DÉMONSTRATION D'UNE CONJECTURE DE J. H. HARRIS

Maurice BOFFA

Soit G la théorie des ensembles de Gödel [1] comprenant les axiomes A, B, C et E. J. H. Harris [2] (p. 298) a conjecturé que les deux axiomes suivants sont mutuellement indépendants relativement à G:

AS: $A^*(x) \simeq A^*(y) \longrightarrow x = y$ (Axiome de Structure); (1)

LIM: quel que soit $n \geqslant 0$, il n'existe pas de suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ telle que $x_0 \in x_1 \in \ldots \in x_n \in x_0$ (Axiome de Limitation).

En vue de démontrer cette conjecture, notons D_a l'axiome suivant:

$$(\forall X \neq \emptyset)(\exists x \in X)(x \cap X \subseteq a).$$

Le résultat suivant est bien connu:

LEMME. *Si G est non-contradictoire, alors les deux théories suivantes sont non-contradictoires:*

$G_1 = G + (\exists a)(a = \{a\} \wedge D_a)$;

$G_2 = G +$ il existe un ensemble infini a de la forme $\{x_i \mid i \in \omega\}$ avec $x_i = \{x_{i+1}\}$ pour tout $i \in \omega$, tel que D_a.

Grâce à ce Lemme, il nous suffit donc de prouver le

THÉORÈME. $G_1 \vdash AS \wedge \neg LIM$; $G_2 \vdash LIM \wedge \neg AS$.

Démonstration:

(1) Plaçons-nous dans G_1. Soit a un ensemble tel que $a = \{a\}$ et D_a. On a immédiatement $\neg$LIM, puisque $a \in a$. Afin de démontrer AS, notons $\Psi(x)$ la formule suivante:

$$(\exists y \neq x)(A^*(y) \simeq A^*(x)).$$

(1) $A^*(x) = \{x\} \cup A(x)$ où $A(x) = x \cup (\cup x) \cup (\cup \cup x) \cup \ldots$

Posons $X = \{x \mid \Psi(x)\}$. Il faut prouver que $X = \emptyset$. Raisonnons par l'absurde. Si $X \neq \emptyset$, alors (grâce à D_a) il existe un $x \in X$ tel que $x \cap X \subseteq a$, c.-à-d. tel que $x \cap X = \emptyset \vee x \cap X = a$.

1er cas: $x \cap X = \emptyset$.

Dans ce cas, soit $y \neq x$ tel que $A^*(y) \simeq A^*(x)$. Soit f un isomorphisme de $A^*(y)$ sur $A^*(x)$. Montrons que $fy = x$. Si $fy \neq x$, alors soit $z \in A^*(y)$ tel que $fz = x$. On a $z \neq y$, donc $z \in A(y)$, de sorte qu'il existe une suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de $A^*(y)$ tels que $z \in x_0 \in x_1 \in \ldots \in x_n = y$, d'où

$$x = fz \in fx_0 \in fx_1 \in \ldots \in fx_n = fy. \qquad (*)$$

De même, puisque $fy \neq x$, on a $fy \in A(x)$, donc il existe une suite $y_0, y_1, \ldots, y_m$ d'éléments de $A^*(x)$ tels que

$$fy \in y_0 \in y_1 \in \ldots \in y_m = x. \qquad (**)$$

(*) et (**) impliquent

$$x \in fx_0 \in fx_1 \in \ldots \in fx_n \in y_0 \in y_1 \in \ldots \in y_m = x,$$

d'où (en appliquant D_a pour $X = \{fx_0, fx_1, \ldots, fx_n, y_0, y_1, \ldots, y_m\}$) $x = a$, d'où $a \in x \cap X$, en contradiction avec l'hypothèse $x \cap X = \emptyset$. Nous savons donc que $fy = x$. Pour tout $z \in y$, on a donc $fz \in x$ et $A^*(z) \simeq A^*(fz)$, d'où (puisque $x \cap X = \emptyset$) $fz = z$, ce qui prouve que $y \subseteq x$. Mais $x \neq y$, donc il existe un $v \in x$ tel que $v \notin y$. Soit $u \in y$ tel que $fu = v$. On a $v \in x$ et $A^*(u) \simeq A^*(v)$, d'où (puisque $x \cap X = \emptyset$) $u = v$, ce qui est absurde.

2iè cas: $x \cap X = a$.

Dans ce cas, $a \in X$, donc il existe un $y \neq a$ tel que $A^*(y) \simeq A^*(a)$, d'où $y = \{y\}$, d'où (en appliquant D_a pour $X = y$) $y = a$, ce qui est absurde.

(2) Plaçons-nous dans G_2. Soit a un ensemble infini de la forme $\{x_i \mid i \in \omega\}$ avec $x_i = \{x_{i+1}\}$ pour tout $i \in \omega$ et tel que D_a. a étant infini, il est clair que les x_i sont distincts. On a donc immédiatement $\neg AS$, puisque $A^*(x_0) \simeq A^*(x_1)$ et $x_0 \neq x_1$. Il reste à prouver LIM. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il

existe une suite $y_0, y_1, \ldots, y_n$ telle que $y_0 \in y_1 \in \ldots \in y_n \in y_0$. Dans ce cas (en appliquant D_a pour $X = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$) il existe un i tel que $y_i \in a$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, d'où (a étant transitif) $y_0 \in a$, de sorte qu'il existe un j tel que

$$\begin{aligned} y_0 &= x_j, \\ y_n &= x_{j+1}, \\ y_{n-1} &= x_{j+2}, \\ &\ldots \\ y_1 &= x_{j+n}, \\ y_0 &= x_{j+n+1}, \end{aligned}$$

d'où $x_j = x_{j+n+1}$, ce qui est absurde, puisque les x_i sont distincts.

Charge de recherches du FNRS.
Bruxelles Maurice BOFFA

RÉFÉRENCES

[1] K. GÖDEL, *The consistency of the continuum hypothesis.* Princeton, 1940.
[2] J. H. HARRIS, On the axioms of choice and regularity. *Logique et Analyse,* 51 (1970), p. 273-301.