DER GRUPPENCHARAKTER DER TRANSFORMATIONEN DER DYADISCHEN AUSSAGE-VERKNÜPFUNGEN

Karl DÖHMANN

Durch Negation des Vorder- oder Hintergliedes oder der Gesamt-Aussage, oder durch Kombinationen dieser Negierungen lässt sich bekanntlich jede der 16 möglichen dyadischen Aussage-Verknüpfungen unter passender Funktor-Änderung *so* transformieren, dass die transformierte Aussagefunktion dasselbe " besagt" wie die negationslose Aussageverknüpfung, — oder dass sie, wie wir sagen können, — mit ihr gleichbedeutend, "tautosemantisch" ist.

So ist z.B. $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q = p \,/\, \bar{q}$ usw.

Wir können so bei jeder der 16 Aussage-Funktoren

1) Vorder- und Hinterglied unverändert lassen,
2) das Vorderglied negieren,
3) das Hinterglied negieren,
4) Vorder- *und* Hinterglied negieren,

und ausserdem bei allen diesen 4 Fällen auch noch die Gesamtaussage negieren.

Im Ganzen gibt es also 8 Möglichkeiten, das, was die negationslose Aussage-Verknüpfung $F = p \diamond q$ besagt, formal auszudrücken. Diese sollen hier in folgender Weise bezeichnet und angeordnet werden:

	1	2	3	4	5	6	7	8
	$p \diamond q$	$\bar{p} \diamond q$	$p \diamond \bar{q}$	$\bar{p} \diamond \bar{q}$	$\overline{p \diamond q}$	$\overline{\bar{p} \diamond q}$	$\overline{p \diamond \bar{q}}$	$\overline{\bar{p} \diamond \bar{q}}$
	F	$-F$	$F-$	$-F-$	$\overline{F}$	$\overline{-F}$	$\overline{F-}$	$\overline{-F-}$
bzw.	F	$-F$	$F-$	R	C	$-C$	$C-$	D

Mit den Bezeichnungen F, R, C, D werden, wie man sieht, die Ausdrücke hervorgehoben, die *keine einseitigen* Negationen enthalten.

Transformationen *mit einseitigen* Negationen sind $-F$, $F-$,

$\overline{-F}$, $\overline{F-}$. Wir wollen für die beiden letzteren auch die Symbole $-C$ bzw. $C-$ verwenden.

F ist, wie gesagt, die jeweilige negationslose Ausgangsfunktion. Jede der 16 dyadischen Funktionen kann dafür eingesetzt werden.

Die Symbole R, C und D sind zunächst ganz unter mnemotechnischem Gesichtspunkt gewählt:

R RE(TRO) -F ist z.B. die *Re*plikation zur Implikation,
C CONTRA -F ist z.B. die *Kontra*valenz zur Aequivalenz, und
D DIS -F ist z.B. die *Dis*junktion zur Konjunktion.

Für die Disjunktion z.B. hätten wir die geordneten gleichbedeutenden Transformationen in folgender Reihenfolge:

$$p \vee q = \bar{p} \rightarrow q = p \leftarrow \bar{q} = \bar{p} / \bar{q} = \overline{p \nrightarrow q} = \overline{\bar{p} \succ\!\!- q}\; \overline{p -\!\!\prec \bar{q}}\; \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$$

Das vollständige System können wir dann, — unter Weglassung von p und q, sowie der Negations- und Gleichheitszeichen, — in folgende Tabellenform bringen, wobei jeder Kolonne die über ihr angegebene Negationsanordnung zukäme:

				R	C	−C	C−	−C−
	F	−F	F−	−F−	$\overline{F}$	$\overline{-F}$	$\overline{F-}$	$\overline{-F-}$
1.	⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
2.	∨	→	←	/	↛	≻–	–≺	∧
3.	←	/	∨	→	–≺	∧	↛	≻–
4.	┘	┐	┘	┐	┐	┘	┐	┘
5.	→	∨	/	←	≻–	↛	∧	–≺
6.	└	└	┌	┌	┌	┌	└	└
7.	↔	≻≺	≻≺	↔	≻≺	↔	↔	≻≺
8.	∧	–≺	≻–	↛	/	←	→	∨
9.	/	←	→	∨	∧	–≺	≻–	↛
10.	≻≺	↔	↔	≻≺	↔	≻≺	≻≺	↔
11.	┌	┌	└	└	└	└	┌	┌
12.	≻–	↛	∧	–≺	→	∨	/	←
13.	┐	┘	┐	┘	┘	┐	┘	┐
14.	–≺	∧	↛	≻–	←	/	∨	→
15.	↛	≻–	–≺	∧	∨	→	←	/
16.	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤

Dieser Tabelle kann man zweierlei entnehmen:

1) die Gleichungen zwischen gleichbedeutenden Transformationen z.B.

$$p \vee q = \bar{p} / \bar{q};$$

2) die zwischen zwei Funktoren bestehende *Beziehung* (symbolisch durch die entsprechenden kleinen Buchstaben r, c, d, sowie f, $^-$f, f$^-$, $^-$c, und c$^-$, ausgedrückt):
   z.B.: $\vee$ ist die Retro-Funktion von /, und umgekehrt.
   Oder: $\vee$ und / stehen zueinander in der Beziehung r. (Es handelt sich hier immer um *symmetrische* Beziehungen.)

Es gilt der Satz: Wenn 2 Transformationen zueinander die Beziehung f' (z.B. r) haben, zo ergibt ihre Verknüpfung die Transformation F' (im Beispiel also R).

Im Folgenden soll der Gruppencharakter dieser Transformationen näher untersucht werden; und zwar zunächst der der Transformationen *ohne ein*seitige Negationen, — also der des Systems F R C D.

I. Der Gruppencharakter des Systems F R C D

1) Der Beweis, dass es sich beim System F, R, C, D um eine Gruppe handelt, ergibt sich durch eine Überprüfung der Gruppenkriterien:

I. Es besteht eine eindeutige Verknüpfungsvorschrift: und zwar darin, dass die betreffenden Operationen "aufeinander angewandt" werden sollen, d.h.: zu den Negationszeichen der einen Transformation sollen die der anderen hinzugefügt werden. (Etwaige einander aufhebende Negationszeichen sind dann wegzulassen).

II. Die Verknüpfung zweier System-Elemente ergibt stets ein Element des Systems: die Negationszeichen können an 3 Stellen der Funktion F sitzen (Vorderglied, Hinterglied, Gesamt-Funktion). Wo sie in gerader Anzahl sitzen, heben sie einander weg, wo in ungerader, dort bleibt ein Negationszeichen bestehen. Das führt ersichtlich immer zu einer der 4 Transformationen, also zu F, R, C oder D.

Das Gruppenkriterium II ist damit bereits erfüllt. Das Gesagte gilt aber ersichtlich auch für die Verknüpfung von mehr als 2 Transformationen, da die Summierungen der Negationszeichen immer entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von ihnen ergeben muss.

III. Die Assoziativität ergibt sich daraus, dass es bei der Summierung der Negationszeichen, — wie bei jeder Summierung, — gleichgültig ist, in welcher Reichenfolge sie geschieht.

IV. Es existiert ein Einheits-Element, nämlich F. Da dieses kein Negationszeichen enthält, ändert es an dem bisher vorliegenden Bestande an Negationszeichen nichts; die Verknüpfung mit F lässt also jede Transformation (und natürlich auch jede Verknüpfung von solchen) unverändert:

$$FF = F, \quad FR = R, \quad FC = C, \quad FD = D.$$

V. Jedes System-Element (d.h. jede Transformation) ergibt, mit sich selbst verknüpft, das Einheits-Element F:

$$FF = F, \quad RR = F, \quad CC = F, \quad DD = F.$$

Es existiert also zu jedem Element ein inverses Element; eine Besonderheit unseres Systems ist, dass jedes Element zu sich selbst invers ist.

Alle Gruppenkriterien sind damit erfüllt. Bei dem Kriterium V zeigte das System FRCD bereits eine über die allgemeinen Gruppencharakteristik hinausgehende Sondereigenschaft.

2) Quadratisches Schema:

$$\begin{array}{cccc} F & R & C & D \\ R & F & D & C \\ C & D & F & R \\ D & C & R & F \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

3) Beziehungsbild:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, dash, "r"] \arrow[d, dash, "c"'] \arrow[dr, dash, "d"] & R \arrow[d, dash, "c"] \arrow[dl, dash] \\ C \arrow[r, dash, "r"'] & D \end{tikzcd}$$

4) VERKNÜPFUNGEN. — Im Folgenden sollen einige Variable eingeführt werden:

A für ein beliebiges Element der Gruppe (das auch das Einheits-Element sein kann), F ist weiterhin das Einheits-Element.

X, Y, Z seien Variable für die 3 Nicht-Einheits-Elemente (R, C, D)

Zweier-Verknüpfungen:	1)	FF = F	AA = F
	2)	FX = X	FA = A
	3)	XY = Z	
	4)	XX = F	
Dreier-Verknüpfungen:	1)	FFF = F	AAA = A
	2)	FFX = X	FFA = A
	3)	FXY = Z	
	4)	FXX = F	FAA = F
	5)	XYZ = F	
	6)	XYY = X	
	7)	XXX = X	
Vierer-Verknüpfungen:	1)	FFFF = F	AAAA = F
	2)	FFFX = X	FFFA = A
	3)	FFXY = Z	
	4)	FFXX = F	FFAA = F
	5)	FXYZ = F	
	6)	FXYY = X	
	7)	FXXX = X	FAAA = A
	8)	XXYZ = X	
	9)	XXYY = F	
	10)	XXXY = Z	
	11)	XXXX = F	

Verknüpfung *zweier* identischer Elemente ergibt das Einheits-Element F [1), 4)].

Verknüpfung zweier verschiedener Elemente ergibt,

wenn das eine davon das Einheits-Element ist, das andere Element (Nicht-Einheits-Element [2)].

wenn beide Nicht-Einheits-Elemente sind, das dritte Nicht-Einheits-Element [3)].

Verknüpfung *dreier* identischer Elemente ergibt das betr. Element [1), 7)].

Verknüpfung dreier verschiedener Elemente ergibt das vierte Element [3), 5)].

Verknüpfung *dreier* Elemente, unter denen 2 identische sind, ergibt das nur einfach vertretene Element [2), 4), 6)].

Verknüpfung *vierer* Elemente, die alle oder paarweise identisch sind, ergeben das Einheits-Element F [1), 4), 9), 11)].

Verknüpfung *vierer* Elemente, unter denen 3 identische sind, ergeben,

wenndie letzteren das Einheits-Element sind [3)],

oder wenn das solitäre das Einheits-Element ist, das in ihr enthaltene Nicht-Einheits-Element, [2), 7)],

wenn sämtliche Elemente Nicht-Einheits-Elemente sind, das nicht in ihr vertretene Nicht-Einheits-Element [10)].

Verknüpfung *vierer* Elemente, von denen 2 identisch und 2 verschieden sind, ergibt,

wenn die identischen Einheits-Element sind, das nicht-vertretene Nicht-Einheits-Element [3)],

wenn alle, die identischen und die nicht-identischen Nicht-Einheits-Elemente sind, das doppeltvertretene Nicht-Einheits-Element [8)],

wenn die identischen Nicht-Einheits-Elemente, und eins der nicht identischen Einheits-Element ist, das solitäre Nicht-Einheits-Element [6)].

Verknüpfung *vierer* verschiedener Elemente ergibt das Einheits-Element F [5)].

5) Zusammenfassung: Das System F R C D ist eine kommutative (ABELsche) Gruppe, zugleich eine "Vierergruppe" (F. KLEIN), bei der jede Verknüpfung nicht nur zweier, sondern beliebig vieler Elemente immer ein Element der Gruppe ergibt, und in der jedes Element zu sich selbst invers ist.

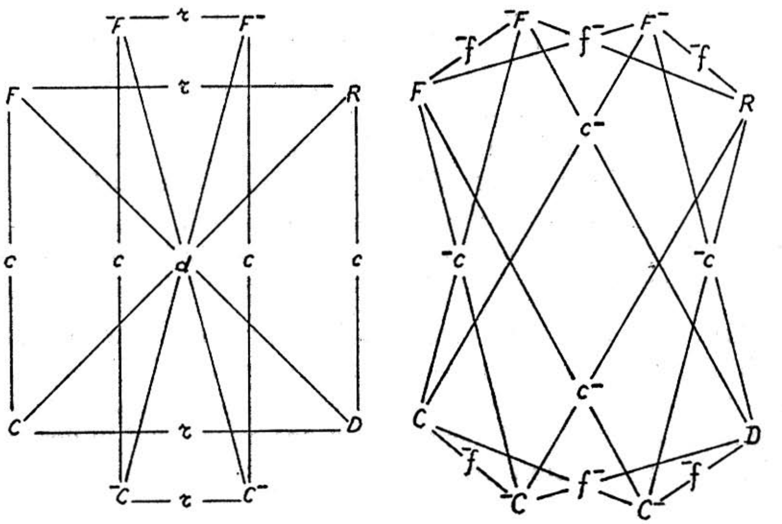
II. Der Gruppencharakter des Systems F −F F− R C− C C− D

1) Der Beweis ist völlig analog dem unter I 1) für das System F, R, C, D geführten Beweise. Alles dort Gesagte gilt entsprechend auch hier.

2) Quadratisches Schema:

F	−F	F−	R	C	−C	C−	D		1	2	3	4	5	6	7	8
−F	F	R	F−	−C	C	D	C−		2	1	4	3	6	5	8	7
F−	R	F	−F	C−	D	C	−C		3	4	1	2	7	8	5	6
R	F−	−F	F	D	C−	−C	C		4	3	2	1	8	7	6	5
C	−C	C−	D	F	−F	F−	R		5	6	7	8	1	2	3	4
−C	C	D	C−	−F	F	R	F−		6	5	8	7	2	1	4	3
C−	D	C	−C	F−	R	F	−F		7	8	5	6	3	4	1	2
D	C−	−C	C	R	F−	−F	F		8	7	6	5	4	3	2	1

3) Beziehungsbild:



4) VERKNÜPFUNGEN. — Zur Formelersparnis führen wir hier wieder, wie bereits bei Behandlung der Vierergruppe, Variable ein. X, Y, Z, T, U, V, W für die 7 Nicht-Einheits-Elemente

−F F− R C −C C− D.

F für das Einheits-Element,
A für ein beliebiges Element.

Trotz der Zusammenfassung homologer Fälle durch die Variablen-Methode würde sich hier für die Zweier-, Dreier- usw... bis Achter-Verknüpfungen ein höchst umfangreicher Formelapparat ergeben.

Wir können aber verallgemeinern:

In jeder beliebigen Verknüpfung irgendwelcher Elemente der Achtergruppe können wir "weglassen":

1) das Einheits-Element F, so oft es vorkomme, da es ja nichts am Ergebnis der übrig bleibenden Verknüpfung ändert, und
2) jedes Paar von identischen Nicht-Einheits-Elementen, da jedes Paar ja das Einheits-Element ergibt.

Bleibt dann ein einzelnes (Nicht-Einheits-) Element X übrig, so bildet es das Verknüpfungsergebnis.

Bleibt eine Verknüpfung von je einmal vertretenen Nicht-Einheits-Elementen übrig, — etwa XY, XYZ, ..., XYZTU, — so ist eine weitere Lösung in einer einzigen Variablen nicht möglich. Es müssen dann die im konkreten Einzelfall vorliegenden Elemente (Transformationen) _F, F_, R, C & c) eingesetzt und das Ergebnis dieses Ausdruckes ermittelt werden.

Es ist also, wie bei der Vierergruppe,

XX = F, XYY = X, XXZZ = F, und weiterhin
XXZZUU = F, FXYYTTVV = X usw.

Aber XY ist hier nicht, wie bei der Vierergruppe, gleich Z, da hier noch weitere Nicht-Einheits-Elemente vorhanden sind; ebensowenig ist hier XYZ gleich F, aus demselben Grunde.

Es gelten jedoch folgende allgemeinen Sätze:

SATZ 1: Die Verknüpfung sämtlicher 8 Elemente, — ebenso die sämtlicher (je einmal vorkommender) Nicht-Einheits-Elemente, ergibt das Einheits-Element F.
FXYZTUVW = XYZTUVW = F.

SATZ 2: Die Verknüpfung von 6 verschiedenen Nicht-Einheits-Elementen ergibt das nicht vertretene 7te Nicht-Einheits-Element.
XYZTUV = W.
(Analog war bei der Vierergruppe F R C D: XY = Z.)

SATZ 3: Die Verknüpfung einer beliebigen Anzahl von verschiedenen Nicht-Einheits-Elementen ist gleich der Verknüpfung der übrigen (verschiedenen) Nicht-Einheits-Elemente, — z.B. XYZ = TUVW.

Beweis: Die Verknüpfung aller 7 Nicht-Einheits-Elemente ergibt das Einheits-Element F (da sämtliche summierten Negationszeichen einander aufheben (*SATZ* 1). Ergibt also die Verknüpfung eines Teiles von ihnen etwa X, so muss der restliche Teil in seiner Verknüpfung ebenfalls X ergeben, — da nur XX F ergibt, wie erforderlich.

SATZ 4: Die Verknüpfung einer beliebigen Anzahl von Nicht-Einheits-Elementen, unter denen manche *mehr*fach vorkommen, ergibt sich einfach dadurch, dass man die identischen Elemente *paar*weise wegstreicht und dann das Ergebnis der übrigbleibenden Verknüpfung ermittelt.

Wie man leicht sieht, ist *SATZ* 2 nur ein Spezialfall von *SATZ* 3.

Die Gültigkeit dieser Sätze hängt ersichtlich ab von der Sondereigenschaft der hier vorliegenden Gruppen, dass jedes Element *zu sich selbst invers* ist, dass also immer XX gleich F ist.

5) Zusammenfassung: Das System F −F F− R C −C C− D ist eine kommutative (ABELsche) Gruppe, zugleich eine "Achtergruppe", bei der jede Verknüpfung nicht nur zweier, sondern beliebig vieler Elemente immer ein Element der Gruppe ergibt, und in der jedes Element zu sich selbst invers ist.

Jedes Element hat ferner ein *NEGAT* (F ... C, −F ... −C, F− ... C−, R ... D). Die Verknüpfung dieser Paare ergibt immer C. (Dieser Satz gilt auch für die Vierergruppe F R C D).

Zu jedem Element der Achtergruppe, das eine eine *ein*seitige Negation enthaltende Transformation darstellt, gehört ein ebensolches, da das eine Transformation mit *anders*seitiger Negation darstellt.

Die Verknüpfung dieser Paare ergibt immer R.

−F F− = F− −F = R, −C C− = C− −C = R

Zu jedem Element der Achtergruppe, das eine eine *ein*seitige Negation enthaltende Transformation darstellt, gehört das *Negat* eines ebensolchen, das eine Transformation mit *anders*seitiger Negation darstellt.

Die Verknüpfung dieser Paare ergibt immer D.

−F C− = F− −C = D

Vgl. hierzu die Lage der F und C in der einen, und der R und D in der anderen Diagonalrichtung des quadratischen Schemas).

III. F R C D als Untergruppe von F –F F– R C –C C– D

Da sämtliche Elemente der Vierergruppe in der Achtergruppe vorkommen, ist sie eine Untergruppe der letzteren.

Und zwar ist sie eine *maximale invariante* Untergruppe von ihr.

Es entsteht die Frage, ob die Achtergruppe noch andere Untergruppen hat.

Die Frage ist zu bejahen. Abgesehen von dem trivialen Fall des als Untergruppe betrachteten Einheits-Elements F existieren 7 echte Zweiergruppen, F X, die aus dem Einheits-Element und einem der 7 Nicht-Einheits-Elemente besteht.

Dreier-, Fünfer-, Sechser- und Siebenergruppen können nicht existieren, da, wie ein Blick auf das quadratische Schema lehrt, dabei immer Produkte vorkommen, die nicht in den betr. Teilsystemen vorkommen.

Dagegen gibt es noch weitere Vierergruppen, die Untergruppen unserer Achtergruppe sind.

Im Ganzen, — d.h. einschliesslich der Untergruppe F R C D, — existieren *sieben* Untergruppen vierter Ordnung, die sich am besten durch Bezeichnung ihrer Lokalisation innerhalb der Achtergruppe veranschaulichen lassen:

1	2	3	4	5	6	7	8
o	o	o	o	.	.	.	.
o	o	o	o	.	.	.	
o	o	o	o	.	.	.	.
o	o	o	o	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

F –F F– R

1)

1	2	3	4	5	6	7	8
o	o	.	.	o	o	.	.
o	o	.	.	o	o	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
o	o	.	.	o	o	.	.
o	o	.	.	o	o	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

F –F C –C

2)

1	2	3	4	5	6	7	8
o	o	.	.	.	.	o	o
o	o	.	.	.	.	o	o
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
o	o	.	.	.	.	o	o
o	o	.	.	.	.	o	o

F –F C– D

3)

```
1 2 3 4 5 6 7 8      1 2 3 4 5 6 7 8      1 2 3 4 5 6 7 8
o . o . o . o .      o . o . . o . o      o . . o o . . o
. . . . . . . .      . . . . . . . .      . . . . . . . .
o . o . o . o .      o . o . . o . o      . . . . . . . .
. . . . . . . .      . . . . . . . .      o . . o o . . o
o . o . o . o .      . . . . . . . .      o . . o o . . o
. . . . . . . .      o . o . . o . o      . . . . . . . .
o . o . o . o .      . . . . . . . .      . . . . . . . .
. . . . . . . .      o . o . . o . o      o . . o o . . o
F  F− C  C−          F  F− −C  D          F    R C    D
                                      (unsere Vierergruppe (1) )
4)                   5)                   6)
```

```
1 2 3 4 5 6 7 8
o . . o . o o .
. . . . . . . .
. . . . . . . .
o . . o . o o .
. . . . . . . .
o . . o . o o .
o . . o . o o .
. . . . . . . .
F    R −C C−
7)
```

Die übrigen aus dem Einheits-Element (F bzw. 1) und 3 anderen Elementen der Achtergruppe zusammenstellbaren Vierer-Komplexe F ... bzw. 1 o o o enthalten in ihrem quadratischen Schema an den bezeichneten Plätzen je zweimal die Produkte u, v und w, die nicht zu den Elementen des betr. Viererkomplexes gehören:

```
1 o o o
o 1 u v
o u 1 w
o v w 1 .   (1)
```

Sie erfüllen also nicht das II. Gruppen-Kriterium, sind also keine Gruppen.

(1) Beispiele:

1 2 3 6	F	−F	R	−C ;	1 4 5 7	F	R	C	C−
2 1 3 5	−F	F	F−	C	4 1 8 6	R	F	D	−C
4 3 1 7	R	F−	F	C−	5 8 1 3	C	D	F	F−
6 5 7 1	−C	C	C−	F	7 6 3 1	C−	−C	F−	F

Berlin

Karl DÖHMANN