«ET EN MÊME TEMPS»

Jean PIETERS

Dans son article «*And then*», von Wright (1966) élabore un système de logique du temps sur la base d'un opérateur temporel binaire, l'opérateur T, la formule pTq se lisant «p et puis q» ou «p maintenant, et plus tard q».

Nous nous proposons, dans le présent article, d'esquisser une série de systèmes de logique du temps élaborés sur la base d'un autre opérateur temporel binaire T, la formule pTq se lisant, cette fois, «p sera vrai, et en même temps q».

L'expression «p sera vrai, et en même temps q» signifie ici: «il y aura au moins un moment où p et q sont vrais ensemble».

Nous présenterons d'abord ce que nous appelons le système $\mathbf{T(K_t)}$. Nous indiquerons ensuite quelques extensions de ce système; à cette occasion, nous ferons une comparaison entre notre opérateur T et celui de von Wright. Pour terminer, nous montrerons comment notre opérateur T peut être utilisé pour construire des logiques modales sur de nouvelles bases.

1. Le système $\mathbf{T(K_t)}$.

Utilisant à partir de maintenant la notation polonaise, nous écrivons Np pour «non-p», Cpq pour «si p, alors q», Kpq pour «p et q», Apq pour «p ou q», et Tpq, au lieu de pTq, pour «p sera vrai, et en même temps q».

Pour former le système $\mathbf{T(K_t)}$, nous ajoutons au calcul propositionnel classique (avec substitution et détachement) les postulats suivants:

Axiomes

T1. CNTpNCqrCTpqTpr
T2. CTpqTpKpq
T3. CTpKqrTqr

Règle

RT: «si α est une thèse, NTpNα est une thèse».

Les variables p, q, r, etc. du système **T(K$_t$)** représentent, chacune, n'importe quelle proposition *temporelle*, c'est-à-dire n'importe quelle proposition susceptible d'avoir des valeurs de vérité (le vrai ou le faux) distinctes à des moments distincts du temps. Considérons, par exemple, la proposition «Il pleut». Cette proposition, énoncée à n'importe quel moment où il pleut, est vraie; énoncée à n'importe quel autre moment, cette même proposition est fausse.

Ce n'est qu'en un sens restreint, cependant, que le système **T(K$_t$)** peut être appelé une *logique du temps*. Car ce système, comme celui de von Wright, n'est en fait qu'une logique *du présent et du futur*. Aucun de nos opérateurs, en effet, ne se réfère au *passé*. L'opérateur T se réfère à un moment du futur; les autres opérateurs se réfèrent, tout simplement, au moment présent: par exemple, p étant une proposition temporelle, non-p signifie «il n'est pas vrai maintenant que p». Ainsi, bien que notre système s'applique à n'importe quelle proposition temporelle, et donc aussi à des propositions énoncées au mode passé (telle la proposition «Il a fait chaud cet été»), il ne dispose pas des opérateurs nécessaires pour traiter directement, lui-même, du passé.

On pourrait remédier à cette situation, comme von Wright le suggère pour son système, en introduisant dans **T(K$_t$)** une fonction pour le passé, fonction analogue à Tpq, et qui se lirait «p *a été vrai*, et en même temps q». Nous n'étudierons pas cette fonction ici.

La plupart des systèmes de logique du temps sont élaborés sur la base d'opérateurs temporels *unaires*, tel l'opérateur F, la formule Fp se lisant «il *sera vrai* que p». [1] Il existe un rapport immédiat entre notre opérateur T et cet opérateur F. Il est clair, d'une part, que p sera vrai, et en même temps q, si et seulement s'il sera vrai que: p et q. D'autre part, il est clair qu'il sera vrai que p si et seulement s'il sera vrai que: p et p;

partant, il sera vrai que p si et seulement si p sera vrai, et en même temps p.

On montre facilement que si Tpq est défini comme: FKpq, et que si, d'autre part, Fp est défini comme: Tpp, le système **T**($\mathbf{K_t}$) est équivalent au système en F que l'on obtient lorsqu'on ajoute au calcul propositionnel classique (avec substitution et détachement) l'axiome CNFNCpqCFpFq et la règle «si α est une thèse, NFNα est une thèse». [2] Ce système, que nous appellerons **F**($\mathbf{K_t}$), n'est autre qu'une formulation en F de la logique du présent et du futur contenue dans le système $\mathbf{K_t}$ de Lemmon. [3]

Les preuves d'indépendance des postulats de **T**($\mathbf{K_t}$) sont faciles à donner.

On trouve dans Hughes & Cresswell (1968, p. 71) la preuve que le système modal **S5**, et partant aussi le système modal $\mathbf{T} \subset \mathbf{S5}$, ne se réduit pas au c.p.c. (calcul propositionnel classique). A partir de là, on peut donner pour les axiomes de **T**($\mathbf{K_t}$) les preuves suivantes d'indépendance. Ecrivons Lp pour «il est nécessaire que p», et Mp pour «il est possible que p». Si on interprète Tpq comme: LKpq, les postulats de **T**($\mathbf{K_t}$) sont des thèses ou règles du système **T**, à l'exception de l'axiome T1: celui-ci, dans **T**, réduirait **T** au c.p.c. Si on interprète Tpq comme: KMpMq, les postulats de **T**($\mathbf{K_t}$) sont des thèses ou règles du système **T**, à l'exception, cette fois, de l'axiome T2: celui-ci, également, réduirait **T** au c.p.c. Enfin, si on interprète Tpq comme: KLpMq, les postulats de **T**($\mathbf{K_t}$) sont des thèses ou règles du système **T**, à l'exception de l'axiome T3 qui, lui aussi, réduirait **T** au c.p.c.

L'indépendance de la règle RT s'établit comme suit. Si on interprète Tpq comme: MKpq, les postulats de **T**($\mathbf{K_t}$) sont des thèses ou règles du système modal **C2** de Lemmon (1966, p. 47), à l'exception de la règle RT. Celle-ci, en effet, autoriserait, dans **C2**, la règle «si α est une thèse, Lα est une thèse», règle dont Lemmon (1966, p. 64) a montré qu'elle n'est pas contenue dans **C2**.

2. Extensions du système **T(K_t)**.

Si nous ajoutons à **T(K_t)** l'axiome

T4. CTpTqrTqr,

nous obtenons un système qui, moyennant nos définitions antérieures de T (en termes de F) et de F (en termes de T), est équivalent au système **F(K_t)** augmenté de l'axiome CFFpFp(1). En logique du temps, la formule (1) caractérise la *transitivité* du futur.

Si à **T(K_t)** nous ajoutons, en plus de T4, l'axiome

T5. CKTpqTprTpAAKqrKqTprKrTpq,

nous obtenons un système équivalent au système **F(K_t)** augmenté de l'axiome (1) et du nouvel axiome CKFpFqAAFKpq-FKpFqFKqFp (2). Lemmon a montré que ce système en F est complet pour une logique du futur transitif et *linéaire*.

Enfin, si nous ajoutons à **T(K_t)**, en plus de T4 et T5, l'axiome

T6. CNTpqAATpNqTNpqTNpNq,

nous obtenons un système équivalent au système **F(K_t)** augmenté des axiomes (1) et (2), ainsi que du nouvel axiome CNFpFNp (3). Ce système en F n'est autre qu'une formulation en F de la logique du présent et du futur contenue dans le système de Scott pour le temps transitif, linéaire et *infini*. ([4])

Dans *Past, present and future*, Prior (1967, *Appendix* B, I) a donné du système de von Wright pour «*and then*» l'axiomatisation suivante. Au calcul propositionnel classique (avec substitution et détachement), Prior ajoute les postulats que voici:

Axiomes
T'1. CNTpNCqrCTpqTpr
T'2. CpCTqrTpr

T'3. CTpqp
T'4. CTpTqrTpr
T'5. CKTpqTprTpAAKqrTqrTrq
T'6. CpCNTpqTpNq

Règle

RT': «si α est une thèse, NTpNα est une thèse».

Le système de von Wright ne peut pas être interprété comme une logique de la relation «p sera vrai, et en même temps q». Pour une telle interprétation, en effet, les axiomes T'2, T'3, T'4 et T'5 du système cesseraient d'être intuitivement plausibles. Les axiomes T'2 et T'3, par exemple, présupposeraient, chacun pour sa part, la conception inhabituelle d'un temps dans lequel *tout ce qui arrivera tôt ou tard arrive dès à présent.*

Prior a montré que si Tpq est défini comme: KpFq, et que si, d'autre part, Fp est défini comme: T**t**p, où **t** représente une tautologie quelconque, le système de von Wright est équivalent, lui aussi, au système $\mathbf{F(K_t)}$ augmenté des axiomes (1), (2) et (3). Il est clair, à partir de là, que si notre opérateur est défini, en termes de celui de von Wright, comme: T**t**Kpq, et que si, d'autre part, l'opérateur de von Wright est défini, en termes de notre opérateur, comme: KpTqq, le système de von Wright est équivalent à notre système $\mathbf{T(K_t)}$ augmenté des axiomes T4, T5 et T6.

Dans un article intitulé «Quelques remarques sur la logique du temps et les systèmes modales», von Wright (1967) introduit un axiome supplémentaire dans son système, l'axiome CTprTpTqr. Cette formule est valide, selon von Wright, si nous admettons que «l'ordre du temps est dense» (p. 569), car elle «signifie que lorsque r sera vrai, il existera une proposition (q) qui sera vraie *entre* le moment présent (p) et un moment futur, quand r sera vrai» (p. 569).

A vrai dire, la formule en question signifie autre chose, à savoir que lorsque r sera vrai, *n'importe* quelle proposition (q) sera vraie entre le moment présent où p est vrai et le moment futur où r sera vrai. Et il n'est pas étonnant, dans ces conditions, que l'axiome CTprTpTqr, ajouté au système de von Wright, rende ce système inconsistant:

1.	CTprTpTqr	hypohèse
2.	T**t**t	thèse du système «*and then*»
3.	CT**t**tT**t**Tqt	1(p/**t**, r/**t**)
4.	T**t**Tqt	2, 3, Dét.
5.	CT**t**TqtT**t**q	thèse du système «*and then*»
6.	T**t**q	4, 5, Dét.
7.	T**t**Nt	6(q/Nt)
8.	NT**t**Nt	thèse du système «*and then*»
9.	CT**t**NtCNT**t**Ntp	c.p.c.: CqCNqp (q/T**t**Nt)
10.	p	7, 8, 9, Dét. (x2).

L'axiome CTprTpTqr est donc à remplacer, par exemple par l'axiome CTprTpATqrTNqr.

Une formule qui est valide dans notre logique à nous, si nous admettons que le temps est dense, c'est la formule CTprATqTprTNqTpr. Si nous ajoutons cette formule à $\mathbf{T(K_t)}$, à titre d'axiome, en plus des axiomes T4, T5 et T6, nous obtenons un système équivalent au système $\mathbf{F(K_t)}$, augmenté des axiomes (1), (2) et (3), ainsi que du nouvel axiome CFpFFp. Ce système en F n'est autre qu'une formulation en F de la logique du présent et du futur contenue dans le système de Prior (1966) pour le temps transitif, linéaire, infini et *dense*.

3. Systèmes de la compossibilité.

Par la *compossibilité* de deux propositions, nous entendons la possibilité logique de leur conjonction. ([5])

Si, quittant le domaine de la logique du temps, et celui des propositions temporelles, nous lisons Tpq comme signifiant «p et q sont compossibles», nos systèmes pourront être considérés comme des systèmes modaux. En effet, si on interprète Tpq comme: MKpq, les postulats de nos systèmes deviennent des thèses ou règles de la logique modale habituelle.

Nous pouvons, d'un autre côté, comme le suggère Lewis (1932, p. 159), considérer la possibilité d'une proposition comme étant la compossibilité de cette proposition avec elle-même, c'est-à-dire interpréter Mp comme: Tpp. Il est immédiat que si Tpq est défini comme: MKpq, et que si, d'autre part, Mp est défini comme: Tpp, chacun de nos systèmes de la compossibilité est équivalent à une logique modale en M, logique qui a la même structure que la logique du temps en F à laquelle le système en T correspond par ailleurs dans son interprétation temporelle.

On voit, à partir de ce qui précède, comment il est possible de construire des systèmes de logique modale sur la base d'un opérateur modal *binaire* autre que ceux de l'*implication stricte*, de l'*équivalence stricte* ou, encore, de l'*incompatibilité stricte*. [6] Voyons, en particulier, comment se construit, sur ces nouvelles bases, la série, plus connue, des systèmes modaux **T, S4** et **S5**.

Pour former le système **T**, nous ajoutons aux postulats de **T(K_t)** l'axiome

CpTpp,

ainsi que les définitions Df . M : Mα = T$\alpha\alpha$, Df . L : Lα = NMNα, etc. L'axiome CpTpp signifie donc ici que «si une proposition est vraie, cette proposition est compossible avec elle-même».

Si nous ajoutons au système ainsi formé, notre ancien axiome T4

CTpTqrTqr,

nous obtenons le système **S4**. Cet axiome signifie que «deux propositions sont compossibles, si le fait qu'elles sont compossibles est lui-même compossible avec n'importe quelle proposition».

Enfin, si nous remplaçons l'axiome T4 par l'axiome

CTpqNTrNTpq,

nous obtenons le système **S5**. Cet axiome signifie que «si deux propositions sont compossibles, aucune proposition n'est compossible avec l'hypothèse qu'elles ne soient pas compossibles».

L'axiome CpTpp peut être remplacé par la formule

CKpqTpq.

Dans notre système **S4**, l'axiome T3 devient alors superflu:

1.	CKqrTqr	CKpqTpq(p/q, q/r)
2.	NTpNCKqrTqr	1, RT
3.	C(2)CTpKqrTpTqr	T1(q/Kqr, r/Tqr)
4.	CTpKqrTpTqr	2, 3, Dét.
5.	CTpTqrTqr	T4
6.	CTpKqrTqr	4, 5, Syllogisme.

Il en est de même dans le cas de notre système **S5**. On peut montrer, en effet, que, dans ce système, T4 est démontrable sans le recours à T3.

Université Catholique de Louvain Jean PIETERS

NOTES

(1) Pour ces systèmes, voir PRIOR (1967).

(2) En d'autres termes, le système **T**($\mathbf{K_t}$), augmenté de la définition Df. F : Fα = Tαα, est équivalent à ce système en F augmenté, lui, de la définition Df. T : Tαβ = FKαβ.

(3) Pour ce système $\mathbf{K_t}$, appelé aussi «*système minimal du temps*», voir PRIOR (1967, p. 51, et *Appendix* A, II, §4).

(4) Pour ce système, voir PRIOR (1967, p. 55).

(5) Lewis (1932, p. 153) parle, en ce sens, de ce qu'il appelle la «*consistance*» de deux propositions, notion qu'il symbolise (dans la notation russellienne) par la fonction «p ∘ q».

(6) Pour les systèmes basés sur ces opérateurs, voir HUGHES & CRESSWELL (1968, Chapitre 16).

BIBLIOGRAPHIE

G. E. HUGHES & M. J. CRESSWELL (1968), *An introduction to modal logic*, London, Methuen.

E. J. LEMMON (1966), «Algebraic semantics for modal logics I», *Journal of symbolic logic*, volume 31, number 1, pp. 46-65.

C. I. LEWIS (1932), *Symbolic logic*, New York, Dover publications, second edition, 1959.

A. N. PRIOR (1966), «Postulates for tense-logic», *American philosophical quarterly*, volume 3, number 2, pp. 153-161.

Id. (1967), *Past, present and future*, Oxford university press.

G. H. VON WRIGHT (1966), «And then», *Commentationes physico-mathematicae*, volume 32, number 7, pp. 1-11.

Id. (1967), «Quelques remarques sur la logique du temps et les systèmes modales», *Scientia*, volume 102, pp. 565-572.