

THÉORIE ALGÈBRIQUE DU SYLLOGISME CATÉGORIQUE

P. V. GROSJEAN

Sommaire

On rappelle d'abord (1) que les fonctions logiques d'ordre n sont aussi des relations d'ordre n , établies sur un doubleton quelconque. Dès lors, ces fonctions, — que l'implication ordonne en une «trame», — se représentent par des «matrices d'incidence», et se prêtent ainsi au *calcul des relations* (calcul matriciel booléen).

Grâce au produit relationnel, la trame des 16 fonctions d'ordre 2 se voit dotée d'une *structure d'algèbre*, dont on doit dégager les symétries et les automorphismes. Ce que l'on fait en mettant l'accent sur deux sous-ensembles remarquables de cette algèbre, le groupe «identité-négation» d'une part, et le doubleton «and-nor» d'autre part, qui rassemble deux «projecteurs» supplémentaires.

On constate que chacune des 2 bases duales de cette algèbre est constituée par 4 «jugements prédicatifs», soit en tout 8 jugements, dont 4 seulement figurent dans le carré logique scolastique. Les symétries de cet ensemble de 8 jugements sont celles d'une pyramide tronquée, la «pyramide logique».

Tout syllogisme catégorique répond alors à un schéma de produit relationnel, le schéma fondamental étant celui du «Barbara» (implication $\times$ implication = implication). C'est du Barbara que dérivent les autres schémas, par des opérations ad hoc de négations et/ou de projections.

Alors, tenant compte des symétries, des projections et des automorphismes, on établit sans peine:

1°) La théorie purement algébrique des 24 syllogismes classiques, partagés en 15 syllogismes directs (ayant 3 composantes) et 9 syllogismes indirects (comptant, en fait, 4 composantes); cette théorie sera qualifiée d'*asymétrique*, parce qu'elle n'utilise, à la suite des Scolastiques, qu'une partie seulement des symétries de la pyramide logique.

2°) Une théorie plus générale, dite *symétrique*, utilisant toutes les symétries possibles, théorie qui identifie 96 types distincts de syllogismes, tous issus de 3 *générateurs*, «les trois B» (Barbara, Bocardo, Baroco).

§ 1. — Relations sur un doubleton

1.1. — Les 2^n fonctions logiques d'ordre n s'ordonnent en une *trame* $\mathbb{A}_n$, c'est-à-dire en un treillis de Boole dont la base est un treillis de Boole (*).

Pour $n = 0$, la trame se réduit au doubleton $\{1,0\} = \mathbb{B}$, ordonné par la loi d'implication, laquelle peut s'écrire:

$$(1-1) \quad 0 \leq 0 \quad 0 \leq 1 \quad 1 \leq 1$$

1.2. — Pour $n = 1$, on a $\mathbb{A}_1 = \mathbb{B}^2$, dont les éléments s'ordonnent par la loi (1-1) appliquée à des termes de même rang dans les 2-uples rassemblés en $\mathbb{B}^2$.

$\mathbb{B}^2$ possède une structure d'*espace vectoriel*, construit sur l'ensemble $\mathbb{B}$ doté des deux lois de composition $(\wedge)$ et $(\vee)$.

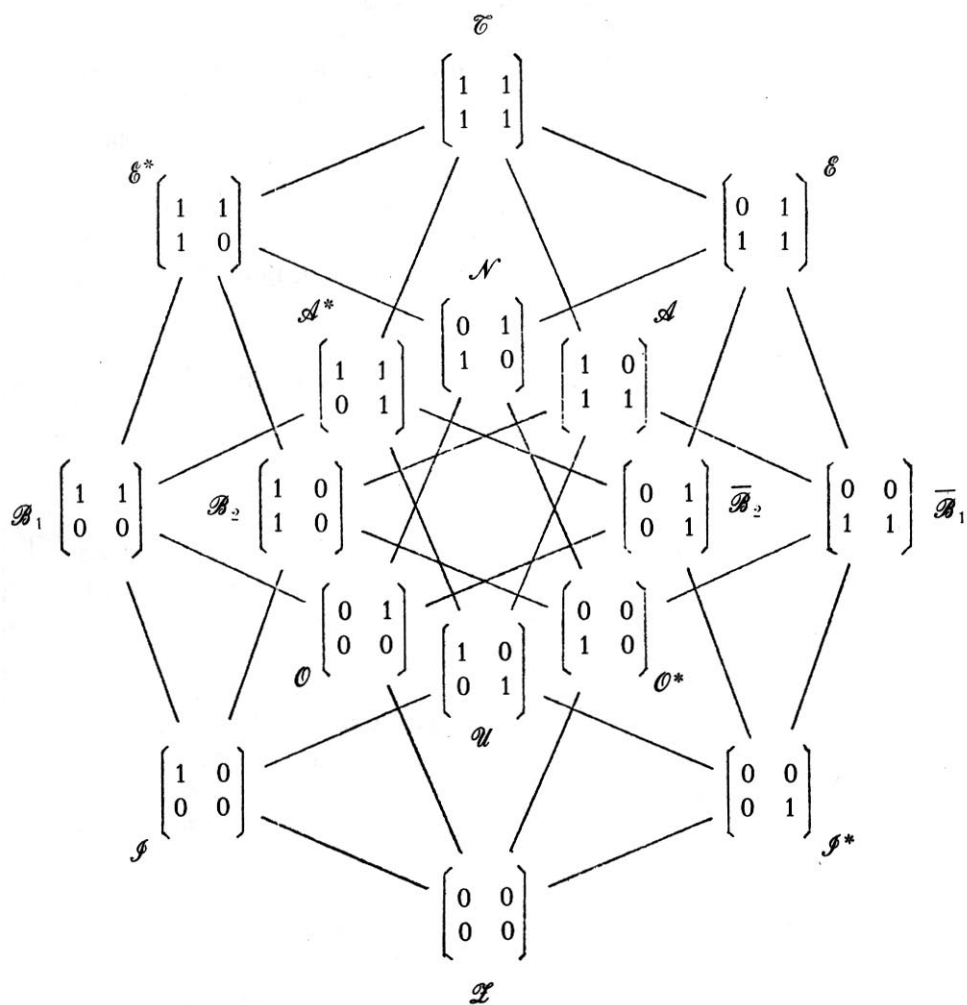
La paire de vecteurs notés $\beta = [1,0]$ et $\bar{\beta} = [0,1]$ est à la fois la base de ce vectoriel et la base de la trame $\mathbb{A}_1$. Les éléments de $\mathbb{B}$ jouent donc le rôle de «scalaires».

Chaque élément de $\mathbb{B}^2$ est la *fonction caractéristique* d'une partie d'un doubleton quelconque $\mathbb{C}$, lequel peut rassembler notamment, soit une proposition s et sa contradictoire $\bar{s}$, soit un ensemble S et son complémentaire $\bar{S}$, soit les deux scalaires de $\mathbb{B}$.

A ce titre, les éléments de $\mathbb{B}^2$ caractérisent les 4 *relations unaires* possibles sur un doubleton. Par extension de langage, on dira que les scalaires de $\mathbb{B}$ caractérisent les 2 *relations zéro-aires*, universelles (le vrai et le faux).

1.3. — Pour $n = 2$, on a $\mathbb{A}_2 = \mathbb{B}^4$, dont les éléments se présentent au mieux sous l'aspect de matrices carrées; la figure I est le *diagramme de Hasse* de la trame $\mathbb{A}_2$, dont les éléments s'ordonnent comme ceux de $\mathbb{A}_1$.

Figure I:

La trame $\mathbb{A}_2$ des 16 relations binaires sur $\mathbb{B}$ 

Cet ensemble est lui aussi un vectoriel sur $\mathbb{B}$; sa base est celle de $\mathbb{A}_2$, et elle se compose des 4 matrices notées $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$, $\mathcal{I}^*$ sur la figure I.

Chaque élément de $\mathbb{A}_2 = \mathbb{B}^4$ est la fonction caractéristique d'une partie du produit cartésien $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ formé par deux doubletons quelconques, éventuellement identiques.

A ce titre, les éléments de $\mathbb{B}^4$ caractérisent les 16 *relations binaires* possibles sur un doubleton; chaque matrice de la fig. I est ainsi la *matrice d'incidence* d'une telle relation. En particulier, $\mathcal{A}$ (fonction d'implication) est la matrice d'incidence de la relation (1-1).

Enfin, ces matrices sont aussi les *tables de Pythagore* des 16 *compositions internes* possibles sur $\mathbb{B}^2$. Ainsi, $\mathcal{E}^*$ est la conjonction ($\vee$), $\mathcal{I}$ est la disjonction-multiplication ($\wedge$) ou ($\cdot$), $\mathcal{N}$ est l'addition binaire ($+$).

1.4. — Le *produit relationnel* associatif (de signe $\circ$) établit sur $\mathbb{A}_2$ une *structure d'algèbre*:

$$(1-2) \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{A}_2: \quad \mathcal{P} \circ \mathcal{Q} = \mathcal{R} \in \mathbb{A}_2$$

Rappelons que ce produit s'exécute comme un produit de deux matrices ordinaires, à condition toutefois d'employer les compositions ($\vee$) et ($\wedge$) en lieu et place de l'addition et de la multiplication numériques, respectivement.

1.5. — Par ailleurs, le même produit peut s'exécuter entre une matrice de $\mathbb{A}_2$ (relation binaire) et un vecteur de $\mathbb{A}_1$ (relation unaire), celui-ci pouvant être mis en colonne et à droite de la matrice, ou bien mis en ligne horizontale et à gauche de la matrice:

$$(1-3) \quad \forall \mathcal{R} \in \mathbb{A}_2, \forall \alpha \in \mathbb{A}_1: \mathcal{R} \circ \alpha \in \mathbb{A}_1, \alpha \circ \mathcal{R} \in \mathbb{A}_1$$

Ainsi, chaque matrice de la figure I est aussi un *applicateur linéaire* de l'espace vectoriel $\mathbb{B}^2$. Et $\mathcal{Z}$ est l'applicateur nul, $\mathcal{U}$ l'opérateur identique (matrice-unité).

1.6. — Parmi ces applicateurs, nous distinguons notamment:

1°) Deux *opérateurs bijectifs*, et deux seulement, à savoir $\mathcal{U}$ et $\mathcal{N}$, dont l'ensemble forme un *groupe binaire* pour le produit relationnel, groupe isomorphe au groupe additif dans le corps binaire $\mathbb{B}$ (et dont la table de Pythagore est justement $\mathcal{N}$). L'opérateur $\mathcal{N}$ est *involutif*:

$$(1-4) \quad \mathcal{N} \circ \mathcal{N} = \mathcal{U}$$

C'est l'opérateur de *négation*, permutant les deux vecteurs de base $[1,0]$ et $[0,1]$ du vectoriel $\mathbb{B}^2$.

2°) Deux *projecteurs supplémentaires*, à savoir $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^*$. Ces deux applicateurs obéissent en effet à la définition des projecteurs (supplémentaires l'un de l'autre) en vectorielle:

$$(1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \\ \mathcal{J}^* \circ \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^* \\ \mathcal{J}^* \circ \mathcal{J} = \mathcal{Z} = \mathcal{J} \circ \mathcal{J}^* \\ \mathcal{J} + \mathcal{J}^* = \mathcal{U} \end{array} \right.$$

(N.B.: $\mathcal{J} + \mathcal{J}^* = \mathcal{J} \vee \mathcal{J}^*$). Les applicateurs $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^*$ projettent le vecteur tautologique $[1,1]$ sur les vecteurs de base. Rappelons qu'un projecteur est essentiellement un applicateur singulier, *non inversible*.

§ 2. — Symétries et automorphismes de $\mathbb{A}_2$.

2.1. — L'hypercube que représente la figure I possède un groupe de symétries comptant $2^4 \cdot 4! = 384$ opérations. Parmi celles-ci signalons d'abord celle qui nous sera la moins utile, la *symétrie centrale*, qui n'est autre que la *complémentation*:

$$(2-1) \quad \forall \mathcal{A} \in \mathbb{A}_2, \quad \mathcal{C} + \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}_2$$

Plus importante ici sera la *réciprocité*, transformant la ma-

trice $\mathcal{R}$ en sa transposée $\tilde{\mathcal{R}}$. Celle-ci définit la *relation réciproque*, appelée souvent et à tort la relation inverse. La réciprocity établit un *anti-automorphisme* sur l'algèbre $\mathbb{A}_2$:

$$(2-2) \quad \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{I}} \circ \tilde{\mathcal{P}}$$

Les invariants de la réciprocity sont les matrices-relations symétriques ($\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}$), lesquelles sont $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^*$ ainsi que $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Z}$. Par exemple, si $\mathcal{E}$ caractérise la relation ensembliste $S \subset \overline{M}$, alors $\tilde{\mathcal{E}}$ caractérisera la relation $M \subset \overline{S}$, équivalente à $S \subset \overline{M}$.

2.2. — Le groupe $\{\mathcal{U}, \mathcal{N}\}$ définit deux symétries:

a) l'identité banale:

$$(2-3) \quad \forall \mathcal{R} \in \mathbb{A}_2: \quad \mathcal{U} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{U} = \mathcal{R}$$

b) une *conjugaison*, que nous qualifierons de *simple*:

$$(2-4) \quad \mathcal{N} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}^* \in \mathbb{A}_2$$

Par exemple, si $\mathcal{A}$ caractérise la relation $S \subset M$, alors $\mathcal{A}^*$ caractérisera $\overline{S} \subset \overline{M}$.

Cette opération est une symétrie par rapport à la ligne médiane verticale de la figure I; elle laisse invariantes les relations rassemblées sur cette ligne, à savoir les relations *auto-conjugées* $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Z}$.

La conjugaison définit un *automorphisme* sur $\mathbb{A}_2$:

$$(2-5) \quad \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^* = \mathcal{P}^* \circ \mathcal{I}^*$$

Pour mémoire, la *dualité* au sens d'A. de Morgan est le produit d'une complémentation et d'une conjugaison, définissant $\hat{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}^*}$. C'est une symétrie par rapport à la ligne médiane horizontale de la figure, laissant invariantes les relations de

cette ligne (relations binaires «dégénérées», simples représentations des relations unaires basiques de $\mathbb{B}^2$).

2.3. — Le produit d'une conjugaison simple et d'une réciprocity est une *conjugaison hermitique* ⁽³⁾:

$$(2-6) \quad \mathcal{R}^+ \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\mathcal{R}})^* = (\mathcal{R}^*) \sim$$

Cette symétrie laisse invariantes les *relations hermitiques* ⁽³⁾, à savoir $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$, ainsi que $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}$. Ainsi, si $\mathcal{A}$ caractérise $S \subset M$, alors $\mathcal{A}^+$ caractérisera $\overline{M} \subset \overline{S}$, relation ensembliste équivalente à la précédente. Une relation hermitique obéit donc à:

$$(2-7) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}^+ \quad \text{c-à-d} \quad \mathcal{R}^* = \tilde{\mathcal{R}}$$

La conjugaison hermitique définit un *anti-automorphisme* de l'algèbre $\mathbb{A}_2$:

$$(2-8) \quad \mathcal{R} = \mathcal{P} \circ \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}^+ = \mathcal{S}^+ \circ \mathcal{P}^+$$

Théorème 1: Si deux relations hermitiques ont un produit hermitique, alors elles commutent. Ce théorème résulte directement de (2-8) lorsqu'on y pose $\mathcal{R} = \mathcal{R}^+$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+$.

Théorème 2: Par négation à droite ou bien à gauche de l'hermitique $\mathcal{H}$, on obtient la symétrique $\mathcal{S}$, ou bien respectivement la symétrique $\mathcal{S}^*$. En effet:

$$(2-9) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^+ = \mathcal{N} \circ \tilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ \tilde{\mathcal{H}}$$

et:

$$\mathcal{N} \circ \mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{N}$$

$$\text{D'où:} \quad \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ \tilde{\mathcal{H}} = (\mathcal{H} \circ \mathcal{N}) \sim = \tilde{\mathcal{S}}$$

$$(2-10) \quad \text{et:} \quad \mathcal{S}^* = \mathcal{S}^+ = \mathcal{N} \circ \mathcal{H}$$

§ 3. — Jugements prédicatifs et syllogismes catégoriques

3.1. — Un *jugement* (prédicatif) est une *relation basique* de la trame $\mathbb{A}_2$, relation appartenant soit à la base $\{\mathcal{J}, \mathcal{O}, \mathcal{O}^*, \mathcal{J}^*\}$ définie au n° 1.3., — dans ce cas le jugement est *particulier*, — soit à la *base duale* $\{\mathcal{E}^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{A}, \mathcal{E}\}$, — et dans ce cas le jugement est *universel*.

De ces 8 jugements, la logique traditionnelle ne retient que logique traditionnel, *sans astérisque*: $\mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathcal{O}$.
ceux que nous avons désignés par les voyelles mêmes du carré

3.2. — Dans chacune des bases, les quatre jugements s'obtiennent par les opérations d'un groupe de Klein, qui sont: l'identité, la négation à droite, la négation à gauche, la négation à droite et à gauche (c'est-à-dire la conjugaison simple). De ce groupe, la logique classique ne retient que le sous-groupe formé par les deux premières de ces opérations.

Il suffit donc de se donner un «jugement-repère» dans chaque base, puis de laisser opérer le groupe. Et il est tout indiqué de choisir comme repères l'universel $\mathcal{A}$ (l'implication) et le particulier $\mathcal{J}$ (l'un des projecteurs, dont la matrice est la table de la composition «et»).

Par définition, ces deux repères seront dits *affirmatifs*. Les autres jugements seront affirmatifs ou négatifs selon qu'ils sont issus du repère par un nombre pair ou un nombre impair de négations, respectivement. Ainsi est définie la «qualité» d'un jugement, au sens aristotélicien.

3.3. — Quant à la «quantité», elle est évidemment définie par l'appartenance à telle ou telle base de la trame. Pour passer du repère universel $\mathcal{A}$ au repère particulier $\mathcal{J}$, il suffit de *projeter* le premier au moyen du second *mis à sa gauche*:

$$(3-1) \quad \mathcal{J} \circ \mathcal{A} = \mathcal{J}$$

Par négation à droite, il vient

$$(3-2) \quad \mathcal{J} \circ \mathcal{E} = \mathcal{O}$$

et par conjugaison simple

$$(3-3) \quad \mathcal{J}^* \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{J}^* \quad \mathcal{J}^* \circ \mathcal{E}^* = \mathcal{O}^*$$

Donc les 4 jugements particuliers s'obtiennent par des *projections* exécutées à gauche des jugements universels. On peut donc dire que $\mathcal{A}$ est le générateur des 8 jugements.

3.4. — La logique traditionnelle rassemble les 4 jugements classiques en une célèbre figure géométrique, le «carré logique». Or cette figure est à la fois mal choisie et incomplète:

1°) Mal choisie: Un carré possède $2^3 \cdot 2! = 8$ symétries, alors que l'ensemble des 4 jugements classiques n'en possède que 2, l'identité et la négation à droite, celle-ci permutant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$, ainsi que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{O}$ (changement de la «qualité»). La projection (changement de la «quantité») n'est pas une symétrie, puisque c'est une opération non inversible. Les symétries de l'ensemble $(\mathcal{A}, \mathcal{E}; \mathcal{J}, \mathcal{O})$ sont celles d'un *trapèze*, et nous proposons de substituer le *trapèze logique* (fig. 2) au carré logique.

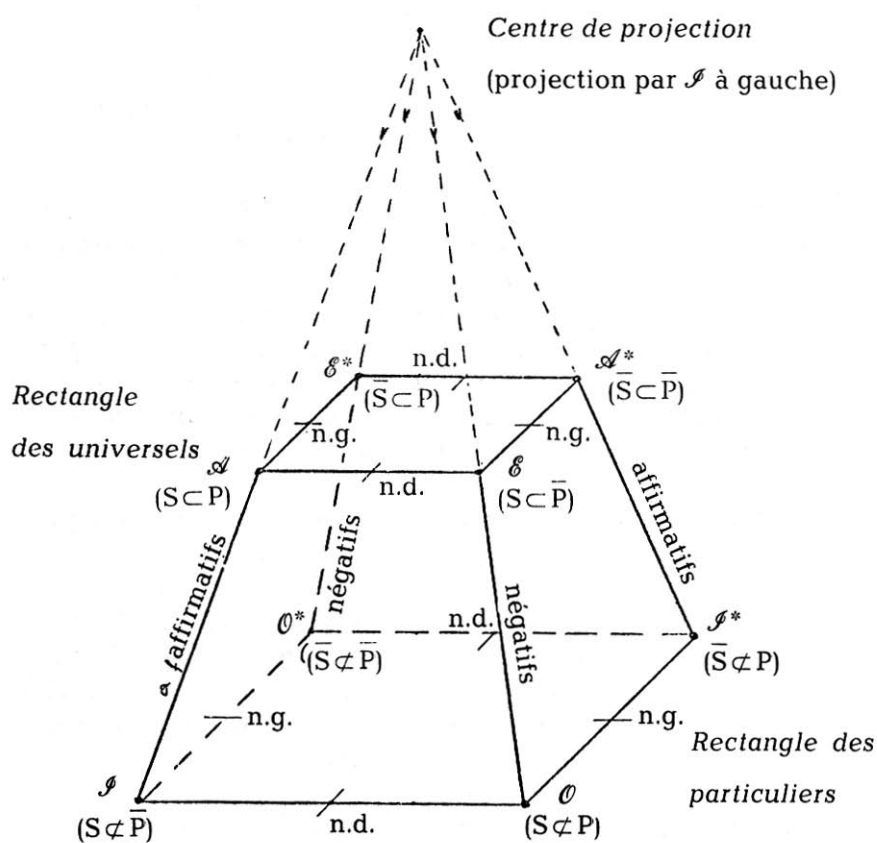
2°) Incomplète: Elle ignore les 4 jugements non classiques, lesquels forment le *trapèze logique conjugué*.

3.5. — En conséquence, nous proposons de remplacer le carré logique par la *pyramide logique* (fig. 2), pyramide tronquée à base rectangulaire, objet ayant deux plans de symétrie, marqués sur la figure par des tirets affectés d'une notation indiquant la nature de la symétrie: «n.d.» (négation à droite) et «n.g.» (négation à gauche). L'axe vertical est axe de symétrie pour l'opération de conjugaison simple.

Les bases ne peuvent être des carrés, car le groupe de Klein, mentionné au n° 3.2., ne leur donne que les symétries d'un rectangle.

Enfin, le sommet de la pyramide est le «centre de projection», origine des projetantes appliquant la base supérieure (jugements universels) sur la base inférieure (jugements particuliers).

Figure 2:

La pyramide logique*face avant: trapèze logique**face arrière: trapèze conjugué*

§ 4. — Les syllogismes classiques directs

4.1. — Une relation $\mathcal{P}$ est *transitive* lorsque:

$$(4-1) \quad \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$$

Formons $\mathcal{R} = \mathcal{U} \cup \mathcal{P}$. Cette relation est *réflexive*, puisque $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$; en outre elle est *idempotente*, donc transitive:

$$(4-2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\mathcal{U} \cup \mathcal{P}) \circ (\mathcal{U} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{P} \cup (\mathcal{P} \circ \mathcal{P}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{P} \\ \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \end{array}$$

On dit que $\mathcal{R}$ est un *préordre*. L'ensemble $\mathbb{A}_2$ compte 4 préordres, à savoir les deux *équivalences* (préordres symétriques) $\mathcal{U}$ et $\mathcal{E}$, et les deux ordres (préordres antisymétriques) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^* = \tilde{\mathcal{A}}$, réciproques l'un de l'autre.

Les deux relations $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^*$ sont des *ordres stricts* (non réflexifs), tous deux *nilpotents*: $\mathcal{O} \circ \mathcal{O} = \mathcal{Z} = \mathcal{O}^* \circ \mathcal{O}^*$.

Les 4 éléments hermitiques non symétriques de l'algèbre $\mathbb{A}_2$ sont donc tous des ordres (stricts ou non).

4.2. — Par définition, le *syllogisme fondamental* est la relation d'idempotence de l'ordre fondamental $\mathcal{A}$:

$$(4-3) \quad \mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

Il est entendu que: 1°) Le premier facteur $\mathcal{A}$ est la fonction caractéristique de la *mineure*, laquelle se traduit en notation ensembliste par $S \subset M$; conformément à l'usage, nous dirons S est le «sujet» de la conclusion, et que M est le «moyen terme» du syllogisme. 2°) Le second facteur caractérise la *majeure*, notée $M \subset P$, où P est le «prédicat» de la conclusion. 3°) Le résultat du produit est la *conclusion*, notée $S \subset P$.

L'écriture (4-3) est ainsi équivalente aux énoncés traditionnels, qui s'expriment:

a) en langage ordinaire (la mineure étant citée en premier contrairement à l'usage): (Or) tout S est M , tout M est P ; donc

tout S est P. (Expressions abrégées signifiant: Tout élément de S est élément de M, etc.).

b) en langage ensembliste: $[(S \subset M) \text{ et } (M \subset P)] \Rightarrow [S \subset P]$

c) en langage propositionnel: $[s \Rightarrow m] \text{ et } [m \Rightarrow p] \Rightarrow [s \Rightarrow p]$, où le symbole s représente la proposition $x \in S$, etc...

Le syllogisme fondamental (4-3) est connu sous le nom de «Barbara».

4.3. — Les syllogismes de la «première figure» (au sens classique) se déduisent du Barbara exactement comme les jugements classiques se déduisent de l'implication $\mathcal{A}$. On a ainsi, en se rappelant que le produit relationnel est associatif:

«Celarent»:

$$(4-4) \quad (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}) \circ \mathcal{N} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{A} \circ \mathcal{N}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}$$

«Darii»

$$(4-5) \quad \mathcal{I} \circ (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}) = (\mathcal{I} \circ \mathcal{A}) \circ \mathcal{A} = \mathcal{I} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}$$

«Ferio»

$$(4-6) \quad \mathcal{I} \circ (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}) \circ \mathcal{N} = (\mathcal{I} \circ \mathcal{A}) \circ (\mathcal{A} \circ \mathcal{N}) = \mathcal{I} \circ \mathcal{E} = \mathcal{O}$$

On sait que la consonne initiale des noms mnémotechniques désigne le type du syllogisme. Nous verrons que cette notation est redondante; seule la conclusion définit univoquement le type. Nous aurons ainsi les «syllogismes universels» (conclusions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$) et les «syllogismes particuliers» (en $\mathcal{I}$ et en $\mathcal{O}$).

Rappelons une dernière fois que dans les produits relationnels syllogistiques, le premier facteur (la première voyelle majuscule) est la mineure, alors que dans les mots mnémotechniques scolastiques, la première voyelle désigne la majeure.

4.4. — La logique classique connaît 4 «figures» de syllogismes, figures dont les schémas se déduisent du schéma

(SM,MP) de la 1^{re} figure, par les opérations d'un groupe de Klein permutant l'ordre des termes S et M, et/ou celui des termes M et P, le schéma SP de la conclusion restant inchangé. Ces 4 figures sont ainsi:

$$(4-7) \quad \begin{array}{lll} \text{I} = (\text{SM}, \text{MP}) & \text{II} = (\text{SM}, \text{PM}) & \text{III} = (\text{MS}, \text{MP}) \\ \text{IV} = (\text{MS}, \text{PM}) \end{array}$$

Or, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ caractérisent respectivement la mineure (SM) et la majeure (MP), alors $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ caractériseront respectivement la mineure (MS) et la majeure (PM). Dès lors, aux 4 figures classiques correspondront les produits respectifs:

$$(4-8) \quad \mathcal{P} \circ \mathcal{R} \quad \mathcal{P} \circ \tilde{\mathcal{R}} \quad \tilde{\mathcal{P}} \circ \mathcal{R} \quad \tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{R}}$$

4.5. — D'après le théorème 2 du n° 2.3., les dérivés du Barbara contiendront des composants symétriques $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}$. Or, si l'un des produits (4-8) contient une matrice symétrique $\mathcal{S}$, il est égal au produit contenant $\tilde{\mathcal{S}}$. D'où la Règle 1:

Si un syllogisme de la première figure contient k prémisses symétriques, il engendre 2^k syllogismes.

On a les cas suivants: $k = 0$ (Barbara), $k = 1$ (Celarent, Darii) et $k = 2$ (Ferio).

Par ailleurs, si la conclusion est symétrique, donc égale à sa transposée, le syllogisme en engendre 2, lui-même et son transposé, défini selon (2-2). Telle est la Règle 2, laquelle s'applique aux dérivés du Celarent et du Darii.

En conclusion, nous sommes arrivés à déduire ainsi $2^0 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^1 + 2^2 = 13$ syllogismes (catégoriques) classiques, que l'on trouvera au tableau I.

4.6. — Il existe cependant 2 autres dérivés classiques du Ferio, que nous obtenons en changeant M en $\bar{M}$ (négation du moyen terme), c'est-à-dire en niant à droite le premier facteur et à gauche le second facteur. Nous appellerons «*anticonjugaison d'un produit*» cette opération étrangère à la

logique classique (la conjugaison d'un produit $\mathcal{P} \circ \mathcal{R}$ engendre $\mathcal{N} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{N} = \mathcal{P}^* \circ \mathcal{R}^*$). Le procédé donne immédiatement le

«Baroco»:

$$(4-9) \quad \mathcal{O} = \mathcal{I} \circ \mathcal{E} = \mathcal{I} \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{E} = \mathcal{O} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{O} \circ \tilde{\mathcal{A}}$$

(L'égalité $\mathcal{A}^* = \mathcal{N} \circ \mathcal{E}$ se lit directement sur la pyramide logique; et comme $\mathcal{A}$ est hermitique, on a $\mathcal{A}^* = \tilde{\mathcal{A}}$).

Le Baroco est hermitique comme le Barbara, en ce sens que ses trois composantes sont hermitiques; d'après le théorème 1 du n° 2.3, ses prémisses commutent, et cette commutation engendre le

«Bocardo»

$$(4-10) \quad \mathcal{O} = \tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{O}$$

Ignorant donc l'anticonjugaison, les Scolastiques ramenaient le Baroco et le Bocardo au Barbara au moyen d'une «réduction par l'absurde»; c'est ce que rappelle la présence de la consonne «c» dans le nom du syllogisme. Nous n'avons donc pas besoin de cette opération classique, étrangère aux règles et aux calculs élémentaires que nous employons ici.

Par conséquent, la consonne «B» initiale ne correspond pas à une classification conforme à nos règles. Le Baroco et le Bocardo sont des syllogismes en «o» (final), du type Ferio.

4.7. — Il se fait cependant que l'initiale «B» désigne une propriété très importante de ces trois syllogismes: *leurs trois composantes sont des ordres* (relations hermitiques non symétriques), trois ordres non stricts pour le Barbara, un ordre non strict (en prémisses) et deux ordres stricts pour le Bocardo et le Baroco. Pour ces raisons, nous prendrons ces trois syllogismes et leurs conjugués comme «générateurs» dans la théorie générale du syllogisme catégorique, classique ou non (§ 6).

4.8. — Nous avons ainsi obtenu 15 syllogismes classiques, résumés par le tableau I. Nous les avons appelés «directs», pour rappeler qu'ils ne comportent effectivement que 3 com-

Tableau I

Les 15 syllogismes directs classiques				
Conclu- sions	1 ^{ère} figure	2 ^e figure	3 ^e figure	4 ^e figure
$\mathcal{A} =$	$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ Barbara			
$\mathcal{E} =$	$\mathcal{A} \circ \mathcal{E}$ Celarent	$\mathcal{A} \circ \tilde{\mathcal{E}}$ Cesare		
		$\mathcal{E} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ Camestres		$\tilde{\mathcal{E}} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ Calemes
$\mathcal{I} =$	$\mathcal{I} \circ \mathcal{A}$ Darii		$\tilde{\mathcal{I}} \circ \mathcal{A}$ Datisi	
			$\tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{I}$ Disamis	$\tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{I}}$ Dimatis
$\mathcal{O} =$	$\mathcal{I} \circ \mathcal{E}$ Ferio	$\mathcal{I} \circ \tilde{\mathcal{E}}$ Festino	$\tilde{\mathcal{I}} \circ \mathcal{E}$ Ferison	$\tilde{\mathcal{I}} \circ \tilde{\mathcal{E}}$ Fresison
		$\mathcal{O} \circ \tilde{\mathcal{A}}$ Baroco		
			$\tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{O}$ Bocardo	

posantes, ce qui n'est pas du tout le cas des autres syllogismes classiques, que nous allons étudier maintenant.

§ 5. — *Les syllogismes classiques indirects*

5.1. — La logique classique connaît 24 syllogismes valides. Parmi ceux qui ne figurent pas au tableau I, citons d'abord: 1°) Bamalip; 2°) Darapti, Felapton, Fesapo.

Ces 4 syllogismes sont tous étrangers à la 1^{re} figure, et tous se ramènent à cette figure par l'opération connue classiquement sous le nom de «conversion par limitation», — ainsi que le rappelle la présence de la lettre «p» dans les 4 noms.

5.2. — Cette opération classique est exactement une *projection*, un passage de l'universel au particulier. Donc le projecteur $\mathcal{J}$ doit figurer dans les produits relationnels caractéristiques de ces syllogismes, *mais en tant que 3^e facteur*. Ces syllogismes ont donc plus de 3 composantes, et pour cela nous les appellerons des *syllogismes indirects*.

C'est ce que montrent les énoncés *complets* de ces syllogismes en langage ordinaire. Par exemple: 1°) Darapti: Tout M est S, d'où quelque S est M, tout M est P, donc quelque S est P. 2°) Bamalip: Tout M est S, tout P est M, donc tout P est S, d'où quelque S est P. Dans ces énoncés nous avons fait précéder la 4^e composante par «d'où», souligné.

Ainsi le produit caractéristique du Darapti sera $\tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{A}$ = $\mathcal{J}$ et celui du Bamalip $\tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}$. Felapton et Fesapo auront, comme Darapti, un $\mathcal{J}$ en facteur du milieu, — ce qui justifie la distinction en (1°)(2°) au n° 5.1.

On ne peut évidemment associer le $\mathcal{J}$ à l'un des facteurs voisins, car alors on ne définirait qu'un syllogisme direct.

5.3. — Restent enfin 5 syllogismes classiques auxquels les Scolastiques n'ont donné aucun nom parce qu'ils découlent immédiatement des 5 syllogismes universels par application de

Tableau II

Les 9 syllogismes indirects classiques				
Conclu- sions	1 ^{ère} figure	2 ^e figure	3 ^e figure	4 ^e figure
$\mathcal{I} =$	$\mathcal{I} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{A}$ Barbarip (3°)			
				$\sim \mathcal{A} \circ \sim \mathcal{A} \circ \mathcal{I}$ Bamalip (1°)
			$\sim \mathcal{A} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{A}$ Darapti (2°)	
$\mathcal{O} =$	$\mathcal{I} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{E}$ Celarop (3°)	$\mathcal{I} \circ \mathcal{A} \circ \sim \mathcal{E}$ Cesarop (3°)		
		$\mathcal{I} \circ \mathcal{E} \circ \sim \mathcal{A}$ Camestrop (3°)		$\mathcal{I} \circ \sim \mathcal{E} \circ \sim \mathcal{A}$ Calemosp (3°)
			$\sim \mathcal{A} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{E}$ Felapton (2°)	$\sim \mathcal{A} \circ \mathcal{I} \circ \sim \mathcal{E}$ Fesapo (2°)

la projection «p» à la conclusion. Ce sont donc, eux aussi, des syllogismes indirects, auxquels nous donnerons les noms ci-après, pour rester dans la note: 3°) Barbarip; Camestrop,

Calemosp, Cesarop, Celarop. Ces noms sont issus de ceux des syllogismes directs correspondants.

5.4. — Le tableau II rassemble les 9 syllogismes indirects classiques. Nous les avons classés en (1°)(2°)(3°) selon que le facteur $\mathcal{J}$ complémentaire se trouve respectivement à droite, ou au milieu, ou à gauche du produit caractérisant le syllogisme direct initial. Cette classification décompose le cardinal 9 en $9 = 1 + 3 + 5$.

Le Darapti est auto-transposé, tandis que le Bamalip et le Barbarip sont transposés l'un de l'autre. Le Bamalip est le seul, parmi les 9, qui découle d'un syllogisme non classique, à savoir le conjugué $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}^*$ du Barbara; il est le seul où le projecteur $\mathcal{J}$ figure à droite. La transposition des syllogismes en «o» ne fournit aucun syllogisme classique, puisque $\mathcal{O}^* = \tilde{\mathcal{O}}$ est étranger à la logique traditionnelle.

§ 6. — *Théorie symétrique générale du syllogisme direct*

6.1. — Telle que nous venons de la reconstruire sur des bases algébriques, la théorie classique du syllogisme direct présente une asymétrie flagrante, laquelle se manifeste clairement dans le tableau I. L'origine de cette asymétrie n'est autre que le bannissement de tous les «jugements conjugués» (représentés par des lettres étoilées dans la pyramide logique, fig. 2).

Historiquement, cet ostracisme a dû reposer sur des motivations d'ordre ontologique. Aussi n'en voit-on plus très bien aujourd'hui la raison d'être, dans une Logique qui se veut purement formelle. C'est ce que va nous montrer l'exemple ci-après, emprunté à la mathématique dite moderne, science formelle s'il en est:

6.2. — L'univers du discours étant $\mathcal{P}(\mathbb{E})$, où $\mathbb{E}$ est un vectoriel à n dimensions, considérons les systèmes $\in \mathcal{P}(\mathbb{E})$, comptant un nombre fini de vecteurs, et, parmi ces systèmes: 1°) ceux qui sont (linéairement) liés, dont l'ensemble sera noté

$L \subset \mathcal{P}(\mathbb{E})$, et ceux qui sont libres (non liés, non L), dont l'ensemble est $F = \bar{L}$; 2°) ceux (dont l'ensemble est N) qui rassemblent plus de n vecteurs, et ceux (les non- N , dont l'ensemble est $\bar{N} = M$) qui ne rassemblent pas plus de n vecteurs.

La proposition bien connue «tout système de plus de n vecteurs est lié», constitue un jugement du type $\mathcal{A}$: $N \subset L$. Mais on peut lui substituer 8 énoncés équivalents (lui-même y compris), qui sont tous intéressants, et tous d'usage courant. Ces 8 énoncés sont les suivants, que l'on traduira aisément en langage ordinaire:

$$(6-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{type } \mathcal{A} : N \subset L \text{ et } L \subset M \\ \text{type } \mathcal{E} : N \subset \bar{F} \text{ et } F \subset \bar{M} \\ \text{type } \mathcal{E}^* : \bar{M} \subset L \text{ et } \bar{F} \subset N \\ \text{type } \mathcal{A}^* : \bar{M} \subset \bar{F} \text{ et } \bar{L} \subset \bar{N} \end{array} \right.$$

Supposons que ladite proposition doive servir de majeure dans un raisonnement syllogistique à conclusion universelle. Alors, selon la théorie scolastique: 1°) Les 4 dernières formes seraient à rejeter, puisqu'elles ne figurent dans aucun syllogisme «officiel». 2°) Les 4 premières, en revanche, seraient acceptées, mais elles figureraient dans des syllogismes «officiellement distincts», Barbara, Celarent ou Cesare, selon les cas. L'incohérence des discriminations classiques saute ici aux yeux.

Peut-être cette incohérence aurait-elle été moins frappante si nous avions raisonné à partir de l'antique exemple de jugement $\mathcal{A}$: «tous les hommes sont mortels», jugement aux relents certains d'ontologisme...

6.3. — La conclusion de ceci, c'est que la théorie asymétrie traditionnelle aboutit à un dénombrement trop pauvre des types de syllogismes, — ou trop riche, selon les points de vue, tout dépendant ici des inférences dont on tiendra ou dont

on ne tiendra pas compte, lors de la définition des types distincts.

Par exemple, si l'on exclut les inférences par «figures», il ne reste que 8 syllogismes (1 par ligne du tableau I), — ou plutôt, selon la langue rigoureuse de l'algébriste, 8 *classes d'équivalence*, (équivalence par transposition de l'une ou l'autre prémisses symétrique, s'il s'en présente).

Mais si au contraire on rejette toute équivalence, en déclarant que toute symétrie (autre que l'identité) engendre un nouveau type de syllogisme, — et ce par définition même, — alors on arrive aux 96 syllogismes distincts de la *théorie symétrique*, que nous allons développer sans peine:

6.4. — Ainsi qu'annoncé au n° 4.7, adoptons comme *générateurs* les produits d'hermitiques dont le résultat est hermitique:

$$(6-2) \quad \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3$$

étant entendu que ces trois $\mathcal{H}_i$ sont des éléments (éventuellement transposés) du carré logique traditionnel.

D'après tout ce qui précède, il existe 3 générateurs de type classique, et 3 seulement, «les trois B», que nous rappelons ici:

$$(6-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Baroco} : \mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} : (S \subset M) \circ (M \subset P) = (S \subset P) \\ \text{Barbara} : \mathcal{O} \circ \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{O} : (S \not\subset M) \circ (P \subset M) = (S \not\subset P) \\ \text{Bocardo} : \tilde{\mathcal{A}} \circ \mathcal{O} = \mathcal{O} : (M \subset S) \circ (M \not\subset P) = (S \not\subset P) \end{array} \right.$$

6.5. — Les autres syllogismes de la théorie symétrique vont se déduire par des opérations de symétries, dont l'ensemble forme un groupe d'opérateurs. Ce groupe est le produit direct de deux de ses sous-groupes:

1°) Le groupe des symétries «par figures», dont les opérations remplacent l'une des deux prémisses $\mathcal{H}$ (ou les deux, ou aucune) par sa conjuguée hermitique $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$; par exemple, une de ces opérations transforme $(S \subset M)$ en $(\bar{M} \subset \bar{S})$. Comme dans

la théorie classique, ces opérations ne peuvent porter sur la conclusion; en effet, c'est en ordonnant ses termes S et P que la conclusion $\mathcal{H}_3$ définit, par opposition, le «sujet» et le «prédicat». On a bien, par exemple, $(S \subset P) = (\bar{P} \subset \bar{S})$, mais $(\bar{P} \subset \bar{S})$ n'est qu'une conclusion mal écrite, où l'on a noté P le sujet et S le prédicat. Ce groupe compte 4 opérations, et il engendre 4 syllogismes à partir de chacun des générateurs.

2°) Le groupe des symétries «par négations», dont les opérations consistent à nier soit zéro, soit un, soit deux, soit trois des termes S, M, P. Le groupe compte $2^3 = 8$ opérations, dont chacune engendre 8 syllogismes à partir des générateurs et de leurs dérivés par figures.

On arrive ainsi au total de $3 \times 4 \times 8 = 96$ syllogismes directs, classiques ou non classiques.

6.6. — On peut classer autrement les symétries: A chacun des générateurs correspond son conjugué simple:

$$(6-4) \quad \mathcal{N} \circ \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ \mathcal{H}_3 \circ \mathcal{N} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{H}_1^* \circ \mathcal{H}_2^* = \mathcal{H}_3^*$$

ce qui porte à 6 le nombre de générateurs au sens large, c'est-à-dire classiques ou non classiques, à partir desquels le groupe (1°) des figures produit 24 syllogismes, dont les trois composantes sont hermitiques. L'opération (6-4) faisait partie du groupe (2°) des négations, et nous devons donc l'en supprimer; ce groupe se réduit alors à 4 opérations, lesquelles vont porter à $24 \times 4 = 96$ le nombre des types de syllogismes. Parmi ceux-ci, il en existe 72 qui comportent au moins une relation symétrique (non hermitique) parmi leurs 3 composantes.

6.7. — Inutile de préciser que nous n'avons parlé que de syllogismes valides. Notre comptage n'a rien à voir avec le comptage traditionnel qui aboutit à 256 syllogismes, valides ou non. Pareil comptage n'a d'ailleurs pas plus de sens que celui

qui conclurait à l'existence de 2^3 produits $a \times b = c$, lorsque les nombres a, b, c ne peuvent valoir que ± 1 .

6.8. — Pour terminer, signalons que plusieurs des règles traditionnelles de validité se ramènent à une seule *règle de parité*. Un jugement sera *pair* (ou affirmatif) s'il contient un nombre pair de négations, celles-ci portant indifféremment sur les termes ou sur le signe d'inclusion (n° 3.2); il sera impair dans le cas contraire. La parité d'un syllogisme est le produit des parités de ses 3 composants. Donc, d'après (6-3), les 3 générateurs sont tous pairs.

Or, la parité est un invariant du groupe des 32 symétries. En effet: 1°) Une symétrie par négations ne peut changer la parité, puisque chacun des termes S, M, P , figure deux fois dans (6-3); 2°) Il en va de même pour les symétries par figures, telles que $(S \subset M) = (\bar{M} \subset \bar{S})$ par exemple.

Par conséquent, les 96 syllogismes de la théorie symétrique sont *tous pairs*. Cette théorie ayant conduit à un dénombrement exhaustif, on a la règle de parité: *Un syllogisme valide ne peut être impair.*

Mons

P. V. GROSJEAN

NOTES

(¹) P. V. Grosjean: Identité, en logique formelle, des notions algébriques de «Relation» et de «Composition» binaires. (*Mathematica & Paedagogia*, N° 44, 1970).

(²) Ainsi, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un treillis de Boole, ordonné par la loi d'inclusion, et dont la base est constituée par les singletons de E . Et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ est une trame dont la base est l'ensemble des singletons de $\mathcal{P}(E)$.

(³) Mot employé ici par analogie avec la théorie des matrices complexes en algèbre ordinaire.