

SUR LES DEFINITIONS DES ALGÈBRES TRIVALENTES
DE LUKASIEWICZ DONNEES PAR A. MONTEIRO

Denise BECCHIO

D'après (1) et (2) on peut définir une *algèbre trivalente de Lukasiewicz* comme étant un système $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ tel que
1. $(A, 1, \wedge, \vee, N)$ est un *treillis de Morgan* (ou «*réticulé de Morgan*» (1) ou «*distributive i-lattice*» (3))

2. *l'opérateur unaire M vérifie les trois axiomes*

$$M1. \quad Nx \vee Mx = 1$$

$$M2. \quad x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$$

$$M3. \quad M(x \wedge y) = Mx \wedge My$$

Dans (4) A. Monteiro démontre que l'on peut remplacer l'axiome M3 par les deux axiomes

$$K. \quad x \wedge Nx \leq y \vee Ny$$

$$M'3. \quad M(x \wedge y) \leq Mx \wedge My$$

c'est-à-dire définir une *algèbre trivalente de Lukasiewicz* comme étant un *treillis de Kleene* (treillis de Morgan dans lequel la condition K est vérifiée ou encore «*réticulé de Morgan normal*» (1) ou «*distributive and normal i-lattice*» (3)) dans lequel est définie une *loi unaire M vérifiant les axiomes M1, M2 et M'3.*

Nous allons démontrer qu'il est possible de définir une *algèbre trivalente de Lukasiewicz* comme étant un *treillis de Kleene* dans lequel est définie une *loi unaire M vérifiant seulement les axiomes M1 et M2.*

Autrement dit, un système $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ formé par un ensemble non vide A , un élément 1 de A , deux opérations binaires \wedge et \vee définies sur A et deux opérations unaires N et M définies sur A est une *algèbre trivalente de Lukasiewicz* si les axiomes suivants sont vérifiés

$$L1. \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

$$L2. \quad x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$$

$$L3. \quad x = NNx$$

- L4. $N(x \wedge y) = Nx \vee Ny$
 L5. $x \wedge Nx \leq y \vee Ny$ (la relation \leq étant la relation d'ordre habituelle définie sur le treillis (A, \wedge, \vee))
 L6. $Nx \vee Mx = 1$
 L7. $x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$

Rappelons d'abord que d'après L1 et L2, (A, \wedge, \vee) est un treillis distributif (5) et possède par conséquent toutes les propriétés d'une telle structure. Certaines de ces propriétés et les axiomes L3 et L6 ont permis à L. Monteiro (2) de démontrer que $x \vee 1 = 1$ c'est-à-dire que $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ est une algèbre de Kleene (1). Nous supposons donc sans le démontrer que $(A, 1, \wedge, \vee, N, M)$ possède toutes les propriétés d'une algèbre de Kleene et écrivons simplement celles de ces propriétés qui nous serviront par la suite:

- P1. $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$
 P2. $x \vee x = x$
 P3. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
 P4. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
 P5. $x \wedge y \leq x, x \wedge y \leq y$
 P6. $x \leq x \vee y, y \leq x \vee y$
 P7. $x \leq y \implies x \vee z \leq y \vee z$
 P8. $x \leq y \implies x \wedge z \leq y \wedge z$
 P9. $x \leq y \implies Ny \leq Nx$
 P10. $x \leq y$ et $x \leq z \implies x \leq y \wedge z$

Nous pouvons alors établir les théorèmes suivants:

T1. $x \leq Mx$

- | | |
|---|-----------|
| 1. $x \wedge (Nx \vee Mx) = x \wedge 1 = x$ | L6.P1. |
| 2. $(x \wedge Nx) \vee (x \wedge Mx) = x$ | 1. P3. |
| 3. $(Nx \wedge Mx) \vee (x \wedge Mx) = x$ | 2. L7. |
| 4. $x = (Nx \vee x) \wedge Mx \leq Mx$ | 3. P3.P5. |

T2. $Nx \wedge y \leq x \implies y \leq Mx$

- | | |
|---|----------|
| 1. $(Nx \wedge y) \vee Mx \leq x \vee Mx$ | hyp. P7. |
| 2. $(Nx \vee Mx) \wedge (y \vee Mx) \leq x \vee Mx$ | 1. P4. |

- | | | |
|-----|---|-----------------|
| 3. | $y \vee Mx \leq x \vee Mx$ | 2. L6.P1. |
| 4. | $x \vee Mx \leq Mx \vee Mx$ | T1.P7. |
| 5. | $y \vee Mx \leq Mx$ | trans. 3.4. P2. |
| 6. | $y \leq y \vee Mx$ | P6. |
| 7. | $y \leq Mx$ | trans. 6.5. |
| | | |
| T3. | $x \leq y \implies Ny \wedge Mx \leq y$ | |
| 1. | $Ny \leq Nx$ | hyp. P9. |
| 2. | $Ny \wedge Mx \leq Nx \wedge Mx$ | 1. P8. |
| 3. | $Ny \wedge Mx \leq x \wedge Nx$ | 2. L7 |
| 4. | $x \wedge Nx \leq x \leq y$ | P5. hyp. |
| 5. | $Ny \wedge Mx \leq y$ | trans. 3.4. |
| | | |
| T4. | $x \leq y \implies Mx \leq My$ | |
| 1. | $Ny \wedge Mx \leq y$ | hyp. T3. |
| 2. | $Mx \leq My$ | 1. T2. |
| | | |
| T5. | $M(x \wedge y) \leq Mx \wedge My$ | |
| 1. | $M(x \wedge y) \leq Mx$ | P5. T4. |
| 2. | $M(x \wedge y) \leq My$ | P5. T4. |
| 3. | $M(x \wedge y) \leq Mx \wedge My$ | 1.2.P10. |

Or T5 et l'axiome M'3 sont identiques.

Nous pouvons donc bien définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz à l'aide des axiomes L1 - L7 seulement. Nous allons démontrer l'indépendance de ce système d'axiomes.

Indépendance de L1:

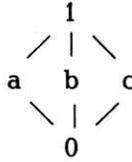
Soient 0 et 1 deux éléments distincts. On désigne par T_1 l'ensemble $\{0,1\}$.

Dans T_1 on pose $NO = 0$, $N1 = 1$, $MO = M1 = 1$ et $x \wedge y = x \vee y = 1$ pour tous x, y de T_1 .

Les axiomes L2 - L7 sont vérifiés dans T_1 alors que l'axiome L1 ne l'est pas car $0 \wedge (0 \vee 1) = 1 \neq 0$.

Indépendance de L2:

Soit T_2 le treillis non distributif dont le diagramme est



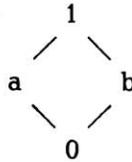
Dans T_2 on pose $N1 = 0, Na = c, Nb = b, Nc = a, N0 = 1$

et $M1 = 1, Ma = a, Mb = 1, Mc = c, M0 = 0$

Les axiomes L1, L3 - L7 sont vérifiés dans T_2 alors que l'axiome L2 ne l'est pas.

Indépendance de L3:

Soit T_3 le treillis distributif dont le diagramme est

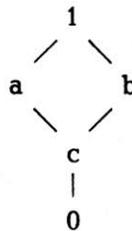


Dans T_3 on pose $N1 = 0, Na = 1, Nb = a, N0 = 1$ et $Mx = x$ pour tout x de T_3 .

Les axiomes L1, L2, L4 - L7 sont vérifiés dans T_3 alors que l'axiome L3 ne l'est pas car $NNa = 0 \neq a$.

Indépendance de L4:

Soit T_4 le treillis distributif dont le diagramme est



Dans T_4 on pose $N1 = 0, Na = b, Nb = a, Nc = c, N0 = 1$
 et $M1 = 1, Ma = a, Mb = b, Mc = 1, M0 = 0$
 Les axiomes L1 - L3, L5 - L7 sont vérifiés dans T_4 alors que
 l'axiome LA ne l'est pas car $N(a \wedge c) = Nc = c$ et $Na \vee Nc = b \vee c = b \neq c$.

Indépendance de L5:

Soit T_5 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais
 dans lequel on pose $N1 = 0, Na = a, Nb = b, N0 = 1$ et
 $M1 = 1, Ma = 1, Mb = 1, M0 = 0$.
 Les axiomes L1 - L4, L6, L7 sont vérifiés dans T_5 alors que
 l'axiome L5 ne l'est pas car $a \wedge Na = a \wedge a = a, b \vee Nb = b \vee b = b$ et $a \leq b$.

Indépendance de L6:

Soit T_6 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais
 dans lequel on pose $N1 = 0, Na = b, Nb = a, N0 = 1$ et
 $Mx = 0$ pour tout x de T_6 .
 Les axiomes L1 - L5, L7 sont vérifiés dans T_6 alors que l'axiome
 L6 ne l'est pas car $Na \vee Ma = b \vee 0 = b \neq 1$.

Indépendance de L7:

Soit T_7 le treillis distributif ayant même diagramme que T_3 mais
 dans lequel on pose $N1 = 0, Na = b, Nb = a, N0 = 1$ et
 $Mx = 1$ pour tout x de T_7 .
 Les axiomes L1 - L6 sont vérifiés dans T_7 alors que l'axiome L7
 ne l'est pas car $a \wedge Na = a \wedge b = 0$ et $Na \wedge Ma = b \wedge 1 = b \neq 0$.

Remarque: les ensembles T_1 et T_5 sont semblables aux ensembles
 utilisés par L. Monteiro (2) pour démontrer l'indépendance
 des axiomes $x \wedge (x \vee y) = x$ et $M(x \wedge y) = Mx \wedge My$.

R. Maronna (6) a démontré qu'un système (A, \wedge, \vee, N) vérifiant
 les axiomes L1 - L4 peut être défini comme un système
 (A, \wedge, N) vérifiant les axiomes

- 1. $x = x \wedge N(Nx \wedge Ny)$
 - 2. $x \wedge N(Ny \wedge Nz) = N(N(z \wedge x) \wedge N(y \wedge x))$
- à condition de poser par définition
 D. $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$

Ce résultat permet de définir une algèbre trivalente de Lukasiewicz comme un système $(A, 1, \wedge, N, M)$ vérifiant les axiomes

1. $x = x \wedge N(Nx \wedge Ny)$
2. $x \wedge N(Ny \wedge Nz) = N(N(z \wedge x) \wedge N(y \wedge x))$
3. $x \wedge Nx \leq N(Ny \wedge y)$
4. $N(x \wedge NMx) = 1$
5. $x \wedge Nx = Nx \wedge Mx$

à condition de poser par définition $D. x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$. Ces cinq axiomes sont indépendants comme le montrent les ensembles considérés précédemment pour démontrer respectivement l'indépendance de L1, L2, L5, L6, L7 (l'égalité D. est bien vérifiée dans chacun de ces ensembles).

Université Claude Bernard, Villeurbanne Denise BECCHIO

BIBLIOGRAPHIE

- (1) A. MONTEIRO. Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R.* Tome 7 (55) nr. 1-2 / 1963.
- (2) L. F. T. MONTEIRO. Axiomes indépendants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R. P. R.* Tome 7 (55) nr. 3-1 / 1963.
- (3) J. A. KALMAN. Lattices with involution. *Trans. Am. Math. Soc.* 87 (1958) p. 485. 491.
- (4) R. CIGNOLI and A. MONTEIRO. Boolean elements in Lukasiewicz algebras II. *Proc. Japan Acad.* 41. 676.680. (1965).
- (5) M. SHOLANDER. Postulates for distributive lattices. *Canadian Journal of Mathematics* 3 (1951) p. 28.30.
- (6) R. MARONNA. A characterization of Morgan lattices. *Portugaliae mathematica*. Vol. 23. Fasc. 3. 1964. p. 169.171.