DE LUKASIEWICZ DONNEES PAR A. MONTEIRO

Denise BECCHIO

D'après (1) et (2) on peut définir *une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme étant un système* $(A,1,\wedge,\vee,N,M)$ *tel que*
1. $(A,1,\wedge,\vee,N)$ *est un treillis de Morgan* (ou «réticulé de Morgan» (1) ou «distributive i-lattice» (3))
2. *l'opérateur unaire* M *vérifie les trois axiomes*

M1. $Nx \vee Mx = 1$

M2. $x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$

M3. $M(x \wedge y) = Mx \wedge My$

Dans (4) A. Monteiro démontre que l'on peut remplacer l'axiome M3 par les deux axiomes

K. $x \wedge Nx \leqq y \vee Ny$

M'3. $M(x \wedge y) \leqq Mx \wedge My$

c'est-à-dire définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme étant *un treillis de Kleene* (treillis de Morgan dans lequel la condition K est vérifiée ou encore «réticulé de Morgan normal» (1) ou «distributive and normal i-lattice» (3)) *dans lequel est définie une loi unaire* M *vérifiant les axiomes* M1, M2 *et* M'3.

Nous allons démontrer qu'il est possible de définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme étant *un treillis de Kleene dans lequel est définie une loi unaire* M *vérifiant seulement les axiomes* M1 *et* M2.

Autrement dit, *un système* $(A,1,\wedge,\vee,N,M)$ *formé par un ensemble non vide* A, *un élément* 1 *de* A, *deux opérations binaires* $\wedge$ *et* $\vee$ *définies sur* A *et deux opérations unaires* N *et* M *définies sur* A *est une algèbre trivalente de Lukasiewicz si les axiomes suivants sont vérifiés*

L1. $x \wedge (x \vee y) = x$

L2. $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$

L3. $x = NNx$

L4. $N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$

L5. $x \wedge Nx \leqq y \vee Ny$ (la relation $\leqq$ étant la relation d'ordre habituelle définie sur le treillis $(A, \wedge, \vee)$)

L6. $Nx \vee Mx = 1$

L7. $x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$

Rappelons d'abord que d'après L1 et L2, $(A, \wedge, \vee)$ est un treillis distributif (5) et possède par conséquent toutes les propriétés d'une telle structure. Certaines de ces propriétés et les axiomes L3 et L6 ont permis à L. Monteiro (2) de démontrer que $x \vee 1 = 1$ c'est-à-dire que $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ est une algèbre de Kleene (1). Nous supposons donc sans le démontrer que $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ possède toutes les propriétés d'une algèbre de Kleene et écrivons simplement celles de ces propriétés qui nous serviront par la suite:

P1. $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$

P2. $x \vee x = x$

P3. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

P4. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

P5. $x \wedge y \leqq x,\ x \wedge y \leqq y$

P6. $x \leqq x \vee y,\ y \leqq x \vee y$

P7. $x \leqq y \Longrightarrow x \vee z \leqq y \vee z$

P8. $x \leqq y \Longrightarrow x \wedge z \leqq y \wedge z$

P9. $x \leqq y \Longrightarrow Ny \leqq Nx$

P10. $x \leqq y$ et $x \leqq z \Longrightarrow x \leqq y \wedge z$

Nous pouvons alors établir les théorèmes suivants:

T1. $x \leqq Mx$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $x \wedge (Nx \vee Mx) = x \wedge 1 = x$ | L6.P1. |
| 2. | $(x \wedge Nx) \vee (x \wedge Mx) = x$ | 1. P3. |
| 3. | $(Nx \wedge Mx) \vee (x \wedge Mx) = x$ | 2. L7. |
| 4. | $x = (Nx \vee x) \wedge Mx \leqq Mx$ | 3. P3.P5. |

T2. $Nx \wedge y \leqq x \Longrightarrow y \leqq Mx$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(Nx \wedge y) \vee Mx \leqq x \vee Mx$ | hyp. P7. |
| 2. | $(Nx \vee Mx) \wedge (y \vee Mx) \leqq x \vee Mx$ | 1. P4. |

| | |
|---|---|
| 3. $y \vee Mx \leqq x \vee Mx$ | 2. L6.P1. |
| 4. $x \vee Mx \leqq Mx \vee Mx$ | T1.P7. |
| 5. $y \vee Mx \leqq Mx$ | trans. 3.4. P2. |
| 6. $y \leqq y \vee Mx$ | P6. |
| 7. $y \leqq Mx$ | trans. 6.5. |

T3. $x \leqq y \Longrightarrow Ny \wedge Mx \leqq y$

| | |
|---|---|
| 1. $Ny \leqq Nx$ | hyp. P9. |
| 2. $Ny \wedge Mx \leqq Nx \wedge Mx$ | 1. P8. |
| 3. $Ny \wedge Mx \leqq x \wedge Nx$ | 2. L7 |
| 4. $x \wedge Nx \leqq x \leqq y$ | P5. hyp. |
| 5. $Ny \wedge Mx \leqq y$ | trans. 3.4. |

T4. $x \leqq y \Longrightarrow Mx \leqq My$

| | |
|---|---|
| 1. $Ny \wedge Mx \leqq y$ | hyp. T3. |
| 2. $Mx \leqq My$ | 1. T2. |

T5. $M(x \wedge y) \leqq Mx \wedge My$

| | |
|---|---|
| 1. $M(x \wedge y) \leqq Mx$ | P5. T4. |
| 2. $M(x \wedge y) \leqq My$ | P5. T4. |
| 3. $M(x \wedge y) \leqq Mx \wedge My$ | 1.2.P10. |

Or T5 et l'axiome M'3 sont identiques.
Nous pouvons donc bien définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz à l'aide des axiomes L1 - L7 seulement. Nous allons démontrer l'indépendance de ce système d'axiomes.

*Indépendance de L1*:
Soient 0 et 1 deux éléments distincts. On désigne par $T_1$ l'ensemble $\{0,1\}$.
Dans $T_1$ on pose $N0 = 0$, $N1 = 1$, $M0 = M1 = 1$ et $x \wedge y = x \vee y = 1$ pour tous x,y de $T_1$.
Les axiomes L2 - L7 sont vérifiés dans $T_1$ alors que l'axiome L1 ne l'est pas car $0 \wedge (0 \vee 1) = 1 \neq 0$.

*Indépendance de L2*:
Soit $T_2$ le treillis non distributif dont le diagramme est

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur, no head] & b \arrow[u, no head] & c \arrow[ul, no head] \\ & 0 \arrow[ul, no head] \arrow[u, no head] \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$$

Dans $T_2$ on pose $N1 = 0$, $Na = c$, $Nb = b$, $Nc = a$, $N0 = 1$
et $M1 = 1$, $Ma = a$, $Mb = 1$, $Mc = c$, $M0 = 0$
Les axiomes L1, L3 - L7 sont vérifiés dans $T_2$ alors que l'axiome L2 ne l'est pas.

*Indépendance de L3*:
Soit $T_3$ le treillis distributif dont le diagramme est

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur, no head] & & b \arrow[ul, no head] \\ & 0 \arrow[ul, no head] \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$$

Dans $T_3$ on pose $N1 = 0$, $Na = 1$, $Nb = a$, $N0 = 1$ et $Mx = x$ pour tout x de $T_3$.
Les axiomes L1, L2, L4 - L7 sont vérifiés dans T3 alors que l'axiome L3 ne l'est pas car $NNa = 0 \neq a$.

*Indépendance de L4*:
Soit $T_4$ le treillis distributif dont le diagramme est

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur, no head] & & b \arrow[ul, no head] \\ & c \arrow[ul, no head] \arrow[ur, no head] & \\ & 0 \arrow[u, no head] & \end{tikzcd}$$

Dans $T_4$ on pose $N1 = 0$, $Na = b$, $Nb = a$, $Nc = c$, $N0 = 1$
et $M1 = 1$, $Ma = a$, $Mb = b$, $Mc = 1$, $M0 = 0$
Les axiomes L1 - L3, L5 - L7 sont vérifiés dans $T_4$ alors que l'axiome LA ne l'est pas car $N(a \wedge c) = Nc = c$ et $Na \vee Nc = b \vee c = b \neq c$.

*Indépendance de L5*:
Soit $T_5$ le treillis distributif ayant même diagramme que $T_3$ mais dans lequel on pose $N1 = 0$, $Na = a$, $Nb = b$, $N0 = 1$ et $M1 = 1$, $Ma = 1$, $Mb = 1$, $M0 = 0$.
Les axiomes L1 - L4, L6, L7 sont vérifiés dans $T_5$ alors que l'axiome L5 ne l'est pas car $a \wedge Na = a \wedge a = a$, $b \vee Nb = b \vee b = b$ et $a \leqslant b$.

*Indépendance de L6*:
Soit $T_6$ le treillis distributif ayant même diagramme que $T_3$ mais dans lequel on pose $N1 = 0$, $Na = b$, $Nb = a$, $N0 = 1$ et $Mx = 0$ pour tout $x$ de $T_6$.
Les axiomes L1 - L5, L7 sont vérifiés dans $T_6$ alors que l'axiome L6 ne l'est pas car $Na \vee Ma = b \vee 0 = b \neq 1$.

*Indépendance de L7*:
Soit $T_7$ le treillis distributif ayant même diagramme que $T_3$ mais dans lequel on pose $N1 = 0$, $Na = b$, $Nb = a$, $N0 = 1$ et $Mx = 1$ pour tout $x$ de $T_7$.
Les axiomes L1 - L6 sont vérifiés dans $T_7$ alors que l'axiome L7 ne l'est pas car $a \wedge Na = a \wedge b = 0$ et $Na \wedge Ma = b \wedge 1 = b \neq 0$.

Remarque: les ensembles $T_1$ et $T_5$ sont semblables aux ensembles utilisés par L. Monteiro (2) pour démontrer l'indépendance des axiomes $x \wedge (x \vee y) = x$ et $M(x \wedge y) = Mx \wedge My$.

R. Maronna (6) a démontré qu'un système $(A, \wedge, \vee, N)$ vérifiant les axiomes L1 - L4 peut être défini comme un système $(A, \wedge, N)$ vérifiant les axiomes

1. $x = x \wedge N(Nx \wedge Ny)$
2. $x \wedge N(Ny \wedge Nz) = N(N(z \wedge x) \wedge N(y \wedge x))$

à condition de poser par définition

D. $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$

Ce résultat permet de définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme un système $(A,1,\wedge,N,M)$ vérifiant les axiomes

1. $x = x \wedge N(Nx \wedge Ny)$
2. $x \wedge N(Ny \wedge Nz) = N(N(z \wedge x) \wedge N(y \wedge x))$
3. $x \wedge Nx \leqq N(Ny \wedge y)$
4. $N(x \wedge NMx) = 1$
5. $x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$

à condition de poser par définition D. $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$. Ces cinq axiomes sont indépendants comme le montrent les ensembles considérés précédemment pour démontrer respectivement l'indépendance de L1, L2, L5, L6, L7 (l'égalité D. est bien vérifiée dans chacun de ces ensembles).

*Université Claude Bernard, Villeurbanne* Denise Becchio

BIBLIOGRAPHIE


(1) A. Monteiro. Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R.* Tome 7 (55) nr. 1-2 / 1963.

(2) L. F. T. Monteiro. Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R.* Tome 7 (55) nr. 3-1 / 1963.

(3) J. A. Kalman. Lattices with involution. *Trans. Am. Math. Soc.* 87 (1958) p. 485. 491.

(4) R. Cignoli and A. Monteiro. Boolean elements in Lukasiewicz algebras II. *Proc. Japan Acad.* 41. 676.680. (1965).

(5) M. Sholander. Postulates for distributive lattices. *Canadian Journal of Mathematics* 3 (1951) p. 28.30.

(6) R. Maronna. A characterization of Morgan lattices. *Portugaliae mathematica.* Vol. 23. Fasc. 3. 1964. p. 169.171.