POUR UNE LOGIQUE DE L'«ENTAILMENT»

A. BAYART

1. Le mot anglais «entailment» désigne la notion intuitive vague de «conséquence logique» par opposition aux notions précises d'«implication matérielle» et d'«implication stricte», qui font l'objet respectivement de la logique bivalente des propositions et des logiques modales de Lewis.

De nombreux logiciens estiment que ces notions précises correspondent mal à la notion intuitive de «conséquence logique» et que cette non correspondance se manifeste dans les théorèmes dits «paradoxaux». Ces théorèmes affirment, concernant l'implication matérielle, que le faux implique tout et que tout implique le vrai, et, concernant l'implication stricte, que l'impossible implique tout et que tout implique le nécessaire.

Ces logiciens cherchent alors à formuler de nouvelles théories formalisées où les théorèmes paradoxaux ne pourraient être déduits. Il ne semble pas, cependant, que l'on soit arrivé à formuler une théorie qui aurait obtenu une adhésion suffisamment générale de ceux qui s'intéressent à la question. Il semble au contraire que toutes les théories proposées aboutissent à l'un ou l'autre résultat contre-intuitif difficilement acceptable.

2. Peut-être les logiciens, qui s'attachent au problème de l'«entailment», ne sont-ils pas suffisamment conscients de la situation philosophique dans laquelle on se trouve placé, quand on veut formuler une théorie précise d'une notion vague. Cela suppose que l'on *substitue* à la notion vague une notion précise. Il existe, sans doute, quelques cas privilégiés, où il a été possible de se donner une notion précise apparemment co-extensive avec la notion vague, en ce sens que tout porte à croire que, chaque fois que la notion vague trouvera à s'appliquer, il en sera de même de la notion précise et inversement.

Quand il s'agit de l'«entailment», rien ne permet de dire a priori que l'on se trouve dans un pareil cas privilégié, et il s'ensuit que l'on doit peut-être se résigner à adopter une notion précise qui, parce que non co-extensive avec la notion vague, s'appliquera à des cas où la notion vague ne s'applique pas, et conduira ainsi à des théorèmes paradoxaux. Une pareille considération n'incite cependant pas nécessairement à renoncer à toute recherche en matière d'«entailment» et à décréter qu'il n'y a pas lieu de chercher mieux que les systèmes de Lewis.

On peut encore toujours chercher des systèmes qui, sans éviter tout paradoxe, seraient quand-même moins paradoxaux que ceux de Lewis.

3. Il est assez naturel de dire que B est la conséquence logique de A, si la logique permet de démontrer que, si A est vrai, alors B est vrai. Cela revient à dire que B est la conséquence logique de A, si la logique permet de démontrer que A implique matérielement B. Bref, la relation de «conséquence logique» ne serait autre chose que celle d'«implication matérielle logiquement démontrable».

Il s'ensuit que pour formuler une théorie précise de la relation de «conséquence logique» il faut faire une théorie précise concernant les notions «démontrable» et «logiquement». Or il y a de bonnes raisons de croire que la notion «démontrable» à trouvé une expression intuitivement entièrement satisfaisante dans la logique modale S4 de Lewis.

Malgré cela on constate que cette logique, par la présence des théorèmes paradoxaux de l'implication stricte, cesse d'être intuitivement satisfaisante quand on traduit la notion vague de «conséquence logique» par la notion d'«implication matérielle démontrable» c'est-à-dire par la notion précise d'«implication stricte». Il semble en effet contre-intuitif de dire que le réfutable implique tout et que le démontrable est impliqué par tout.

Ce résultat contre-intuitif s'explique si l'on définit la «conséquence logique» comme étant, non «l'implication matérielle démontrable», mais «l'implication matérielle *logiquement* démontrable». En effet cette définition suggère que le système S4 de Lewis est inadéquat pour faire la théorie de la conséquence logique, parce que dans ce système on ne fait pas la distinction entre la démontrabilité logique et d'autres formes de démontrabilité.

4. Tous les logiciens seront d'accord pour admettre que l'on

fasse la distinction entre la démontrabilité dans les sciences logico-mathématiques et la démontrabilité dans les sciences empiriques. Toutefois les logicistes soutiennent, et non sans de sérieuses raisons, que logique et mathématique ne constituent qu'une seule science, et on peut dès lors prévoir qu'ils s'opposeront à toute distinction entre la démontrabilité logique et la démontrabilité mathématique.

Il s'ensuit, semble-t-il, que la logique de l'«entailment», qui suppose la distinction entre la démontrabilité logique et une ou plusieurs autres formes de démontrabilité, ne pourra trouver à s'appliquer qu'aux sciences empiriques.

On peut cependant être d'avis que, quelque fondés que soient les arguments en faveur du logicisme, ce serait du dogmatisme exagéré que de s'opposer à toute convention par laquelle on établirait une distinction entre la logique et la mathématique. Le fait est que les mots «logique» et «mathématique» appartiennent tous deux au langage courant et que le sens commun ne les considère pas comme synonymes. C'est dire que le sens commun établit, d'une manière vague il est vrai, une distinction entre ces deux disciplines.

Une théorie de l'«entailment» applicable aux théories logico-mathématiques exigera que l'on fasse cette distinction d'une manière précise.

Cela peut se faire par des conventions qui, tout en étant dans une certaine mesure arbitraires, sont cependant, dans une très large mesure, naturelles, c'est-à-dire conformes aux vues du sens commun.

On admettra qu'il est naturel, dans l'arithmétique du premier ordre, de considérer comme logiques les postulats (axiomes et règles de déduction) de la logique des prédicats du premier ordre avec identité, et de considérer les axiomes de Peano et les définitions récursives de l'addition et de la multiplication comme extralogiques et mathématiques. Dans la théorie des types il n'est pas antinaturel de considérer l'ensemble des postulats comme logiques à l'exception de l'axiome d'infinité qui sera considéré comme mathématique.

On hésitera davantage quand il s'agira de la théorie des ensembles. On peut considérer comme logiques les postulats de la logique du premier ordre et comme mathématiques tous les autres postulats. On peut aussi ajouter aux postulats logiques le principe d'extensionnalité ou même tous les autres postulats à l'exception de l'axiome d'infinité. La liberté et, dès lors, l'arbitraire, qui affecte dans une certaine mesure des conventions de ce genre, ne sont pas une raison décisive pour s'interdire de faire de pareilles conventions et de fonder sur elles certaines théories.

5. Supposons que, dans une théorie logico-mathématique, nous ayons fait la distinction entre les postulats logiques et les postulats mathématiques. On dira alors que A découle logiquement de B si et uniquement si l'énoncé «A implique matériellement B» est démontrable à partir des seuls postulats logiques.

On pourra dire encore que dans ce cas «A implique logiquement B» et traduire ainsi le mot anglais «entails».

On voit aisément que l'on évite ainsi dans une certaine mesure les paradoxes de l'implication stricte. S'il est vrai que l'on aura encore que le logiquement réfutable implique logiquement tout, et que le logiquement démontrable est impliqué logiquement par tout, on n'aura pas cependant en général que le mathématiquement réfutable implique logiquement tout ou que le mathématiquement démontrable est impliqué logiquement par tout.

On peut soutenir alors qu'en évitant dans cette mesure les paradoxes de l'implication stricte, on s'est rapproché suffisamment du sens commun pour avoir une théorie intuitivement acceptable. On peut en effet soutenir que les implications logiques paradoxales, qui subsistent, ne contredisent pas à proprement parler le sens commun, mais concernent des cas que d'habitude le sens commun n'envisage pas. Quand un mathématicien songe «candidement» au fait qu'un énoncé mathématique découle logiquement d'un autre énoncé mathématique, il n'envisage en général que des énoncés dont aucun n'est soit un truisme soit une absurdité logique.

6. Telle qu'elle est analysée ici, la notion d'«entailment» se définit à partir d'une distinction entre la démontrabilité logique et la démontrabilité mathématique. Or le langage mathématique usuel ne contient pas de modalités qui exprimeraient ces notions de démontrabilité.

Il faudra donc, à première vue, introduire dans le langage mathématique deux modalités correspondant à chacune de ces notions de démontrabilité.

En réalité il est possible de se borner à introduire dans le langage-objet une seule modalité qui désigne la démontrabilité logique et qui sera régie par la logique modale S4, mais il faut introduire dans le métalangage deux symboles distincts d'assertion, l'un pour l'assertion des théorèmes logiques et l'autre pour l'assertion des théorèmes soit logiques soit mathématiques. Il faut alors aussi recourir à une technique, qui permet d'appliquer aux théorèmes logiques la règle de déduction d'après laquelle de A on peut déduire que A est démontrable, mais qui évite d'appliquer cette règle aux théorèmes mathématiques.

Dans les deux paragraphes qui suivent nous montrons comment on peut appliquer d'une manière précise les idées développées ci-dessus à l'arithmétique du premier ordre.

7. L'alphabet du langage-objet de l'arithmétique comprend les 17 symboles suivants:

$$' \, a \, (\,) \, 0 \, 1 \, + \, \times \, = \, N \, K \, A \, C \, E \, D \, P \, S$$

Le premier de ces symboles est appelé «accent».

Une expression du langage-objet est une série finie de symboles de l'alphabet.

Nous employons les lettres «u», «v», «t», «s», «p» et «q» comme variables syntaxiques pour désigner des expressions quelconques du langage-objet. Nous nous donnons des expressions syntaxiques en formant des séries comportant des variables syntaxiques et de symboles de l'alphabet autres que l'accent et la lettre «a». Dans ces expressions syntaxiques les symboles de l'alphabet sont autonymes. Ainsi, à supposer que la variable syntaxique «u» désigne l'expression «+('0 = N», l'expression syntaxique «N(uS» désignera l'expression «N(+('0 = NS».

Les règles de formation du langage sont alors les suivantes. Les variables sont les expressions formées par la lettre «a» suivie d'un nombre fini (éventuellement nul) d'accents.

Les variables sont des termes.

Le symbole 0 est un terme.

Si t et s sont des termes, lt, (t+s) et (t×s) sont des termes. Il n'y a pas d'autres termes que ceux qui sont construits d'après les règles qui précèdent.

Si t et s sont des termes, (t=s) est une formule.

Si p et q sont des formules, Np, Kpq, Apq, Cpq, Epq et Dp sont des formules.

Si p est une formule et si u est une variable, Pup et Sup sont des formules.

Il n'y a pas d'autres formules que celles qui sont construites d'après les règles qui précèdent.

Pour la compréhension intuitive du langage nous signalons que le symbole «1» désigne la fonction +1, que le symbole D désigne la modalité «démontrable» et que les expressions Pu et Su sont des quantificateurs universels et particuliers respectivement.

Une formule qui entre, conformément aux règles qui précèdent, dans la construction d'une formule plus longue p est appelée «une partie bien formée de p». Toute formule est considérée comme une partie bien formée d'elle même.

Par «occurrences» d'une variable nous entendons les exemplaires de cette variable qui figurent à un endroit déterminé dans une expression.

Dans une formule de la forme (t=s) toutes les occurrences de variables sont dites «libres dans cette formule».

Si une occurrence d'une variable est libre dans une formule p, elle est libre dans les formules Np, Kpq, Apq, Cpq, Epq, Kqp, Aqp, Cqp, Eqp et Dp. Si une occurrence d'une variable autre que la variable u est libre dans une formule p, elle est libre dans les formules Pup et Sup.

Si une occurrence d'une variable u est libre dans une formule p, elle est liée dans les formules Pup et Sup.

Si aucune des parties bien formées q d'une formule p qui commencent par Pv ou Sv, où v est une variable qui figure dans le terme t, ne contient une occurrence de la variable u à l'état libre dans q, on dit que la variable u est disponible dans la formule p pour le terme t.

8. Nous employons les expressions syntaxiques "L:" et "M:" comme signes d'assertion logique et mathématique respective-

ment. Dans ce qui suit les variables syntaxiques "p", "q" et "g" désignent des formules du langage-objet.

Les postulats logiques du système sont les 20 schèmes d'axiomes, les 6 axiomes et les 4 règles de déduction qui suivent.

(1)L: CpCqp; (2)L: CCpCpqCpq; (3)L: CCpqCCqgCpg;
(4)L: CKpqp; (5)L: CKpqq; (6)L: CCpqCCpgCpKqg;
(7)L: CpApq; (8)L: CqApq; (9)L: CCpgCCqgCApqg;
(10)L: CEpqCpq; (11)L: CEpqCqp; (12)L: CCpqCCqpEpq;
(13)L: CpNNp; (14)L: CNNpp; (15)L: CCpqCNqNp;
(16)L: CDpp; (17)L: CDCpqCDpDq; (18)L: CDpDDp.

Dans les schèmes (19) et (20) qui suivent, p est une formule où la variable u est disponible pour le terme t, et q est la formule qui résulte de la substitution du terme t à toutes les occurrences libres de la variable u dans p.

(19)L: CPupq; (20)L: CqSup;
(21)L: $(a=a)$; (22)L: $C(a=a')(a'=a)$;
(23)L: $CK(a=a')(a'=a'')(a=a'')$;
(24)L: $C(a=a')(la=la')$; (25)L: $CK(a=a'')(a'=a''')((a+a')=(a''+a'''))$;
(26)L: $CK(a=a'')(a'=a''')((a\times a')=(a''\times a'''))$.

(27) $\dfrac{L\colon p \quad L\colon Cpq}{L\colon q}$; (28) $\dfrac{L\colon p}{L\colon Dp}$;

Dans les règles de déduction (29) et (30) qui suivent p est une formule qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable u.

(29) $\dfrac{L\colon Cpq}{L\colon CpPuq}$; (30) $\dfrac{L\colon Cqp}{L\colon CSuqp}$

Les postulats mathématiques du système sont le schème d'axiomes, les 6 axiomes et les 4 règles de déduction qui suivent. Dans le schème (31) qui suit q est la formule qui résulte de la substitution du terme lu à toutes les occurrences libres de la variable u dans p, et g est la formule qui résulte de la substitution du terme O à toutes ces occurrences.

(31)M: CKgPuCpqPup;

(32)M: N(1a=0); (33)M: (1a=1a′)(a=a′);

(34)M: ((a+0)=a); (35)M: ((a+1a′)=1(a+a′));

(36)M: ((a×0)=0); (37)M: ((a×1a′)=((a×a′)+a));

$$(38)\ \frac{\text{L: p}}{\text{M: p}}\,; \qquad 39)\ \frac{\text{M: p}\quad\text{M: Cpq}}{\text{M: q}}\,.$$

Dans les règles de déduction (40) et (41) qui suivent p est une formule qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable u.

$$(40)\ \frac{\text{M: Cpq}}{\text{M: CpPuq}}\,; \qquad (41)\ \frac{\text{M: Cqp}}{\text{M: CSuqp}}\,.$$

Une formule p est dite être un théorème logique si "L: p" peut être déduit; elle est dite être un théorème mathématique si "M: p" peut être déduit. Du postulat (38) il résulte que tous les théorèmes logiques sont des théorèmes mathématiques.

On pourrait s'étonner de ne pas rencontrer le postulat suivant: L: C(a=a′) D(a=a′). L'introduction de ce postulat aurait toutefois comme conséquence que pour de nombreuses formules p (par exemple les axiomes 34 à 37), dont on pourrait démontrer facilement qu'elles sont des théorèmes mathématiques mais non logiques, on pourrait déduire M: Dp. Or ceci ne correspondrait pas à notre intention de considérer que "D" exprime la notion de démontrabilité logique".

Pour que le système corresponde à nos intentions il faut que M: Dp ne puisse être déduit que si p est un théorème logique. On ne pourrait toutefois prouver par des procédés élémentaires que le système possède cette propriété, car celle-ci implique la non contradiction de l'arithmétique.

A. Bayart