

VÉRIFICATION ET JUSTIFICATION COMME AUXILIAIRES DE LA DÉMONSTRATION

Gilles Gaston GRANGER

1. Le point de vue que nous adopterons ici, d'une épistémologie entendue comme philosophie de *l'œuvre* scientifique, ne signifie nullement que nous récusions d'autres perspectives. Mais il exclut, d'une part, que nous tentions une analyse de la *conscience* démonstrative, d'autre part, que nous nous référions à des paradigmes virtuels de connaissance plutôt qu'aux travaux réels de la pensée scientifique. Cette dernière nous paraît assurément centrée sur la démonstration; non qu'il soit possible de nier la validité d'une science descriptive rationnelle; mais nous refusons d'interpréter cette description comme description d'essences, et la science comme une mise au jour exhaustive de ce qui est. La description, quel que soit son langage et les métaphores concrètes dont elle use, fournit ici un modèle abstrait, dont la valeur réaliste vient de sa cohérence d'outil, non de son pouvoir révélateur de l'être comme absolu caché. Seule la démonstration peut dès lors, opérant à l'intérieur de ce modèle abstrait, en déployer les propriétés structurales que traduit dans les phénomènes l'expérimentateur.

En ce sens et en ce sens seulement, nous disons que la démonstration est la démarche centrale de la science. C'est pourquoi le problème que nous nous proposons d'examiner est celui de la vérification et de la justification *dans leur rapport* à la démonstration.

2. Il nous faut tout d'abord insister sur la subordination postulée des deux premières au regard de la troisième. Justification et vérification sont ici considérées comme des auxiliaires, et non comme des substituts de la démonstration. Une telle thèse n'est nullement triviale, et nous pensons que la postulation contraire a des conséquences philosophiques capitales. Du point de vue d'une topique transcendantale, le trait distinctif de la démonstration est

qu'elle opère dans un univers rigoureusement abstrait; le type de nécessité qu'elle propose est défini sans ambiguïté, à l'intérieur d'un langage formel, par récurrence sur une certaine classe de suites d'expressions bien formées, au moyen d'une règle élémentaire d'inférence. D'une expression obtenue selon ce schéma, on ne dira ni qu'elle a été vérifiée, ni qu'elle a été justifiée. Que faut-il entendre par l'un et l'autre vocable ?

3. *Vérifier*, c'est recourir à une évidence. Bien entendu, la notion d'évidence n'apparaît nullement comme univoque, et toute l'histoire de la philosophie de la connaissance — au moins depuis Descartes — pourrait s'écrire du point de vue d'une détermination de l'évidence. Notre propos est ici simplement de faire apparaître la fonction de l'évident par rapport à la démonstration, et nous disons que vérifier c'est ramener un discours à des discours suffisamment élémentaires pour que leur sens puisse être immédiatement constaté. On observera que seule nous intéresse, en tant que philosophe de la science, la vérification d'un *discours*; on voudra bien nous accorder, d'autre part, d'abandonner ici l'examen des différents modes possibles de la constatation d'évidence, qui relève d'une difficile pragmatique. Nous essaierons seulement de déterminer le genre de constat qui fonctionne comme complément de la démonstration dans la science.

La démonstration étant conçue comme enchaînement au sein d'une structure abstraite formalisée, ou du moins à demi formalisée (auquel cas il s'agit d'une quasi démonstration, imparfaitement effective), la vérification des expressions qu'elle comporte se ramène nécessairement à la constatation de la *présence* ou de l'*absence* d'un objet de pensée, *visé comme simple* pour les besoins de la cause. Toute modalité apparemment plus complexe de l'évidence se développerait dans un univers inaccessible directement à la pensée démonstrative, et relevant par conséquent d'un traitement de réduction pour donner prise au discours scientifique. L'effort des premiers néo-positivistes pour donner un statut aux propositions "protocolaires" répond, en un sens trop étroitement physicaliste, à cette inéluctable nécessité. "Être présent" ou "être absent", pour un "objet de pensée", ce n'est pas, en effet, nécessairement se donner dans une perception, ce n'est pas non plus

être absolument simple, mais seulement être — provisoirement — visé comme tel. Sans doute, le problème d'une philosophie de la connaissance ne saurait être posé sans que soit discutée la structure fine de l'évidence, et nous ne prétendons aucunement en minimiser l'importance et l'intérêt; cette réserve faite, il nous semble cependant possible de définir sans l'aborder la signification de la vérification dans l'œuvre de la science, simplement en caractérisant sa fonction formelle par rapport à la démonstration. Ce qui importe alors c'est le déploiement combinatoire des possibilités de présence et d'absence de l'objet de pensée pris comme élément. Dès lors, le meilleur prototype de vérification, au niveau de la connaissance rationnelle, n'est autre que le schéma des tableaux de vérité, classiques depuis Wittgenstein (mais dont la notion remonte à Frege et Boole, et bien entendu à Philon, d'après les *Hypotyposes* de Sextus) ⁽¹⁾.

Vérifier le sens d'un discours bien formé relève donc non pas d'une simple *inspectio mentis*, mais de la *combinaison exhaustive* de cas de présence et d'absence, ou, plus précisément, de la confrontation d'une certaine situation de présences et d'absences avec la totalité virtuelle des cas dans le cadre découpé par un langage. Ainsi se trouve *montrée* l'inclusion d'une situation-abstraite dans une certaine partie de l'ensemble de toutes les situations abstraites possibles pour un système donné de référence.

Nous ferons alors deux observations. La première est que le cadre obligé de la vérification ainsi réduite à sa forme essentielle est un schéma informationnel, finalement réductible à des dichotomies. Vérifier, ce n'est donc rien d'autre que de recevoir l'intégralité d'une information. Mais il y a bien loin de cette activité à un enregistrement passif: elle suppose en effet l'établissement d'un système de découpage des unités objets de pensée, et la combinatoire exhaustive des situations de présence et d'absence. Vérifier un énoncé ne démontre rien, mais fait le point dans un "es-

(1) Il est moins connu que Condorcet, indépendamment des logiciens, a exposé à propos des divers "avis" possibles d'un corps électoral, une théorie des formes normales disjonctives qui correspond exactement aux tableaux de vérité. (Cf. GRANGER, *La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, 1956, p. 122 sqq.).

pace logique". Or cet espace logique joue dans la science le rôle d'un canevas réglé de transformation de l'expérience vécue en information, traitable dans un système déductif. C'est ainsi, nous semble-t-il, que s'introduit de la façon la plus rationnelle la notion de probabilité, comme mesure des "domaines" de vérification qui se substituent éventuellement aux "points" de l'espace logique: un corps de base d'énoncés étant pris comme vérifié, tel autre énoncé se trouve occuper un sous-ensemble déterminé de l'espace logique. Mais qu'il soit probabilitaire ou déterminé, le discours vérifiable est un discours dont le renvoi à l'expérience est défini dans un schéma d'information.

La seconde des observations annoncées est que la vérification correspond à un type de vérité qu'on ne saurait confondre avec celui auquel la démonstration donne lieu. Appelons la première "déictique", la seconde "apodictique". Dans un système formel simple comme celui du calcul des propositions, mis sous forme de théorie déductive, la vérité des axiomes est naturellement déictique; leur déploiement combinatoire par les tables de vérité fournit des tautologies. Mais cette vérité déictique est bien entendu relative à la définition sémantique adoptée pour les symboles de connexion, et la liberté dont à cet égard le logicien fait usage lui permet justement de faire apparaître classiquement l'indépendance respective des axiomes en exhibant des représentations sémantiques distinctes. D'autre part, pour une même représentation sémantique, le choix du corps des axiomes étant assez largement arbitraire, on peut toujours transformer en vérité apodictique la vérité déictique d'un énoncé, moyennant la transformation inverse de la vérité d'autres énoncés convenablement choisis. Il semblerait donc que l'un et l'autre type de vérité, quoique distincts par leur voie d'accès, soient strictement équivalents.

4. Or, il n'en est rien, on le sait, dès que le système formel dépasse en complexité le calcul élémentaire des prédicats du premier ordre. L'établissement d'un "modèle" — au sens des logiciens — pour un système formel, n'est autre que la définition stricte des conditions de vérification. Tout axiome et tout théorème, est valide dans le modèle, de par sa construction; mais toute formule valide est-elle réciproquement théorème? Telle est la

question posée par Tarski dans l'article sur *Le concept de vérité*, et dont il montre que la réponse est en général négative. De même le premier théorème de Gödel démontre que, dans l'arithmétique formelle élémentaire, on peut construire une formule non démontrable, quoique vraie dans une interprétation (ou du moins, que l'hypothèse de sa démontrabilité ruine la cohérence du système).

Les théorèmes et paradoxes de limitation des formalismes mettent donc en évidence la dualité du vérifiable et du démontrable. Mais le problème est plus complexe encore qu'il ne paraît à première vue, car la notion de vérité déictique dépend du modèle adopté pour un système formel; or on sait qu'en général plusieurs espèces non isomorphes de modèles peuvent satisfaire une même théorie...

Il faut par conséquent en conclure que démontrer et vérifier ne sont en aucune manière deux modes d'exploration des systèmes formels conduisant à des résultats équivalents. Le fait logique fondamental étant qu'on peut faire apparaître des énoncés vérifiables dans un certain modèle, quoique nécessairement non démontrables dans la théorie, il semble qu'une conséquence épistémologique naturelle en soit l'affirmation du caractère dominant de la vérification, c'est-à-dire, en fin de compte de la combinatoire, par rapport à la déduction syntaxique. En un certain sens, cela est vrai, et signifie que la pensée démonstrative ne parvient pas à dominer totalement l'objet formel qu'elle se crée. Mais dès que l'on examine de plus près la nature des manipulations de vérification, la présentation sémantique des théories, on s'aperçoit, avec les logiciens, que le système des présupposés qui rendent possibles ces manipulations est de plus en plus fort: ce que l'on gagne en puissance par le recours au combinatoire est payé sur un plan supérieur par l'obligation de renforcer une méta-théorie. C'est précisément cette fonction des méta-théories dans l'exploitation des systèmes abstraits que nous voudrions maintenant caractériser comme *justification*.

5. Dans l'œuvre scientifique telle que nous l'avons définie, la justification ne s'identifie ni à la démonstration, ni à la vérification. Elle est essentiellement organisation du champ démonstratif ou du champ de vérification, et ne concerne directement ni les

énoncés de la structure abstraite, ni les “objets” qu’on lui fait correspondre, mais les *cadres catégoriaux* susceptibles de les organiser. Justifier, ce n’est pas renforcer une démonstration en la doublant d’une argumentation non formelle; c’est lui donner une assise, soit en aménageant les conditions de son interprétation — et en dernier ressort de son application dans l’expérience —, soit en faisant apparaître une systématité cachée. Elle manipule donc la théorie démonstrative elle-même, en tant que telle; il est ainsi permis de dire qu’elle relève d’une *méta-théorie*. Avant d’esquisser l’analyse de deux exemples de ce que nous essayons ici de définir, il est bon de souligner que la notion ainsi entendue de justification s’applique encore, en un sens plus lâche, aux domaines non entièrement rationalisés de la pensée. Justifier, même si aucun système formel n’est en cause, mais seulement un système quasi démonstratif comme ceux dont nous usons journellement, c’est toujours tenter d’établir de l’extérieur la cohérence, la légitimité, la fécondité d’un comportement.

Nous nous bornerons cependant au cas bien déterminé où la justification apparaît comme auxiliaire d’une pensée spécifiquement démonstrative, et nous emprunterons nos exemples à l’histoire des mathématiques. Pascal, dans la *Lettre de M. Dettonville à M. Carcavi*, expose une méthode nouvelle et générale de détermination du centre de gravité, qui n’est autre, au langage près, que celle-là même de l’analyse infinitésimale. Il propose donc un mode de calcul, dont il donne les règles et qu’il applique immédiatement aux problèmes de la Roulette. Mais les notions qu’il utilise sont empruntées à la doctrine des indivisibles, dont les démonstrations, quoique manifestement valables et fécondes, ne satisfont pas apparemment l’esprit de rigueur des géomètres. Cavalieri lui-même se bornait à constater dans la préface de sa *Géométrie* des indivisibles, que cette science se trouve «chargée de nombreuses difficultés qui, pareilles à certaines drogues amères, quoique très salutaires pour l’esprit, répugnent trop souvent aux intelligences malades des hommes». Pascal voudra justifier le calcul en donnant un nouveau statut aux indivisibles, et en ébauchant du même coup un *système* de catégories mathématiques nouvelles, que devait achever de constituer le génie de Leibniz.

La méthode de calcul pascalienne consiste à construire tout d'abord la notion nouvelle de «somme triangulaire», attachée à la division d'un segment de droite en parties égales, aux extrémités desquelles pendent des poids. Le segment étant supposé reposer en équilibre sur l'un des points de division, il établit alors un théorème fondamental qui détermine le rapport des deux bras de levier par le rapport de deux sommes triangulaires, et il passe aussitôt au cas où le nombre des divisions croît indéfiniment, et où les poids suspendus sont ceux des fragments de la ligne indéfiniment décroissants. «Je sais bien, ajoute-t-il, que ces portions de la grandeur proposée ne pendent pas précisément aux points de division de la balance, mais je n'ai pas laissé de le dire parce que c'est la même chose» (*Pléiade*, p. 232). Et il montre, en esquissant un raisonnement archimédien, que l'inexactitude ainsi commise «ne change pas les raisons» des grandeurs globales. Davantage encore, il ajoute que l'on peut sommer de cette manière non seulement des grandeurs qui, comme les poids, sont proportionnelles aux «portions» de la droite divisée, mais encore des grandeurs variant selon une loi définie, telles par exemple les cordes d'un demi-cercle élevées aux points de division d'un diamètre: première apparition de l'intégrale de Stieltjes. Mais c'est alors qu'apparaît clairement le défaut du langage des indivisibles, qui conduit à calculer une surface en sommant des «lignes»; Pascal en redressant ce langage donne la clef de la catégorie nouvelle d'élément infiniment petit: «Je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, la *somme des lignes*... puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée».

Ainsi la justification apparaît-elle comme réinterprétation des notions d'un calcul, notions qui viennent désormais s'insérer dans un système rationnel. Nous en donnerons un autre exemple, emprunté cette fois à l'histoire récente des mathématiques. A la fin du siècle passé l'ingénieur Heaviside introduit sous le nom de calcul symbolique un système d'opérations permettant de traiter

élégamment la plupart des équations différentielles de l'électronique. Mais ce calcul apparaît simplement comme une technique dont les résultats sont corrects, sans que l'Analyse classique puisse en établir la rigueur, ni même en interpréter toutes les notions. Un déroulement opératoire pour ainsi dire aveugle, mais dont les résultats ultimes sont corrects, y fait apparaître, par exemple, la fonction de Dirac, nulle partout sauf pour $x = 0$, où elle est infinie, mais telle que son intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ soit égale à 1, comme «dérivée» de la fonction dite d'Heaviside, égale à 0 pour $x < 0$ et à 1 partout ailleurs. Comment peut-on parler de «dérivée» pour une «fonction» dont la définition même contredit la conception classique ? C'est, comme le dit L. Schwartz (*Théorie des distributions*, Introduction), «dépasser les limites qui nous sont permises». Néanmoins, le calcul fonctionne et satisfait parfaitement les physiciens. Dès lors, une justification est nécessaire, qui va se présenter comme une refonte de la notion de fonction et de celle de dérivée. Telle a été l'œuvre de L. Schwartz en introduisant la notion de distribution. Il n'est ni possible ici, ni nécessaire, d'entrer dans le détail du travail du mathématicien; il nous suffira d'indiquer que le nouveau système conceptuel introduit d'abord la notion de *mesure*, comme fonctionnelle linéaire définie sur l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et nulles en dehors d'un compact. Une mesure est, en un certain sens, continue; si elle est «absolument continue», on peut lui associer biunivoquement une fonction sommable qui joue le rôle d'une «densité»; on l'identifie alors à cette densité, et c'est en ce sens qu'une fonction (sommable) est un cas particulier de mesure. La pseudo-fonction de Dirac est justement l'exemple le plus simple de mesure non identifiable à une fonction. La notion de mesure elle-même apparaît comme un cas particulier de la notion plus générale de «distribution», fonctionnelle linéaire sur l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. On définit alors directement la dérivée d'une distribution, de telle sorte que la dérivée classique en soit la dégénérescence dans le cas où la distribution est identifiable à une mesure absolument continue, c'est-à-dire à une fonction. Ainsi disparaissent les paradoxes du calcul symbolique, dont les concepts se trouvent réinterprétés à l'intérieur d'un système harmonieux et puissant. Tel est bien le rôle de la justification.

6. Vérification et justification ont ainsi été définies dans leur rapport à la démonstration, dont elles sont les auxiliaires. Nous avançons plus haut que les considérer l'une et l'autre comme substituts de la démonstration constituait une option philosophique non triviale, et c'est sur ce point maintenant que nous souhaitons brièvement conclure.

En effet, le privilège accordé par la pensée scientifique à la démonstration (c'est-à-dire à un certain ensemble d'enchaînements à l'intérieur d'un système formel) garantit à la vérité un statut transcendantal clair et strict; elle ne pourra à aucun moment être confondue ni avec l'expérience immédiate, ni avec les associations non contrôlables du vécu. Sans doute ce qu'elle gagne en clarté le perd-elle en attrait concret et en poids affectif; mais nous avons vu que la démonstration s'associe toujours des systèmes de vérification et de justification susceptibles d'une part de lui donner prise sur le réel, d'autre part de l'organiser conformément au vœu d'unification de la raison.

Que si, au contraire, on accorde à la vérification et à la justification le droit de proposer leurs «vérités» sur le même plan que la vérité démonstrative, et de lui emprunter ses propriétés, la porte se trouve ouverte à toutes les ambiguïtés, qui permettront de confondre la science avec les doctrines les plus diverses, et de faire ainsi aisément son procès. Or le but de la tentative présente de délimitation des trois concepts a été précisément de rendre plus clair ce qui nous paraît être le fondement transcendantal de la confusion irrationaliste.

*Faculté des Lettres et Sciences
Humaines d'Aix*

Gilles Gaston GRANGER

G. G. GRANGER

Je serai bref parce que j'ai peu de choses à dire. C'est la principale raison de ma brièveté. J'ai voulu, dans la communication que j'ai présentée à vos critiques, prendre le problème des rapports entre véri-

fication, justification et démonstration dans un sens assez restreint, c'est-à-dire que je ne me suis préoccupé que des processus de connaissance scientifique au sens strict et que le centre du système que j'ai essayé de proposer est la notion de démonstration car, me semblait-il, il n'est de science *stricto sensu* que démonstrative. Je pars donc de ce présupposé que vous voudrez bien provisoirement m'accorder. Il ne s'ensuit pas pour autant que je dédaigne de considérer l'importance du même problème des rapports entre ces trois notions dans d'autres régions de notre activité, et que par conséquent je veuille délibérément négliger des sens de la justification qui ont été évoqués par ailleurs. Bien entendu, comme dans toute réflexion philosophique, nous devons partir d'un acquis qui nous est commun et qui est ici l'usage de ces trois mots, lesquels dans beaucoup de langues, romanes ou d'autres origines, dérivent de la même racine. C'est donc de cet usage commun que nous partirons — usage très vague, certes — mais dont le propos du philosophe est de chercher une élucidation. J'ai tenté non pas de définir l'une ou l'autre de ces trois notions en tant qu'elles auraient un sens autonome et indépendant, mais au contraire, d'esquisser un système de significations à l'intérieur duquel il n'est pas possible de donner un sens précis à l'une d'entre elles sans faire intervenir les deux autres. Cette tentative est peut-être artificielle, je crois qu'elle ne l'est pas trop dans la mesure où nous nous restreignons au champ que j'ai précisé, à savoir celui de l'exercice de la pensée formelle et expérimentale dans la construction de la science. Il me semble que ces trois notions dans le système que l'on en peut constituer ne sauraient être considérées ni comme juxtaposées, ni comme simplement hiérarchisées, mais qu'il est nécessaire de considérer que l'une d'entre elles jouant un rôle tout à fait distingué, — au sens des mathématiciens, — privilégié si l'on veut, à savoir la démonstration. Les deux autres prennent leur sens véritable et efficace dans la mesure où on les considère comme, ai-je dit, des auxiliaires de la démonstration, — le mot d'auxiliaire étant sans doute mauvais, — en tout cas comme ayant un véritable sens et une véritable portée par rapport à une démonstration virtuelle ou effective. Il s'agit donc d'un clivage organique, selon trois plans opératoires de la pensée qui, bien entendu, correspondent à des modes de structuration de l'objet que la science constitue; car *psychologicas hypotheses non fingo*, il s'agit d'épistémologie et nullement d'une psychologie,

fût-elle phénoménologique, de la construction de l'objet scientifique.

Je vais maintenant dire quelques mots des trois définitions que j'ai proposées dans la triade que je présente, simplement peut-être pour en éclaircir quelques aspects: la démonstration, je l'ai définie de façon tout à fait classique aujourd'hui comme concaténation dans un système abstrait et j'insiste sur ce qualificatif d'abstrait; il n'est de démonstration que dans un tel système abstrait, c'est-à-dire, si vous voulez, qu'en termes plus crus, je propose la thèse qu'il n'est de démonstration que mathématique. Tout dépend de ce que l'on appelle mathématique, il est vrai. Je ne reviens pas sur cette définition qui est tout à fait celle des logiciens, avec la formulation précise qu'on lui peut donner, variant dans sa mise en œuvre, bien entendu, selon les systèmes.

Quant à la vérification, je dois insister un peu davantage, car le sens que je lui donne est probablement plus scandaleux, peut choquer un peu. Il me semble que pour qu'il y ait vérification scientifiquement utilisable, bien entendu, il faut qu'elle se réduise à la simple constatation d'une présence ou d'une absence de ce que j'appellerai un objet, mais qui n'est qu'un objet de pensée, c'est-à-dire ce que la pensée vise comme provisoirement *un*, indissocié, et comme provisoirement réduit à cette simple possibilité d'être ou présent ou absent. Bien entendu, cette fiction de la pensée scientifique peut se poursuivre, car le physicien, comme le psychologue, — encore que mon ami Vuillemin ne l'admette pas au rang des véritables hommes de science, — hommes de l'un ou l'autre, ou quelque autre savant, sont nécessairement obligés de rejeter ensuite cette hypothèse de la simplicité provisoire de ce qu'ils visent comme objet, et d'y faire apparaître une structure, mais pour revenir ensuite finalement à des objets du type dont je viens de parler sur lesquels s'opèrent des vérifications. De telle sorte que ce que j'appelle vérifier, scientifiquement parlant, a pour seul prototype vraiment pur ce qui est présenté dans le calcul des propositions par exemple, présenté au moyen des tableaux de vérité wittgensteiniens, où l'on constate effectivement que telles combinaisons sont ou ne sont pas réalisées. Il me semble que si l'on veut donner à la vérification un sens effectif, sans introduire en contrebande quoi que ce soit dans la description de la pensée scientifique, il faut en venir à cette ascèse extrême. Autrement dit, on ne vérifie pas des propositions exprimant des faits concrets, ils sont beaucoup

trop complexes et leur vérification ne peut se poursuivre indéfiniment par d'incessantes divisions dichotomiques, mais qui finissent toujours par se présenter comme des constatations de présence ou d'absence de quelques traits. On ne «vérifie» jamais un fait qu'en le considérant comme la proposition qui l'exprime comme atomique.

Quant à la justification, je vous propose de la définir comme offrant des cadres d'organisation à la démonstration. Une justification digne de ce nom, du point de vue de la construction de la pensée scientifique, ne peut être, me semble-t-il qu'une tentative de métathéorie au sens le plus large du terme, et non pas en un sens très technique, pour lequel on pourrait réserver le mot d'épithéorie, par exemple, comme on l'a fait. C'est un système plus ou moins réalisé et plus ou moins réussi d'organisation, pour une démonstration possible, ou déjà réalisée, ou à réaliser. Il s'agit donc bien d'une activité, d'une attitude et d'une structuration qui ne se trouvent pas sur le même plan ni que la démonstration qui est, pour parler sommairement, calcul, ni que la vérification, laquelle est à la fois constatation de présence et d'absence d'objets extrêmement abstraits et, comme je l'ai précisé dans mon papier, également, combinatoire de ces constatations de présence et d'absence.

Je vais maintenant, très sommairement, reprendre les rapports entre vérification et démonstration d'une part, justification et démonstration d'autre part, qui seuls rendent possible la thèse que je propose et je serai bref parce que j'en ai parlé dans ce papier d'une autre manière.

Le rapport entre vérification et démonstration me paraît se caractériser par la présence du problème suivant, fondamental pour les logiciens, qui a déjà été évoqué et qui est bien connu, à savoir que dans les systèmes de pensée formelle les plus simples, le calcul des propositions, par exemple, ou des prédicats du premier ordre, vérification et démonstration semblent pouvoir être dits d'une certaine manière, rigoureusement équipotente. Tandis que si l'on enrichit le système formel, une dissociation apparaît entre vérification, au sens où je l'ai indiqué, et démonstration; et l'on peut dire peut-être que c'est là la marque d'une manque de domination de la pensée formelle par elle-même et que, d'une certaine manière, la machine démonstrative s'emballé ou tout au moins est plus forte que le processus de vérification, tout au moins celui-ci ne peut-il dominer complètement

les processus démonstratifs. Telle est, me semble-t-il, une justification de cette distinction que je fais entre vérification et démonstration, et en même temps la marque d'une difficulté qui est probablement une difficulté fondamentale de la logique mathématique en tant que discipline autonome, et de toute philosophie de la pensée formelle.

En ce qui concerne justification et démonstration, j'ai dit que la justification est une construction plus ou moins inchoative, rarement achevée, — car si elle s'achevait, elle aboutirait à la fabrication d'un système démonstratif, et reposerait alors un nouveau problème de justification, comme il arrive parfois; la justification est donc intégration d'un calcul, dans un système, jugé plus satisfaisant pour des raisons diverses, et qui varient selon les domaines de la connaissance. Si l'on veut emprunter ici le vocabulaire pascalien, on dira que la justification consiste à vouloir montrer la raison des effets, alors que le calcul ne fait que présenter les effets eux-mêmes. Le problème qui se poserait ici est également le problème bien connu: une métalangue est-elle possible? Si l'on n'exige pas trop d'une métalangue, on peut bien répondre affirmativement à cette question. Les deux exemples que j'ai simplement esquissés, auxquels j'ai eu recours dans mon papier pour justifier cette idée de la justification, qui n'était peut-être pas tout à fait dans le sens ordinaire de la langue, ces deux exemples sont contingents; mais je crois qu'ils sont tout de même assez significatifs; je les rappelle, seulement pour mémoire: il s'agissait d'abord d'une référence aux traités pascaliens sur la roulette, dans lesquels on voit comment le génie de Pascal, en se proposant ces problèmes particuliers de quadrature à propos de la roulette, fait usage d'un instrument qui existe déjà, en tant que calcul; qui est la théorie des indivisibles de Cavalieri, mais qui est un calcul tout à fait insatisfaisant pour l'esprit, non *justifié*, et qui réussit. Et comment Pascal, d'un trait de plume et pour ainsi dire par accident, montre qu'il a parfaitement compris ce que recouvrait ce calcul aveugle et que, directement, il pénètre dans cet univers nouveau qui sera celui de l'analyse infinitésimale, et que le génie de Leibniz saura évidemment rendre immédiatement fécond, alors que Pascal, sans doute ne nous donne pas une présentation aussi satisfaisante. Mais en lisant les traités sur la roulette, on s'aperçoit pourtant de l'effrayant génie de ce mathématicien, je veux dire Pascal, qui, sans jusqu'en avoir l'air, construit

immédiatement un système de calcul infinitésimal, non pas dans ses parties les plus élémentaires, mais déjà dans des parties plus compliquées, car ce qu'il fabrique, ce ne sont pas des intégrales simples, mais ce sont des intégrales multiples, ou des intégrales de surface, de volume, etc. Enfin, bref, j'ai voulu, en prenant l'exemple de Pascal, montrer comment la transformation d'un calcul en constitue une justification, sans que cette justification appartienne elle-même au plan de ce calcul, ou du moins pas encore, mais néanmoins réussit à féconder de qui auparavant n'était qu'un ensemble de recettes

L'autre exemple est beaucoup plus récent: c'est celui du calcul opérationnel de Neovüch qui, comme vous le savez, est aussi à l'origine un ensemble de recettes, que certains mathématiciens méprisent justement parce qu'il n'est pas justifié, mais qui cependant marche très bien, dont les électriciens se servent et qui se trouve alors replongé dans un système qui le rend compréhensif, qui l'intègre à quelque chose de cohérent, donc justifié à mon sens, par la notion de distribution, laquelle permet de comprendre comment ces entités mathématiques monstrueuses qui apparaissent dans le calcul opérationnel peuvent être soumises au joug de la cohérence mathématique et devenir des êtres ayant un état civil normal et un comportement naturel sous le nom de distribution, les fonctions et les mesures s'identifiant alors avec des espèces très particulières de ces êtres plus complexes que sont les distributions. Là encore, il s'agit donc de justifier ce qui n'était qu'un système de calcul qui, je le répète, fonctionne mais qui ne nous livre pas la raison de ses effets. Pour conclure maintenant, j'en viens à commenter le dernier paragraphe un peu sibyllin de mon papier — il s'agit, et c'est au fond la raison des effets de cet exposé, il s'agit d'essayer de proposer une définition, un diagnostic plutôt, car je considère qu'il s'agit ici d'une maladie de la pensée, de diagnostiquer l'irrationalisme et d'en donner une définition qui suggère une interprétation de ce qu'il est, et des causes, si l'on peut employer ce mot, de cette désaffection de la pensée pour ses propres règles. Il me semble qu'on peut définir l'irrationalisme comme une confusion topique transcendantale s'il est permis d'être aussi pédant et de s'affubler de vêtements kantien, confusion topique transcendantale qui consiste à prendre la justification ou la vérification pour la démonstration et à faire comme si c'était la même chose, comme si ce que l'une ou l'autre nous livre nous permettait d'avoir le même

genre de sécurité et d'effectuer le même genre de démarche. Il me semble qu'en ce qui concerne la justification, on peut dire que, définie comme je l'ai fait, elle est, prenons encore des termes kantien, régulatrice mais nullement constitutive, c'est-à-dire qu'elle est bien sans doute, en un certain sens, motrice du processus de rationalisation. Si l'on considère l'histoire des sciences, on s'aperçoit que beaucoup de ces progrès se présentent comme des tentatives de justification, soit qu'elles échouent, soit qu'elle réussissent et qu'elles donnent du mouvement pour aller plus loin; mais si elle est motrice du processus de rationalisation, jamais la justification ne peut être autre chose qu'un organisme vide si elle ne consiste pas à organiser des démonstrations. Une justification qui tourne à vide comme dans certains domaines de la pensée, qui n'organise pas de véritables démonstrations et qui, en même temps, ne peut pas se coordonner à des vérifications, me semble être précisément l'indice de ce que j'appelle l'irrationalisme, de l'une de ses formes du moins. La vérification, de même, ne conduit à une science rationnelle que si elle opère sur le champ réduit qui prépare des démonstrations. Comme j'ai essayé de le dire tout à l'heure, si l'on prend pour argent comptant des vérifications qui consistent à confronter par exemple des expériences perceptives, ou à confronter des expériences plus complexes de quelque autre type, esthétique ou mystique par exemple, jamais on ne constituera une science. Il y aura vérification dans la mesure ou l'on parviendra à un accord, psychologique, sociologique, culturel si l'on veut, entre différents individus; mais ce genre de vérification peut bien être satisfaisant, nécessaire dans beaucoup de domaines; dans le domaine de la science, il est un leurre, il n'aboutit à rien, il faut que l'ascèse réductrice s'opère pour que la vérification ait un sens. De telle sorte que l'irrationalisme me semble-t-il, consiste soit à prendre la justification comme substitut de la démonstration, et, je dirais alors, s'il faut donner des éponymes, que c'est le type hégélien d'irrationalisme, peut-être pourrions-nous dire le type dialectique, mais je pense qu'il existe aussi une conception de la dialectique qui n'est pas irrationaliste, — disons donc plutôt hégélien.

Quant à l'autre type d'irrationalisme, celui qui mise sur la vérification, on pourrait l'appeler irrationalisme mystique, ou encore existentialisme, mais là encore, le mot est trop historiquement déterminé.

Voilà tout ce que j'avais à dire sur mon exposé, mais ce qui m'intéressera, c'est surtout d'entendre d'abord les observations du Professeur Gonseth.

F. GONSETH

En réponse à l'exposé de M. Granger, j'aimerais commencer par une déclaration dont le caractère assez peu nuancé surprendra peut-être. La voici:

Je pense être tout à fait d'accord avec M. Granger pour formuler en faveur de l'esprit et des méthodes de la recherche scientifique un ensemble de revendications assez rigoureuses.

Pour que cette déclaration ne reste pas dans le vague, il me faut naturellement en préciser la teneur et les intentions. Il me faudra cependant me borner à quelques indications assez sommaires. Je prendrai donc comme exemple les termes mêmes que nous nous proposons d'analyser, les termes de *justification*, de *vérification* et de *démonstration*. Je suis d'avis depuis longtemps — et mes réflexions de ces dernières années me confirment dans cette opinion — que la signification de ces termes reste en état d'incomplétude même dans l'usage que la philosophie en fait couramment. L'élaboration de significations plus précises n'est pas une simple affaire de langage. Il s'avère que l'emploi de ces termes doit être engagé dans des activités précisantes, activités dont les modèles nous sont fournis par la recherche scientifique. La chose est particulièrement frappante lorsque, par la mise en œuvre de moyens adéquats, la recherche parvient à franchir ce que j'appelle un *seuil de précision*.

Il me semble que, pour M. Granger aussi, les mots ont besoin d'être précisés et de l'être par leur participation à l'œuvre scientifique. C'est pourquoi je crois utile et juste de déclarer d'emblée que, de ce point de vue encore très général, je suis d'accord avec lui. Reste naturellement à voir si nous le serons encore dans une analyse plus détaillée.

M. Granger l'a dit, les trois termes que nous étudions ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Pour apercevoir le sens le meilleur qui puisse leur être conféré dans l'état actuel des choses et pour concevoir au mieux leur rapport, rien n'est plus naturel que d'aller voir ce que les mathématiciens en font lorsqu'ils tentent eux-mêmes de

donner aux mathématiques un statut de la plus haute précision. Et c'est pourquoi il est juste de porter son attention du côté des mathématiques formalisées. Je ne saurais donc critiquer M. Granger de l'avoir fait. Mais, cela dit, vais-je me déclarer aussi d'accord avec tout le détail de son exposé ? Qu'il me soit permis, pour m'en expliquer, de faire un détour en rappelant certaines circonstances historiques.

Je parlerai tout d'abord de la géométrie d'avant Euclide, d'une géométrie qui, sans être axiomatisée, connaissait déjà la démonstration, celle que pratiquait par exemple le subtil Eudoxe de Cnide. Les démonstrations auxquelles elle se livrait étaient-elles ou n'étaient-elles pas valables ? Je sais bien que, dans un certain climat mathématicien, d'une très brûlante actualité, il est scandaleux de déclarer qu'elles l'étaient. Et pourtant, je n'hésite pas à l'affirmer, j'ajoute même que les démonstrations faites sur le mode démonstratif d'alors restent valables et que l'exercice en est encore aujourd'hui légitime. Comment se faisaient-elles ? Au fur et à mesure des besoins de la démonstration, on faisait appel à une suite d'évidences dont on tirait les conséquences avec toute la rigueur possible. Ce qu'on ne savait pas encore, c'est que pour toutes les démonstrations à la fois, on pourrait choisir un nombre fini et relativement petit d'évidences que rien n'empêcherait d'énoncer au préalable. On tenait aussi pour évident le droit du mathématicien à faire appel aux évidences à tout instant de sa démonstration, pourvu qu'il les reconnaisse à ce moment-là comme telles.

Euclide a donc été le premier à codifier la démonstration en en faisant une démonstration axiomatisée. La seule innovation consistait alors en ceci : que l'on avait à faire préalablement et une fois pour toutes la liste de toutes les évidences auxquelles le géomètre se donnerait le droit de recourir. Quant au fait que ces évidences soient nommées axiomes et leur ensemble une base axiomatique, c'est là pure affaire de langage. Le fait considérable, celui dont la portée devait être si grande, c'était que l'ensemble de toutes les évidences possibles puissent être remplacées, pour les besoins du géomètre, par une seule base axiomatique. C'était là une très grande découverte : elle ne justifie cependant pas qu'on parle avec dédain des mathématiques préaxiomatiques.

Par la suite, cette découverte devait être longuement oubliée. Clairauil n'en avait cure et même un Gauss pratiquait avec la plus grande

rigueur la démonstration non axiomatisée. Prétendra-t-on qu'il ne savait pas ce que c'est qu'une démonstration ? Il suffit de se rappeler comment Gauss encore très jeune démontrait de quatre façons différentes le théorème fondamental de l'algèbre ou de se souvenir du *theorema egregium* pour mesurer l'absurdité d'une telle accusation.

Mais alors, pourquoi la mathématique formalisée ? Ici aussi, il faut rappeler certaines circonstances historiques et tout spécialement la querelle encore récente qui opposa Brouwer à Hilbert. Brouwer, le découvreur des mathématiques intuitionnistes, tenait pour erroné l'usage que les mathématiques traditionnelles font du principe du *tertium non datur*. Il fit un jour à Genève la comparaison suivante, qui fut d'ailleurs souvent répétée : un criminel reste un criminel, même si son crime n'est pas découvert ; de même, les mathématiques traditionnelles restent dans l'erreur, même si cette erreur ne s'est pas découverte.

Hilbert a fait le projet de désarmer la critique de Brouwer en montrant, disons mieux en démontrant, qu'elles ne peuvent pas engendrer de contradictions. Cette démonstration devait-elle aussi contester la validité des mathématiques intuitionnistes ? C'est là une tout autre affaire. C'est expressément dans l'intention de mettre les mathématiques classiques hors d'atteinte que les procédures formalisatrices furent inventées par Hilbert et Bernays. Chacun sait à peu près en quoi la formalisation consiste. Vous jugerez peut-être superflu que je le rappelle ici. Pour la suite, il me serait pourtant difficile de m'en passer. Séparons tout d'abord, car la chose est possible, la question de la production de systèmes formels de celle de l'édification d'une discipline mathématique et par conséquent aussi celle d'une éventuelle démonstration de non-contradiction. La chose peut être présentée comme un jeu plus ou moins conventionnel. On a d'ailleurs souvent comparé la pratique de la formalisation à celle d'un jeu d'échecs. Pour bien jouer le jeu formalisateur, il y a quatre points à bien spécifier ; je les énumère en les commentant brièvement :

a) Le matériau mis à la disposition du joueur doit être bien déterminé. Ce doivent être des signes individuellement bien reconnaissables et répartissables sans ambiguïté en catégories elles-mêmes bien déterminées. Par habitude, l'ensemble de ces signes comporte des lettres de différents caractères, des parenthèses de différentes sortes et d'autres signes plus ou moins conventionnels.

Il n'est pas exigé que ces signes soient en nombre borné, il en résulte que le problème de leur désignation individuelle n'est pas résolu par la simple inspection d'un ensemble de signes tracés d'avance.

b) Le jeu consistera à former des formules ou plus généralement des configurations à l'aide de ces signes. Mais on ne sera pas libre de former des configurations quelconques. On sera tenu d'observer au contraire un certain nombre de lois de formation. Seules les configurations ainsi obtenues seront dites bien formées.

Il faudra donc que ces lois de formation soient énoncées de façon claire et univoque.

c) Le jeu ne s'arrêtera pas là. Il comportera la production de nouvelles configurations à partir de celles qui auront été déjà admises ou formées. Dans la production de nouvelles configurations, le joueur observera strictement un certain ensemble de règles de production. Celles-ci devront être telles qu'à partir de configurations bien formées, elles ne puissent engendrer que des configurations elles-mêmes bien formées. Les nouvelles configurations seront dites dérivées.

Les règles de cette dérivation devront être elles aussi énoncées sans aucune ambiguïté. Dès qu'un certain ensemble de configurations bien formées seront posées par avance comme valables. Les configurations produites (dérivées) selon les règles à partir de ces configurations valables seront elles-mêmes posées valables.

Le but du jeu est de déployer l'ensemble des configurations valables ainsi produites.

Ce jeu peut donner lieu à toute une série de problèmes. On pourra demander par exemple de faire voir que telle ou telle configuration bien formée qu'on a sous les yeux est (ou n'est pas) une configuration valable. On pourra demander de démontrer que telle ou telle configuration bien formée mais imaginée parce que trop longue pour être concrètement réalisée est (ou n'est pas) une configuration valable. On pourra se poser encore des problèmes bien plus généraux dont il est inutile de parler ici.

Mais que peuvent bien signifier les mots faire voir dans le premier et démontrer dans le second des problèmes dont il vient d'être question ? C'est ici qu'il faut réfléchir avec quelque concentration. M. Granger a parlé d'un univers abstrait dans lequel se situeraient les éléments abstraits avec lesquels les procédures formalisatrices au-

raient à opérer. Je suis d'accord avec lui, avec quelques réserves peut-être, sur le mode d'existence de l'abstrait. Certes, dans certains cas assez simples, on peut raisonner sur les formules ou sur des configurations concrètement réalisées, écrites ou dessinées sur le papier. Et toutes les étapes de la dérivation de telles ou telles configurations pourront être contrôlées de l'œil et de la main. C'est même dans un tel contrôle que s'enracinera la conviction de ne pas s'être trompé. Mais on ne saurait exclure le cas où la formule serait trop longue et la configuration trop vaste pour qu'elle puisse trouver place sur le papier. Seule l'imagination et tout spécialement l'imagination mathématicienne peut remédier à la défaillance des impressions sensorielles. Il faut transposer le sensible dans un univers abstrait et transposer en même temps toutes les conditions d'existence et de déploiement des systèmes formels. C'est de façon analogue qu'en géométrie on peut réussir à démontrer un théorème exact en raisonnant sur une figure tracée à la craie. Mais on ne saurait exclure que la figure soit trop grande pour prendre place sur le tableau, ou que les traits à la craie soient trop grossiers pour ne pas donner lieu à certaines confusions. L'imagination du géomètre entre alors en jeu: elle fait de l'espace sensible un espace mathématique, elle remplace les images sensibles par les figures géométriques, elle transpose les opérations et les raisonnements faits sur des objets réels en opérations et en raisonnements bénéficiant de l'exactitude et soumis à la rigueur du mathématicien. En un mot, la géométrie et ses abstraits permettent de transposer les problèmes énoncés et parfois résolus dans le réel en problèmes posés et à résoudre dans un horizon d'une autre nature, dans l'espace du géomètre. Il est vrai que lorsque le géomètre se livre à l'activité qui lui est propre, il ne le fait pas sur des abstraits complètement épurés. Il ne se sépare pas complètement des images dont une élaboration a fait des figures géométriques. Souvent même il recrée, pour s'y orienter, un «équivalent sensible» des «situations géométriques qu'il étudie. En fait, ce sont trois horizons d'existence qui ne cessent jamais de s'informer l'un l'autre: l'horizon du sensible, l'horizon de l'activité expérimentale (du physicien, par exemple) et l'horizon géométrique. Il y a avantage à serrer d'aussi près que possible la comparaison entre la géométrie et les trois horizons d'existence dont il vient d'être question, d'un part, et les systèmes formels et les horizons d'existence qui peuvent leur être liés, d'autre part. Ces der-

niers sont-ils également au nombre de trois ? A première vue, deux horizons seulement semblent s'imposer: l'horizon sensible dans lequel, et sans que la chose soit dite à ce moment-là, nos explications avaient commencé et l'horizon abstrait auquel ces explications viennent d'aboutir. Il n'est cependant pas difficile de concevoir comment un horizon d'activité pourrait ici aussi se séparer de l'horizon sensible. Mais pour ce qui nous intéresse ici, le fait décisif est l'émergence de l'horizon abstrait en tant qu'horizon d'existence des systèmes formels abstraits élaborés à partir du sensible. Ces systèmes sont en tous points comparables aux êtres mathématiques et la discipline qui entreprend de s'en occuper est une discipline mathématique: pour un système formel déterminé, on l'appelle la méta-mathématique de ce système.

Insistons encore sur le fait qu'une fois la transposition faite, les problèmes de caractère général auxquels le déploiement des systèmes formels donne lieu se présentent comme des problèmes mathématiques bien définis. Mais s'agit-il là d'une mathématique nouvelle ? Il faut relever que si les problèmes sont nouveaux, la méthode par laquelle on les traite ne diffère pas essentiellement de celle d'une combinatoire mathématique. Cette discipline se présente-t-elle déjà sous forme axiomatisée ? Ou peut-être même formalisée ? Pas du tout. La mathématique qui renaît sous forme de méta-mathématique dans l'univers abstrait des systèmes formels nous ramène au stade pré-axiomatique. On pourrait certes se proposer de lui faire parcourir le cycle de l'axiomatisation et de la formalisation. Mais la chose n'est pas faite d'avance du simple fait que la méta-mathématique ait accédé à l'existence mathématique. On aura remarqué que, depuis le moment où nous parlons de systèmes formels, nous avons à peine fait allusion à la possibilité de formaliser les disciplines mathématiques. En réalité, nous n'avons encore absolument rien dit qui s'y rapporte. Quelle raison avons-nous de procéder ainsi ? Cette façon de faire permet de mettre le doigt sur un fait important concernant les règles de dérivation qui président au déploiement d'un système formel. Avant leur transposition dans l'horizon métamathématique, ce n'étaient que des règles conventionnelles. Il n'y a pas de raison pour qu'il en soit autrement après leur transposition. Il existe des jeux mathématiques. Les règles d'un tel jeu peuvent n'avoir aucun caractère de nécessité. En général, la dérivation dans un système formel même sous sa forme

méta-mathématique ne va donc pas plus loin que la mise en œuvre précisée de règles conventionnelles, elles aussi précisées. Si rien d'autre ne vient en complément d'information, elle n'est donc pas la formalisation d'une déduction mathématique. Elle n'a par elle-même aucun «pouvoir démonstratif». Il y a là une circonstance qu'il me paraissait important de mettre en évidence.

Mais revenons au grand projet de Hilbert et Bernays. Il s'agissait, rappelons-le, d'assurer la légalité des mathématiques traditionnelles en montrant qu'elles ne sauraient engendrer de contradictions. La charge de cette démonstration devait être assumée par une théorie de la démonstration édiflée *ad hoc* et l'idée inspiratrice de cette théorie était précisément de ramener le schéma général de l'édification déductive d'une discipline mathématique à celui du déploiement d'un système formel. Nous avons mentionné plus haut quels sont les quatre points essentiels dont la réalisation d'un système formel dépend. Il serait trop long de montrer ici comment on les retrouve et comment on les réalise lorsqu'on entreprend la formalisation des mathématiques. Indiquons seulement que c'est par une extension de l'écriture de la logique formelle aux disciplines spécifiquement mathématiques qu'on y parvient.

Le point sur lequel il me faut revenir est celui de la dérivation et de ses règles dans les systèmes formels ainsi obtenus. Nous disions tout à l'heure que dans un système formel quelconque, la dérivation n'est pas forcément la formalisation d'une déduction et que par conséquent elle n'a pas forcément un «pouvoir démonstratif». Qu'en est-il maintenant ? Nous disposons maintenant d'une information complémentaire que le cas général ne comporte pas : c'est que la dérivation est dans l'horizon de la méta-mathématique la figuration de la déduction dans l'horizon mathématique originaire. Elle comporte maintenant un pouvoir démonstratif, mais par le fait que ce pouvoir lui est délégué et non par le fait d'être purement et simplement une dérivation formelle.

Le résultat de cette analyse peut paraître décevant : ce n'est pas la formalisation qui ajoute un pouvoir démonstratif au raisonnement mathématique classique, mais c'est ce dernier qui fonde et assure le pouvoir démonstratif des mathématiques formalisées. La formalisation n'élimine pas le moment démonstratif des mathématiques non formalisées au profit de quelque chose de plus sûr : elle le figure par la dérivation et elle le réinstalle dans la méta-mathématique. Pour

mon compte, je suis absolument convaincu que les mathématiques formalisées ne peuvent pas trancher le cordon ombilical qui les relie aux mathématiques traditionnelles. Il y a bien plutôt symbiose entre elles, le fait se distingue clairement sur le point précis qui vient d'être analysé. On le retrouve d'ailleurs en remarquant que dans l'horizon méta-mathématique, les démonstrations justificatives du programme de Hilbert (pour reprendre le mot de M. Granger que je trouve excellent) sont des démonstrations au sens traditionnel.

Ces réserves faites (qui s'opposent à l'idée d'un univers formalisé autonome, à l'existence séparée d'une mathématique formalisatrice), je rends hommage à M. Granger pour l'analyse approfondie qu'il en a faite et à laquelle je puis parfaitement souscrire.

Je sais combien il y a de choses importantes que je n'ai dites: celles qui concernent les grands théorèmes limitatifs comme celui de Gödel qui porta le coup que l'on sait au programme de Hilbert, et celles qui se rapportent au dépassement de ce programme par les mathématiques dites constructivistes, par exemple. Mais j'ai pensé qu'en cherchant à montrer sur l'idée même de la démonstration comment la symbiose s'opère entre les mathématiques traditionnelles et leur transposition en systèmes formels, il me serait plus facile de donner une idée de ma propre position.

Une remarque pour finir. J'ai dit pour commencer que je partage avec M. Granger une certaine exigence de rigueur: je suis d'avis qu'il faut porter les mots jusqu'au front de la recherche pour les engager dans les activités précisantes qui s'y développent et qui sont seules capables de leur conférer leur sens le plus aigu. Mais nous avons à nous garder de penser que dans leur état actuel, les sciences et les mathématiques en particulier n'aient plus à craindre d'être remises en question jusque dans la façon dont on prétend les fonder. La méthode axiomatique dans son application à la théorie des ensembles par exemple est-elle déjà hors de cause? Les procédures formalisatrices ne se heurteront-elles plus à aucune difficulté de principe? On peut craindre que ce ne soit pas encore le cas.

De toute façon, il me paraîtrait arbitraire de l'affirmer et dangereux de fonder toute une philosophie sur une telle affirmation.

G. G. GRANGER

Il ne s'agit pas d'une réponse à M. Gonseth. Je le remercie de m'avoir fait l'honneur de partir de mon exposé pour présenter des idées qui lui sont propres. Je voudrais seulement souligner, dans quelle mesure, s'il m'est permis de le dire, je suis moi aussi en accord avec ce qu'il a dit, avec évidemment quelques réserves qui peut-être proviennent du fait que je n'ai pas une suffisante pénétration des questions dont il s'agit. En ce qui concerne d'abord la conclusion qu'il vient de nous faire et la mise en garde magistrale en effet contre la trop facile idée que tout est terminé et que nous possédons enfin une mathématique fondée grâce à la théorie des ensembles, je suis, bien entendu, d'accord et nous devons être dans une position d'expectative, puisque ce sont les mathématiciens qui jouent, et qui présenteront ensuite leurs cartes. En ce qui concerne les deux autres points qui me semblent avoir été essentiellement soulignés par le Professeur Gonseth, il y a d'abord l'idée que le caractère formel sur lequel j'avais tellement insisté, de la pensée mathématique, est sans doute effectif, mais qu'il est néanmoins insuffisant pour comprendre vraiment ce qu'est le processus mathématique. Je crois que je me rallie à cette idée du Professeur Gonseth avec toutefois cette nuance que ce que me semble apporter la formulation concrète écrite dont il a parlé et qui, bien évidemment, est indispensable à la réalisation des calculs et à la vision de ce que le mathématicien va construire et inventer, ce qu'apporte la réalisation concrète des calculs, dis-je, me semble pourtant être plutôt du côté, ou bien des conditions psychologiques effectives qui découlent du fait que notre mathématique n'est pas la mathématique des anges, ou bien alors du fait que le mathématicien entremêle constamment dans son processus la démonstration proprement dite et ce que j'ai appelé en un sens large la métamathématique ou, comme le disait beaucoup mieux Descartes à propos de *Girard Desargues*, la métaphysique du calcul. C'est dans ce domaine qu'il est nécessaire d'avoir des choses écrites qui frappent l'imagination. Cette hypothèse me paraît corroborée par le fait qu'on peut réduire tout calcul sous forme d'un système informationnel aussi simple que possible, par exemple binaire, à la condition qu'il soit vraiment un calcul. Par conséquent, le caractère concret de la formulation n'est peut-être pas ici à débiter de la formulation même et

c'est peut-être pour d'autres raisons que la nécessité de la formulation concrète se présente.

Enfin, mon deuxième point, qui est le point central de la leçon que m'a donnée le Professeur Gonseth, c'est que la métamathématique est de fait, dans la visée de Hilbert, et dans sa réalité, de la même nature que la démonstration et cela, j'en conviens, cela est bien vrai, faute de quoi elle ne vaudrait pas une heure de peine. Mais néanmoins, il y a loin de la visée, de l'intention, du désir à ce qui effectivement se réalise; ce qui distingue la métamathématique de la mathématique, c'est peut-être que la métamathématique réussit à s'achever, à fermer son domaine, tandis que la mathématique n'y parvient qu'au prix de certains sacrifices, sacrifices dont la charte a été définie par les théorèmes Gödéliens, par exemple, et qui révélera peut-être d'autres aspects postérieurs. Mais si la métamathématique ne se distingue ainsi de la mathématique que par son caractère d'inachèvement, on peut ajouter cependant que l'activité métamathématique comporte un autre aspect qui fait qu'elle ne se réduit pas, même en droit, à un calcul, c'est qu'elle comporte un choix parmi les instruments. Il n'y aurait pas intention métamathématique si l'on ne se disait pas: eh bien, je me donne le choix des armes et je vais essayer de réaliser quelque chose, par exemple, avec le minimum d'instruments, ou bien avec les seuls instruments propres que je vais trouver à ma disposition en laissant de côté tout le reste, parce que je m'engagerais dans des ténèbres confuses. Il me semble que là il y a place pour une activité qui n'est pas calcul, qui est purement métamathématique et qui, partant, est arbitraire, car je reviens à la formule que j'avais employée: il n'y a de démonstration que mathématique et je crois que sur ce point, je suis entièrement d'accord avec le Professeur Gonseth.

J. ZARAGUETA

Le mot «démonstration» se dédouble en la préposition «de» et le mot «monstration». Le substantif monstration n'existe pas en français, mais il existe le verbe montrer. Ceci est en rapport avec la grande distinction soulignée par Leibniz entre les vérités de fait et les vérités de la raison. Les faits ne se démontrent pas, ils se montrent, ils sont montrés, ils sont constatés. Se démontrent uniquement les vérités

de la raison. Or, je trouve que M. le Rapporteur est très centré dans cette idée fondamentale, seulement il entend la démonstration dans un sens un peu restreint. Il dit: la démonstration est conçue comme un enchaînement au sein d'une structure à aspect formalisé ou du moins, à demi formalisé, auquel cas il s'agit d'une quasi démonstration parfaitement effective. Eh bien, je ne trouve pas de preuve à cette formule que pour la démonstration déductive je constate le vide de la démonstration inductive et de celle que j'appelle dans mes travaux personnels la démonstration réductive. L'induction, c'est le passage du réel à l'idéal. La réduction c'est l'application de l'idéal au réel. Ainsi, il y a une induction mathématique intellectuelle, dirais-je, et une induction empirique. Dans une induction intellectuelle, je constate entre deux points une ligne droite et je dis cette ligne droite est la plus courte entre toutes les lignes possibles. Et après, je me transporte alors vers l'idéal et je dis que la ligne droite est la plus courte entre deux lignes, deux points possibles. Eh bien, cette transition se fait d'une façon instantanée, par une espèce d'intuition intellectuelle. Je ne suis pas obligé de répéter l'expérience mathématique pour constater la vérité de ce grand axiome de la ligne droite qui est la plus courte entre deux points. Mais pour l'induction empirique, la chose est tout à fait différente. On distingue dans l'induction empirique une expérience interne et une expérience externe. Ainsi dans l'expérience interne, je constate l'efficacité de ma propre activité personnelle, dont l'intuition m'assure de la causalité pour ainsi dire intérieure de mon être. Mais pour tout ce qui regarde l'être qui m'environne, je suis obligé de répéter les expériences pour l'affirmation de la causalité. Ainsi, si je vois que l'eau est gelée à 0° une fois, je ne suis pas autorisé à affirmer que cela arrivera toujours. Il faut répéter l'expérience jusqu'à ce que l'hypothèse du hasard soit absolument éliminée. Alors, il y a aussi ce que j'appelle la réduction, la transition de l'ordre idéal à l'ordre réel, l'application de l'idéal au réel. Les anciens ont retenu cela sous le nom de déduction. Mais si je disais: l'âme humaine est spirituelle et immortelle, donc l'âme humaine est immortelle, ça, c'est un syllogisme parfaitement traditionnel. Mais si je disais l'homme est mortel, Socrate est homme, donc Socrate est mortel, là la transition de l'ordre idéal: l'homme est mortel, à l'ordre réel: Socrate qui était un homme en chair et en os, ceci n'est autorisé que par une série de précautions dont les an-

ciens ne se doutaient pas. Ainsi, il n'y a rien de plus simple, en physique que les phénomènes atmosphériques. Il y a une demi-douzaine de lois dont dépend le temps et que tous connaissent parfaitement. Cependant la prévision du temps dans la réalité est une des choses les plus difficiles qu'il y a dans notre vie. Pourquoi ? Pour des raisons où je ne peux pas entrer dans les détails. Il y a dans la transition de l'idéal au réel, une série de précautions à prendre qui ne sont pas prises. Dans tout cela encore, le concept de démonstration, à mon avis je suis tout à fait d'accord avec M. le Rapporteur sur le concept de démonstration pourvu qu'il l'élargisse au point d'indiquer plus ouvertement l'induction et ce que j'appelle la réduction. C'est tout ce que j'avais à dire.

G. G. GRANGER

Je n'ai pas voulu parler de l'induction et sans doute ai-je eu tort, mais il fallait se limiter à un domaine un peu spécifique.

J. HOROVITZ

Je me refuse, moi aussi, de reconnaître le primat de la démonstration syntaxique dans les sciences naturelles. Mais ce n'est pas de cela que je voudrais parler maintenant. Je voudrais plutôt saisir l'occasion pour lancer à M. McKeon un défi au sujet de l'ambiguïté.

M. Granger maintient que dans l'œuvre scientifique la vérification et la justification sont les auxiliaires de la démonstration. Comparons cette thèse avec celle que M. Devaux nous a présentée il y a quelques jours. Pour M. Devaux la démonstration et la vérification sont les deux modes de la justification: on justifie une thèse soit en la démontrant, soit en la vérifiant. On pourrait donc penser qu'il y a une réelle opposition entre les deux penseurs. Mais au fait il n'en est rien, parce qu'ils n'entendent pas les termes fondamentaux de la même façon. M. Devaux adhère à leur sens généralement accepté. Par conséquent, la signification de sa thèse apparaît clairement, à savoir: on fournit une raison adéquate pour l'acceptation d'une thèse soit en la déduisant, dans le cadre d'un système théorique, de thèses acceptées

antérieurement, soit en établissant sa vérité empirique. M. Granger, de son côté, emploie les termes «vérification» et «justification» tout autrement. Il est bien évident que par «vérification» il comprend ce que les logiciens et les mathématiciens appellent «satisfaction»: satisfaction d'une formule par certaines valeurs des variables ou satisfaction d'un système par un certain modèle. Quant à la justification, il la conçoit comme «organisation du champ». En ce sens, justifier une thèse ou un système veut dire les ajuster, les adapter à certains besoins; et ceci n'est pas la même chose que les défendre par des raisons. (Cette notion de justification ne doit pas être confondue avec celle de M. Perelman ou de M. Kotarbinski qui, tout en admettant que des modifications du système ou du réel peuvent s'intégrer dans une justification, conçoivent néanmoins la justification elle-même comme étant essentiellement un raisonnement). Comme il l'entend, la thèse de M. Granger revient donc à ceci: dans les sciences, les constatations de satisfaction et les ajustements systématiques sont les «auxiliaires» de la démonstration syntaxique.

J'avoue que la nature de la «subordination» en question m'échappe et que je ne crois pas avoir bien compris dans quel sens la pensée scientifique serait «assurément centrée sur la démonstration» en dehors des sciences formelles. Le théorème de l'incomplétude de Gödel a établi, comme on le sait bien, l'imperfection de la démonstration syntaxique par rapport aux procédés de la satisfaction. Puisque M. Granger l'admet, on comprend d'autant moins en quoi consiste selon lui «la subordination de la vérification à la démonstration» même dans le domaine formel.

Le rapport de M. Granger me semble illustrer à merveille les pièges de l'ambiguïté. Lorsque dans une recherche comme la nôtre, dont le sujet est indiqué par quelques termes fondamentaux d'un emploi courant, on utilise ces termes dans un sens secondaire ou ésotérique, on s'écarte du sujet et, ce qui est plus grave, on risque le malentendu et la confusion. Ce danger est d'autant plus grand que les énoncés que l'on formule semblent plus originaux et attrayants. Je ne crois vraiment pas que le culte de l'ambiguïté soit favorable au progrès philosophique. C'est cela mon défi à M. McKeon.

R. McKEON

I am happy to reply to Mr. Horovitz. He accuses me of introducing confusion by my defense of ambiguity and of recommending the use of masochism in philosophical discussions. The distinctions which I made with respect to ambiguity, Mr. Horovitz, were not original inventions of mine. I could have made them in Greek, and I could have limited my statements to citations of Euclid, Apollonius of Perga, Pappus of Alexandria, and Archimedes. The ambiguity of confusion is not the only kind of ambiguity; there are also productive ambiguities, which are encountered in the midst of scientific research and in the course of the advancement of scientific knowledge. There are likewise inconsequences which are not breakdowns of theory, but heuristic beginnings of new theories. I used ambiguity to make a transition from problems of demonstration to devices of justification. M. Granger made a like transition, and I can therefore use his statements in support of my position. He says (p. 235): "Mais dès que l'on examine de plus près la nature des manipulations de vérification, la présentation sémantique des théories, on s'aperçoit, avec les logiciens, que le système des présupposés qui rendent possibles ces manipulations est de plus en plus fort: ce que l'on gagne en puissance par le recours au combinatoire est payé sur un plan supérieur par l'obligation de renforcer une méta-théorie." Two pages later he says (p. 237): "Ainsi la justification apparaît-elle comme réinterprétation des notions d'un calcul, notions qui viennent désormais s'insérer dans un système rationnel." This means that if one develops two or more systems, an apparent inconsistency between them may be analyzed as a productive ambiguity. Moreover, if any of the consequences which one traces from the presuppositions of one system become inconsequences when they are transferred to the presuppositions of the other system, one may examine this consequence-inconsequence on the higher level of a meta-theory. Ambiguity and inconsequence, far from being irrationalities and derangements for which cures and prescriptions should be sought, are often occasions and stimuli for a heuristic step to new discoveries and more inclusive systems.

G. G. GRANGER

Je répondrai d'abord que je ne vois pas le chat, sauf pour la démonstration. Comme vous l'avez dit, nous savons tous ce que c'est qu'une démonstration, mais nous sommes là justement parce que nous ne savons pas ce qu'est une justification. Je vois «le sourire du chat», mais je ne vois pas le chat. Si je voyais le chat, le colloque n'aurait pas d'objet. Du reste, ceci dit, je ne défends pas les définitions que j'ai proposées; évidemment, on peut trouver qu'elles sont trop éloignées de l'usage commun, d'accord, je veux bien, mais enfin c'est un essai de leur donner une définition précise. Lorsque M. Horovitz dit que j'emploie le sens de justification en un sens très différent de celui de M. Devaux, je ne pense pas pouvoir tout à fait souscrire à cela. M. Horovitz dit: pour M. Devaux, justifier c'est fournir des raisons, mais dans le sens que j'ai pris, justifier c'est aussi fournir des raisons. Fournir des raisons est-il plus technique que justifier? Pas du tout. Lorsqu'une théorie mal agencée est remplacée dans une théorie plus cohérente et qu'à cette lumière on comprend ce qu'il y avait dans la théorie précédente, je dirais qu'on a fourni des raisons, que par exemple Pascal et Leibniz fournissent des raisons pour la théorie des indivisibles, et en la refondant. Alors je pense que sur ce point, je ne m'écarte pas trop de l'usage commun, M. Horrovitz a tout à fait bien dit ce que j'entendais par vérification. On peut en effet considérer que c'est une restriction injustifiée au sens du mot vérification. Mais alors qu'on en propose une autre qui soit définie de façon aussi précise. Quant à dire que la notion de démonstration n'est pas parfaitement satisfaisante je demande que l'on me présente alors quelque chose de plus satisfaisant que la démonstration de l'infinité des nombres premiers par Euclide, par exemple. On ne fait pas mieux.

Le mot primat, que je n'ai pas employé, je l'accepte; mais je voulais simplement dire que c'est la seule forme de quelque chose de pur, dont on sache exactement dire si cela marche ou si cela ne marche pas, tandis que dans les sciences naturelles, vous en conviendrez, nous n'avons pas d'exemple, de modèle de raisonnement dont on puisse dire avec la même sécurité que ça va ou que ça ne va plus. Voilà simplement ce que j'ai voulu dire en parlant d'un primat de la démonstration.

E. POZNANSKI

Generally I am in agreement with M. Granger's ideas, and have only a few remarks to make.

First, M. Granger speaks of «*vérification des faits*». I take that this was a slip of tongue, because we cannot verify facts. Facts are neither true or false. What we can verify are statements. It is useful to apply here the tripartite terminology used sometimes by English philosophers and logicians, namely, sentence, proposition, statement. Sentence is a linguistic expression. Proposition is the content, the meaning of a sentence (and therefore independent of the language). Statement is a sentence provided with meaning. Only statements are true or false, and therefore can be verified (or falsified). I do not know in what sense Mr. Granger used the French term 'proposition'.

Secondly: Mr. Granger spoke about demonstration and verification as *equipollent*. I would like to understand which he means by that. If he means that verification is a special kind of demonstration, namely such that the premisses are true and therefore the conclusion is true, then I am afraid that this is not tenable. Verification is a broader concept than demonstration from true premisses. Demonstration has to do with provability. But provability is not a sufficient explication of the concept of truth or verifiability, even in formal systems. This was the great discovery by Gödel that a statement in a formalized theory may be true without being provable.

My last remark concerns what M. Granger says about the place of justification. I understand that he considers justification as a kind of meta-demonstration or meta-verification, a kind of meta-theory dealing with demonstration or verification. If I ask why 2 and 2 is 4, I show that I can derive this statement from axioms. If in addition I take these axioms as true then the statement in question is also true. But now I can ask how one knows that this demonstration or this proof is valid. In this case I have to give *reasons* for the validity of the proof, and there is — it so seems to me — an essential difference between *premisses* of a mathematical proof (which in our case are *true*) and *reasons* for the validity of this proof (and reasons are neither true or false, these concepts do not apply to reasons). One cannot say that arithmetical axioms are reasons for « $2 + 2 = 4$ »

being true. But one can ask for reasons for applying some rule of inference or some method of proof.

If for a moment we do not pay attention to the difference between premisses and reasons, we may speak of a certain hierarchy among our three concepts. Demonstration is at the lowest level. Then comes verification — every demonstration with true premisses is verification, but not every verification consists in demonstration. On the top of these two comes justification which asks for the reasons of conducting demonstrations or verifications in a certain way. In this sense we may consider it as a kind of a meta-theory.

One comment on M. Gonseth's final remarks. He is quite right in warning us that we are still far from considering the foundations of mathematics as a forgone conclusion. On the contrary, it is difficult to speak of basing mathematics on the set theory, for the simple reason that there are many set theories, some poorer, some richer, and even opposed to each other. We have practically *one* arithmetic, but we have lot of set-theories, and now there exists even a mathematical discipline which may be called «comparative set theory». Quine, for instance, considers the concept of set a very complicated and controversial, and it may be unwise to reduce arithmetical concepts which are simple and clear to set-theoretical concepts which are sometimes, if not confuse, so — at least — ambiguous.

Concerning ambiguity. I agree with you that sometimes ambiguity may be valuable. Philosophy strives on ambiguity. Without it many philosophers would lose their chairs. But, after all, when one starts talking about some problem, one has to try first to understand himself what he is talking about, and then let others understand it. In order to do it, we must sometimes start a philosophical conceptual analysis, and I take it that our colloquium is an exercise in philosophical analysis. There are many meanings of the key terms of demonstration, verification and justification, and there are several proposals how to explicate them (in the Carnapian sense of explication). We compare the different explicata and decide what is the best, the most useful. Clarity is not enough, but vagueness and ambiguity are even less so.

You analyse a method of proving something not by verbal means but by some non-verbal action, and this problem in itself is interesting. But our main purpose in this discussion is less to analyse different

methods of demonstrating, proving, justifying, and more to find out the intrinsic differences between these three activities.

By the way, I agree with you that when we speak of justification we use this term in two senses, sometimes describing a process, and sometimes the *result* of the process. The same is true of demonstration and verification. But I think that from the context we can find out in what sense the term has been used.

M. MOISIL

Je me permettrai de faire une remarque, qui peut-être paraîtra à certains d'entre vous scandaleuse; je trouve que le théorème de Gödel n'a pas affaibli l'importance de la métamathématique mais par contre il a fondé, je dirai, la voie nouvelle des mathématiques modernes en utilisant une certaine idée de constructibilité et la démontrabilité d'un certain type. Le théorème de Gödel ainsi que celui de Church sur la non-résolubilité de l'*Entscheidungsproblem* ont mis en évidence l'importance exceptionnelle des fonctions récursives et des algorithmes. Or, depuis lors il y a eu le théorème de Gentzen sur la non-contradiction de l'arithmétique, démontré avec des moyens plus forts. Ce que je remarquerai c'est une tendance très claire des mathématiques modernes de s'occuper du phénomène de la récurrence, des fonctions récursives, du degré de récursivité, des algorithmes, du constructivisme sous une forme tout à fait nouvelle. Et ce constructivisme se développe en même temps que les machines à calculer, que la programmation pour les ordinateurs, d'une part et la linguistique mathématique, avec des langages *context-free*, et autres types de langages formels d'autre part; de sorte que je ne crois pas que les conséquences du théorème de Gödel ont été la déchéance de la métamathématique, mais justement le contraire, le commencement d'un progrès très important.

D'ailleurs, la métamathématique n'est qu'une métalangue par rapport à la langue elle-même et le processus de former des métalangues ne se borne pas à la métalangue, il y a une métamétalangue, et le processus continue à l'infini. Même dans certains branches très élémentaires de la logique, par exemple dans la logique des propositions, on peut avoir à employer une infinité de métalangues. On emploie tou-

jours la langue et la métalangue, parce que si les thèses du calcul des propositions font partie de la langue elle-même, le *modus ponens* ne fait pas partie de la langue, il fait partie de la métalangue. On peut construire le calcul des expressions du type du *modus ponens*. Ceci a été fait par Gentzen: ce sont des expressions que Gentzen appelle des «*Sequenzen*» et que j'appellerai schémas du second ordre; on peut, ce qui a été dit, toujours par Gentzen, construire le calcul des «*Herleitungen*» comme il les appelle, c'est-à-dire une métalangue du 3^e ordre et on peut employer tout le système infini de métalangues; donc ce passage de la langue à la métalangue qui est essentiel dans la pensée des mathématiques modernes, doit être utilisé pour en tirer tout ce qu'il peut donner.

Je me permets de remarquer que je crois que la formalisation est un processus qui ne finit pas dans l'histoire de la pensée, c'est-à-dire, je ne conçois pas les mathématiques comme se déroulant d'un certain commencement vers la fin, mais comme une double activité vers quelque chose qui sera démontré et quelque chose d'involutif, la pensée sur la pensée humaine. Il est certain que Euclide a donné une axiomatisation parfaite, mais parfaite pour qui ? J'y reviendrai tout de suite. Il est certain que pour Hilbert et ses contemporains, l'axiomatisation d'Euclide n'était plus parfaite. Comme pour nous, l'axiomatisation de Hilbert de la géométrie n'est pas parfaite si elle n'est pas complétée — Hilbert l'a fait lui-même — par les axiomes de la logique qu'on doit employer. Et les axiomes de la logique sont-ils maintenant satisfaisants pour nous tous ? Je ne crois pas. Il y a certains faits qui n'ont pas été axiomatisés. Il y a un fait sur lequel je vais insister, quoi qu'il soit très simple, et surtout parce qu'il est très simple. Lorsqu'on donne une valeur à une variable, on dit: faisons $x = 3$; ce signe d'égalité, ce n'est pas le signe d'égalité, parce que s'il était le signe d'égalité, on pourrait faire $3 = x$, ce qui est absurde: on donne la valeur 3 à x , mais on ne donne pas la valeur x à 3. C'est pourquoi dans les langues formelles modernes, dans les langues des machines à calculer, on n'emploie plus le signe d'égalité pour donner une valeur à une variable, mais un signe tout à fait nouveau qui est un signe différent et qui n'est plus symétrique $x : = 3$. Ceci montre que l'axiomatisation actuelle de la logique n'est peut-être pas parfaite. Elle est satisfaisante pour nous. Pourquoi ? Parce que les hommes (c'est-à-dire un groupe humain) se placent normalement dans un cer-

tain système déductif fermé et ils s'entendent entre eux pour développer leur activité mathématique.

Faire des mathématiques, ou bien des démonstrations, c'est une activité. Et cette activité, elle est faite par des gens qui s'entendent sur les choses fondamentales; par exemple, on s'est entendu pendant des centaines d'années sur $x = 3$ comme «donnons à x la valeur 3». Dès l'instant qu'on ne s'entend plus, qu'on commence à penser, à réfléchir sur son propre travail, l'activité demande une activité involutive qui exprime les choses dont on n'est plus tout à fait d'accord. Par exemple, toutes les surfaces avaient des plans tangents, elles en avaient du moins tant qu'on n'avait pas démontré ce théorème. Le théorème n'est devenu faux que lorsqu'on a essayé de le démontrer. Auparavant, lorsqu'on parlait de surfaces, on parlait de certaines surfaces et on s'entendait qu'on ne s'occupait que d'elles; même pour ces surfaces, on excluait par exemple pour le cône le sommet parce qu'au sommet du cône il n'y a pas de plan tangent; je crois que tout le monde le savait, avant Euclide même. Lorsqu'on a essayé de démontrer le théorème d'existence du plan tangent, ce théorème s'est avéré faux. Il ne l'était pas auparavant parce que dans la pensée des gens qui avaient une activité déductive, il était vrai, ne concernant que certaines surfaces. Je pense que je pourrai une autre fois donner plus de précisions sur ce point de vue que j'ai voulu esquisser à cette occasion. Merci.

Ch. PERELMAN

Je voudrais poser à M. Granger quelques questions d'ordre philosophique. Je dis «d'ordre philosophique» parce que, que nous le voulions ou non, notre discussion ne concerne ni la logique, ni les mathématiques, mais c'est bien une tentative philosophique de clarifier des rapports entre des notions très générales, celles de démonstration, de vérification, de justification. Et la meilleure preuve, c'est que l'exposé de M. Granger commence et se termine par des affirmations d'ordre général, tout le reste ne prenant son sens que par rapport à ce début et à cette fin.

Quel est ce début ? «Le point de vue que nous adopterons ici, dites-vous, d'une épistémologie entendue comme philosophie de l'œuvre scientifique, ne signifie nullement que nous récusons d'autres pers-

pectives». Mais votre étude effective concerne non pas une œuvre scientifique concrète, mais un modèle abstrait dont il s'agit de déployer les propriétés structurales. Comme vous le dites plus loin «le trait distinctif de la démonstration est qu'elle opère dans un univers rigoureusement abstrait; le type de nécessité qu'elle propose est défini sans ambiguïté, à l'intérieur d'un langage formel, par récurrence sur une certaine classe de suites d'expressions bien formées, au moyen d'une règle élémentaire d'inférence». Mais est-ce ainsi que se présente effectivement toute œuvre que l'on qualifie, sans conteste, de scientifique ? S'agit-il là de science effective ou de science telle que vous la concevez idéalement, c-à-d. de ce qui correspond à votre idéal de la science ? Mais si c'est bien là votre idéal, pourriez-vous nous dire quelle est votre conception du réel, quelle est votre ontologie, qui permettrait d'affirmer que votre science idéale en fournit une représentation ?

Parce que s'il s'avérait que la réalité était telle que votre science idéale ne permettrait de la représenter qu'au prix d'un appauvrissement qui la simplifierait à l'extrême, qui ne permettrait pas au savant de poser et de résoudre les problèmes concrets qui l'intéressent, alors votre idéal serait fort contestable.

Cependant, sans nous présenter cette vision du réel, vous n'hésitez pas à conclure que celui qui n'a pas la même conception que vous des rapports entre la démonstration, la vérification et la justification, confond la science avec les doctrines les plus diverses, ce qui mène tout droit à l'irrationalisme.

Mais votre affirmation, qui n'est pas scientifique, mais est philosophique — et ce qui nous intéresse effectivement, c'est la perspective philosophique que vous nous présentez de la science — quels sont les instruments techniques qui lui permettent d'être à l'abri d'une accusation d'irrationalité ? Car ne peut-on pas vous accuser de philosopher d'une façon irrationnelle à propos d'une science idéale qui ne rend pas compte du réel tel qu'il est ?

Or je crois que la pensée philosophique a aussi des prétentions à la rationalité et que, pour pouvoir justifier ses prétentions, votre vision de la science idéale doit présenter corrélativement une conception du réel, que celle-ci soit platonicienne ou autre, qui nous permettent de partager votre idéal de la science, qui serait non seulement rigoureuse mais aussi adéquate.

G. G. GRANGER

A toutes les observations qui m'ont été présentées, je me permettrai de répondre extrêmement brièvement, non pas que j'estime m'être ainsi acquitté de ma dette, mais faute de temps.

D'abord les questions qu'à posées M. Poznansky. Si j'ai parlé de vérification des faits, c'était en effet un lapsus. J'en conviens tout à fait et je m'en excuse. 2e question. Que voulais-je dire lorsque j'ai parlé de l'équipotence de la vérification et de la démonstration ? Eh bien je voulais dire que dans un système suffisamment pauvre, comme par exemple le calcul des propositions, tout ce qui est démontrable est vérifiable, et réciproquement. Et enfin, dernière question, je crois, j'étais tout à fait d'accord avec vous, de sorte que je n'ai pas prononcé le nom de hiérarchie ni de primat mais peut-être l'avais-je derrière la tête. Ce qu'a dit M. Moisil n'exige pas de moi une réponse. Je dis simplement que je suis entièrement d'accord avec l'idée que bien loin d'affaiblir la pensée métamathématique, les théorèmes de limitation sont la preuve de leur valeur et de leur intérêt, et que d'autre part la formalisation actuelle de la logique n'est pas une formalisation qu'on puisse considérer comme *ne varietur*; bien entendu, sinon cela signifierait que, comme on l'a cru longtemps, la logique est achevée et qu'il n'est plus question d'en parler. Je ne le crois pas, en effet. Ce qu'a dit M. Perelman, au contraire, appellerait une justification, ou bien il faut que je batte ma coulpe. Je la bats en effet, partiellement, mais je ne me rends pas tout à fait cependant, j'ai dit que mon point de vue consistait à prendre l'œuvre scientifique en tant qu'elle est une œuvre scientifique existante et non pas à prendre la science comme un idéal. Or, M. Perelman, et en somme presque à juste titre, — je conviens, qu'il y eut maladresse de ma part, — m'accuse d'avoir pris pour l'œuvre scientifique simplement le processus de formalisation. C'est vrai mais je pense, à tort peut-être, qu'il serait possible de «montrer», au sens de la justification, que dans toute œuvre scientifique, si éloignée qu'elle soit de la pure formalisation du mathématicien, il y a nécessairement la présence, soit comme horizon encore très lointain, soit comme achèvement déjà presque réalisé, de cette idée que la pensée formelle est la seule pensée qui se distingue d'une manière radicale de toutes les autres formes de pensée, et c'est à cela que j'attache le label de science; mais je reconnais que vous avez le droit de

n'être pas d'accord; cependant je pense que c'est cela que font les savants — et même si certains savants disent le contraire, je pense que ce qu'ils font est assez conforme à ce que je suggère. Il faudrait en discuter davantage, bien évidemment. Enfin, M. Perelman a porté une seconde accusation extrêmement grave, en disant que j'ai jeté l'anathème sur l'irrationalisme; je ne voudrais cependant jeter l'anathème sur personne, que les irrationalistes aillent en paix; mais, j'ai paru dire très brutalement en effet que hors de ce que nous pensons, moi et mes amis, il n'est de salut. C'est vrai, mais ne le disons-nous pas tous d'une façon plus ou moins voilée ? Enfin je l'ai dit ! Et M. Perelman de rétorquer: «Mais alors ce que vous faites actuellement, c'est de l'irrationalisme tout pur», je ne le pense pas; car ce que j'appelle irrationalisme, ce n'est pas le fait de ne pas s'en tenir à la démonstration, auquel cas la philosophie serait nécessairement irrationaliste, c'est le fait de *confondre* ce qui n'est pas démonstration — au sens où je l'ai dit — avec une démonstration. C'est-à-dire de croire justement que l'on a *démontré* quelque chose alors que l'on n'a rien démontré. Je n'ai rien démontré, je le dis, je le proclame, et vous ne le savez que trop; et je n'ai voulu justement qu'essayer de justifier, mais que en aucun sens à mon avis, cette justification ne peut tenir lieu d'une démonstration. En cela, je ne puis donc être taxé d'irrationalisme ?

Ch. PERELMAN

Comment pouvez-vous justifier votre position si vous limitez la justification à ce que vous avez dit, il faut quand même qu'il y ait un autre type de justification pour que votre discours soit un discours raisonnable — et je crois qu'il est raisonnable.

G. G. GRANGER

J'ai dit seulement que la justification était une tentative d'organisation pour une démonstration possible, mais vous avez tout à fait raison en ce sens que bien entendu il faudrait que j'expose beaucoup plus complètement les *arrière-plans des différents choix* que j'ai faits.

J'en suis bien d'accord. Mais convenez que ce n'est pas possible dans les circonstances présentes et que d'autre part ça n'est jamais fini, parce que vous pourrez toujours me poser la même question. J'avais cru commencer ma justification, sans doute n'ai-je pas même commencé vraiment et n'ai-je fait que croire me mettre en route.