

PROBABILITÉS OBJECTIVES OU SUBJECTIVES ?

HANS FREUDENTHAL

Le point est-il ce qui n'a pas de parties, comme le disait Euclide, ou est-il le bout d'une ligne, comme l'affirmaient quelques hétérodoxes ? Est-il vrai que deux droites parallèles se coupent à l'infini ? L'angle que font un cercle et sa tangente est-il nul ou seulement infiniment petit ? C'est là un choix de questions qu'on a débattues jusqu'à la fin du XIX^e siècle. Elles nous semblent ridicules aujourd'hui parce que nos idées sur la géométrie ont changé.

La géométrie a été une science hybride. D'une part elle était un exemple superbe d'une science déductive, d'autre part elle semblait dépendre d'expériences spatiales qui devaient lui servir de fondement, bien entendu pas trop solide. Je ne veux pas insister sur la solution épistémologique que Kant a proposée de ce problème, et je me borne à remarquer qu'au cours du XIX^e siècle une solution purement mathématique se prépare qui est formulée dans les *Fondements* de Hilbert.

Nous concevons, dit Hilbert, trois systèmes différents d'objets, appelés «points», «droites» et «plans», liés par certaines relations, comme «... incident à ...», «...entre...», «...parallèle à...», «...congruent à...», etc., et pour lesquels suffisent un nombre déterminé de propositions appelées axiomes. Et de ces seuls axiomes on tire des conclusions, sans faire aucun appel à l'intuition ou à des suppositions furtives non-mentionnées dans les axiomes. Le système d'axiomes est complet, en ce sens que tout ce que le géomètre veut démontrer peut être dérivé des axiomes. De la sorte, il n'importe pas de savoir ce que sont les points, les droites et les plans en dehors de ce qui en est énoncé dans les axiomes. Ce sont des objets non-définis, et la question de leur vraie nature ne se pose pas. Le lien ontologique qui liait la géométrie à l'espace physique est coupé. La géométrie est devenue mathématique pure.

L'axiomatique a fait de grand progrès, non seulement en géométrie, mais, comme méthode généralisante, dans toutes les disciplines des mathématiques. Enfin elle a aussi atteint la théorie des probabilités.

Cette théorie, née au XVII^e siècle, posait des problèmes fondamentaux particulièrement difficiles. Comment définir la probabilité d'un événement ? Pour les inventeurs de ce calcul ce n'était pas un pro-

blème. Ils s'occupaient de jeux de hasard, et ce qu'est la probabilité d'un six ou d'un autre nombre quand on jette un dé, c'est quelque chose de numériquement fixé par les règles du jeu. Ce que font les probabilistes, c'est de calculer des probabilités composées, par exemple celle d'au moins un six en quatre coups. La théorie des probabilités donne des règles pour dériver à partir d'une probabilité connue une probabilité inconnue. C'est le rôle commun des mathématiques. L'arithmétique ne vous dit pas que nous avons dix doigts, mais, ce fait étant supposé, elle démontre que deux personnes en ont vingt. Ou plus généralement: elle ne donne pas de règles pour compter des ensembles physiques, mais elle nous dit par exemple que l'union de deux ensembles de a et de b éléments est un ensemble de $a + b$ éléments, et de cette manière elle peut faciliter la tâche de compter des ensembles physiques. De même la théorie des probabilités dérive de nouvelles probabilités non seulement en partant de probabilités connues, mais aussi de probabilités supposées connues. La probabilité d'un événement étant p , on démontre par exemple que la probabilité

de x succès en n coups indépendants est $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ — c'est la

distribution binomiale ou de Jacques Bernoulli. Cette expression est particulièrement intéressante. Pour n grand il apparaît qu'elle n'a une

valeur sensiblement différente de 0 que si $\frac{x}{n}$ ne diffère pas trop de

p . C'est le théorème célèbre de Bernoulli, appelé depuis Poisson

«théorème des grands nombres»: La probabilité des fréquences $\frac{x}{n}$

qui diffèrent de plus de p d'un α donné, est aussi petite qu'on veut, à condition que n soit assez grand.

Les inventeurs du calcul des probabilités partaient de probabilités connues, déterminées par les règles des jeux de hasard. Mais bientôt d'autres questions se sont posées. Ce dé concret satisfait-il aux règles du jeu, quelle est la probabilité qu'un nouveau-né soit mâle ou femelle, etc. ? Cette espèce de problèmes est abordée au moyen de la loi des grands nombres: si le dé n'est pas pipé alors le six doit avoir une probabilité d'un sixième, et, d'après le théorème de Bernoulli, dans un grand nombre de coups la fréquence du 6 doit être à peu près un sixième. Si, au contraire, la fréquence du 6 s'écarte trop de cette fraction, on peut soupçonner que sa probabilité n'est pas un sixième. A vrai dire, le théorème des grands nombres ne démontre pas cela, et aucune mathématique ne pourrait le démontrer. Ce que le

théorème dit, c'est seulement que des déviations sensibles entre la fréquence observée et la valeur $\frac{1}{6}$ seraient très improbables, et no-

tamment moins probables à mesure que n va être plus grand. Cette substitution de l'impossible à l'improbable, du vrai au très-probable est parfois appelée la *règle de Cournot*, quoique Cournot n'en fût pas l'inventeur.

La théorie des probabilités est un système déductif logiquement clos comme l'arithmétique. Dès le moment où l'on veut appliquer l'arithmétique, on doit quitter le domaine mathématique, on doit identifier les nombres mathématiques à des nombres d'objets physiques. Cela peut se faire directement ou par des instruments compliqués, où l'on ne compte pas des vaches, mais des centimètres contenus dans une longueur, des secondes contenues dans un laps de temps. De même dans les applications, la probabilité mathématique est identifiée avec certaines fréquences, non pas directement, mais par un processus subtil où la loi des grands nombres joue un rôle. On postule cette identification seulement pour les probabilités faibles, en disant que ce qui a une petite probabilité est rare, et finalement on néglige complètement ce qui est rare.

C'est un fait historique qu'on ne s'est pas contenté de cette solution. La raison en a été une découverte très importante, mais qui a troublé le développement de la théorie des probabilités, la découverte de la *règle de Bayes*,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)}{P(B)} P(A),$$

Pour simplifier l'exposition, supposons donnée une urne contenant des balles blanches et des balles noires, et où la proportion p de balles blanches doit être estimée en prélevant dans l'urne un échantillon de n balles. On conçoit une collection d'urnes de diverses compositions et, une fois qu'un échantillon a été pris dans l'urne donnée, on demande la probabilité que cet échantillon provienne d'une certaine espèce d'urne. On considère toutes les paires possibles «urne-échantillon», une espèce d'urnes A et une espèce d'échantillons B . A l'aide de la formule binomiale on trouve la probabilité $P(B|A)$ pour qu'un échantillon d'espèce B provienne d'une urne qui soit d'espèce A . C'est-à-dire qu'après qu'on aura tiré un échantillon, on pourra obtenir des conclusions relatives à l'urne dont il est sorti.

Bien entendu, pour faire cela, on doit aussi connaître $P(A)$, la probabilité a priori, avant l'expérience, que l'urne soit d'espèce A .

Après l'expérience qui fournit un échantillon d'espèce B, cette probabilité a changé, $P(A|B)$ est la probabilité a posteriori qui peut servir de base a priori que dans une nouvelle expérience.

Dès le début, cette solution de Bayes a fasciné les probabilistes. Certes il faut être sûr des probabilités a priori, au moins comme d'une hypothèse de travail. Mais cette hypothèse une fois admise, la procédure de Bayes permet de l'améliorer — ce qui est tout différent de la procédure de Bernouilli, où l'on pose des hypothèses pour les réfuter.

Mais comment parvenir aux probabilités a priori ? Evidemment il y a des connaissances sur les probabilités qui précèdent les expériences particulières. Prenez comme dé un cube parfait et homogène, et personne ne niera que les probabilités des diverses faces sont égales et par conséquent valent un sixième. Mais le cas d'une urne remplie de balles blanches et de balles noires est bien différent. Elle devrait faire partie d'une collection d'urnes de compositions variées, une fiction telle que toute supposition par rapport à la fréquence des urnes d'une certaine composition est gratuite. Ici on évoque des principes d'indifférence ou d'ignorance. En effet dans le cas du dé homogène l'indifférence peut bien être l'argument décisif pour admettre l'équiprobabilité des diverses faces, mais cette indifférence est le résultat de suppositions très fortes sur le dé — suppositions qui n'ont pas d'analogue pour cette vague collection d'urnes. Le principe d'ignorance nous recommande de considérer tous les cas comme équiprobables, à moins qu'on ne dispose de connaissances détaillées. Malheureusement, pour arriver aux cas élémentaires qui seraient équiprobables, on devrait faire des classifications qui, en général, sont tout à fait arbitraires. Cette objection est particulièrement grave quand on a affaire à des probabilités qu'on a appelées «géométriques»; c'est le cas de l'aiguille de Buffon qu'on jette sur un plancher marqué de fissures parallèles et équidistantes, et où l'on demande la probabilité que l'aiguille coupe une quelconque des parallèles. Ici il n'y a pas de résultats discrets comme ceux du dé, mais tout est continu. On doit assigner des mesures dans l'ensemble des positions possibles de l'aiguille, et l'assignation la plus naturelle conduit au résultat de

Buffon qui est $\frac{2}{\pi} \times \frac{l}{a}$, où l est la longueur de l'aiguille et a est la

distance des parallèles ($l < a$). Mais rien ne nous empêche de choisir une autre mesure qui conduirait à des résultats différents.

Après Laplace les philosophes se sont occupés de la théorie des probabilités. On a attaqué ce qu'on jugeait être du rationalisme dogmatique dans l'analyse de Laplace, à savoir les principes d'indifférence et d'ignorance et on y a opposé un empirisme, où les probabilités ne figurent que comme des fréquences observées. Ces théories qu'on appelle «fréquentistes» ou «objectivistes» (si l'on les oppose aux théories subjectivistes) sont insoutenables. C'est justement le mérite de la théorie des probabilités de distinguer entre la probabilité d'un six en jouant à un dé parfait et la fréquence des six qui peut dévier de la probabilité du six, quoique les grandes déviations soient rares. Il ne sert à rien d'effacer cette distinction, ou plutôt si on le fait, on gâte la théorie.

Le dernier effort sérieux de fondements fréquentistes, ou plutôt le seul sérieux, c'était celui de von Mises de 1918, où la probabilité est définie comme une limite de fréquences, non au sens probabiliste suggéré par la loi des grands nombres, mais au sens ordinaire. Ce système compliqué, insuffisant et même inconsistent, n'a servi qu'à démontrer l'impossibilité de cet accès ou même de toute tentative pour définir explicitement la probabilité.

D'autre part le principe de Bayes a suggéré une interprétation subjective de la probabilité. Vu que des connaissances partielles sur le contenu d'une urne peuvent changer la probabilité a priori en une probabilité a posteriori, on cherche à définir la probabilité, non comme un caractère objectif d'une classe d'événements, mais comme un degré de confiance de l'individu dans quelque jugement sur la réalité. Il va sans dire que ce système de degrés de confiance devrait être cohérent; par exemple, si j'attribue un sixième de confiance à l'apparition d'un six en jouant avec un seul dé, ma confiance en un six double en jouant avec deux dés doit être de $1/36$.

Quelle que soit la valeur de ce subjectivisme, il est évident qu'il ne sert à rien dans bien des applications de la théorie des probabilités, et particulièrement dans les sciences physiques. Néanmoins, l'idée d'attribuer des probabilités non aux événements, mais à des propositions, n'est pas mauvaise, quoique le premier qui en ait fait une théorie cohérente, Keynes, se soit appelé «objectiviste», pour ajouter un peu à la confusion qui semble inhérente à des termes philosophiques. D'ailleurs le plus fervent partisan du principe de Bayes dans ce siècle, R. A. Fisher, se considérait aussi comme objectiviste, mais c'est plutôt une des scurrilités de ce grand statisticien.

On ne peut pas dire que ces discussions philosophiques aient éclairci les fondements de la théorie des probabilités. D'autre part il se peut

qu'ils aient retardé son axiomatisation. Il y a eu un essai au XIX^e siècle, celui de Boole. Le plus étonnant dans cet essai, c'est que Boole fut très près de comprendre l'état logique de la notion d'indépendance probabiliste. Il a reconnu qu'on ne peut pas démontrer la loi de multiplication pour les probabilités d'événements indépendants, mais que, inversement, l'indépendance se définit par la validité de la loi de multiplication. L'effort de Boole fut bien hardi. Il n'a pas abouti parce que Boole a été pris de peur devant son propre courage. C'était encore trop tôt pour l'axiomatisation.

Le premier vrai système axiomatique des probabilités a été développé par Keynes (1922). Pour Keynes la probabilité est une fonction de deux propositions, l'une est hypothétique et l'autre est la proposition à laquelle on attribue une certaine probabilité sous cette hypothèse. Le système de Keynes, quoique bien remarquable, n'a pas attiré l'attention des mathématiciens. Ce furent des logiciens qui, beaucoup plus tard, l'ont approfondi et qui s'en sont servis dans des recherches ultérieures.

Le succès définitif fut réservé à l'axiomatique de Kolmogorov (1935), qui est la plus simple qu'on peut imaginer. Pour Kolmogorov la probabilité est une mesure ayant pour seule propriété spéciale qu'elle est une unité pour l'univers en question. Cela veut dire que Kolmogorov est retourné au point de départ historique de la théorie des probabilités. On se donne une urne dont le contenu se divise dans des espèces partielles, auxquelles on attribue des probabilités par des règles du jeu, c'est-à-dire axiomatiquement. Une des règles du jeu est l'indépendance des coups, c'est-à-dire des prises dans ces urnes. Axiomatiquement cette indépendance se traduit par la multiplication cartésienne des mesures correspondantes. Kolmogorov souligne que la prépondérance de mesures créées par des multiplications cartésiennes est le trait caractéristique qui distingue la théorie des probabilités des autres applications quelconques de la notion de mesure.

En probabilité la victoire de l'axiomatique fut moins décisive qu'en géométrie, quoique les mathématiciens n'aient pas hésité à accepter le point de vue de Kolmogorov. S'ils ne cultivent pas l'histoire de leur science la majorité des probabilistes et statisticiens ne connaissent plus ces termes de «fréquentiste», «subjectiviste», «empiriste», «objectiviste», etc. Mais dans les cercles philosophiques et méthodologistes, ces notions et les problèmes qu'elles expriment, sont toujours vivantes. Ces discussions ont produit une vaste littérature qui est complètement isolée de ce qui s'est passé en probabilité mathématique pure ou appliquée depuis un tiers de siècle. Cette littérature est tel-

lement étendue et autonome qu'elle suggère au jeune philosophe et méthodologiste l'idée que pour savoir ce qu'est la probabilité et comment on l'applique, il suffit de lire cela, et qu'il n'est pas nécessaire de prendre connaissance de ce que les mathématiciens et les statisticiens appellent probabilité. Ces recherches ignorent le point de vue axiomatique. Au contraire on s'efforce de donner des définitions explicites de la probabilité comme avant Hilbert on essayait de définir ce qu'est un point en géométrie.

Quelle est la raison de cette assiduité des philosophes dans une matière où des mathématiciens ne découvriraient que des pseudo-problèmes ? La raison en est que l'axiomatique ne répond pas à toutes les questions, pas même en géométrie. En coupant les liens entre la géométrie et l'espace réel, on a coupé un grand nombre de questions vides de sens, et ce fut un gain véritable. D'autre côté on ne peut pas empêcher qu'un domaine des mathématiques, même après qu'il a été axiomatisé, soit appliqué à la réalité, et à ce moment les vieilles questions peuvent renaître. Il est vrai, qu'on ne pose plus la question de savoir ce qu'est un point, ce qu'est une droite, mais plutôt celle de savoir à quels objets physiques on applique les propositions où figurent les notions de point et droite. La nouvelle question c'est de savoir comment cette science axiomatisée est appliquée à la réalité. On peut poser cette question par rapport à la géométrie, à l'arithmétique, aux mathématiques en général, à la théorie de la probabilité etc. Il est étrange que ce n'est presque que la seule théorie des probabilités qui intéresse les méthodologistes. Les autres applications des mathématiques semblent négligeables, trop faciles ou même triviales. Je crois que c'est une grave erreur, je crois au contraire que la probabilité est un cas relativement simple.

Je ne reproche pas aux philosophes de s'occuper de la théorie des probabilités du point de vue méthodologique. Mais ce que je souhaiterais c'est que le méthodologiste parte de la science telle qu'elle existe, et des applications qu'on en fait réellement, et qu'il les analyse, et non qu'il invente tout cela pour l'analyser. Je leur proposerais d'accepter la théorie axiomatique des probabilités aussi longtemps qu'ils ne peuvent pas apporter des améliorations, et de demander, non «Qu'est-ce qu'une probabilité», mais «De quelle manière la probabilité axiomatique est-elle appliquée à la réalité», et d'analyser des applications réelles, non inventées pour les besoins de la cause. Alors, si ces termes de probabilité «objective» ou «subjective» ont quelque sens, il pourrait apparaître qu'ils sont liés à quelques applications spécifiques de la probabilité axiomatique.

Il est vrai qu'il y a deux axiomatiques des probabilités, celle de Kolmogorov et celle du type Keynes. Quoiqu'elles puissent être montrées équivalentes, les mathématiciens préfèrent celle de Kolmogorov, où les objets sont des ensembles, familiers aux mathématiciens, tandis que les logiciens préfèrent celle de Keynes, où les objets sont des propositions, familières aux logiciens. Il ne serait pas étrange que les ensembles soient plus commodes dans des applications objectives et les propositions dans les applications subjectives, pourvu qu'il y ait quelque sens dans ces termes. Quoi qu'il en soit, insistons sur le fait que les termes de «subjectivité» et d'«objectivité» ne s'appliquent ni aux ensembles ni aux propositions, qui sont tous deux des termes de systèmes formels. Remarquons d'ailleurs que, même dans les applications qu'on pourrait appeler «subjectives», on a préféré jusqu'à présent le système de Kolmogorov lequel est plus flexible et plus pratique que l'autre.

Je répète que si les termes d'«objectivité» et de «subjectivité» signifient quelque chose, ils ne devraient pas répondre à la question «Qu'est-ce qu'une probabilité», mais à celle qui demande «Comment la probabilité s'applique-t-elle?» et les premiers sujets à rechercher seraient des applications différentes de la probabilité axiomatique qui justifieraient cette distinction. Y en a-t-il ?

Naturellement on applique la probabilité de différentes manières. Il y a par exemple ce que les physiciens appellent «statistique» et il y a «la statistique» des statisticiens. Cette différence est déjà bien visible dans le champ expérimental. La manière de mesurer du statisticien est de compter, disons, deux ensembles, par exemple les naissances et les habitants de la Hollande en 1965, pour diviser un nombre par l'autre. Ce statisticien s'intéresse à des probabilités. Il mesure et calcule des fréquences et il estime leur véridicité comme approximation aux probabilités. Le physicien, au contraire, mesure en général des grandeurs qui, phénoménologiquement, ne sont pas des probabilités, mais qui sont reliées à des probabilités par le moyen d'une théorie physique profonde. Il va sans dire qu'en comptant des coups d'un compteur Geiger-Müller, il se comporte comme un statisticien propre, à moins que sa prétention n'aille pas plus loin que de compter une probabilité de décomposition radioactive ou la demi-vie d'une substance radioactive. Dans des circonstances plus typiques, le physicien applique la théorie des probabilités comme il appliquerait le calcul différentiel ou la transformation de Fourier, au moyen d'une théorie physique non-triviale. La probabilité appliquée en physique est dépendante de termes comme «système mécanique»,

«hamiltonien», «interaction faible», «énergie», «transformation canonique».

Au contraire le statisticien propre applique la probabilité à une matière qui n'a pas encore été transformée au moyen d'une théorie profonde. Ce fut Laplace, si je ne me trompe pas, qui a défini la théorie des probabilités comme le bon sens exprimé en langage mathématique. En effet la statistique est cette partie des mathématiques où des notions mathématiques s'appliquent le plus directement à la nature sans aucune théorie physique préalable. A cet égard elle n'est égalée que par l'arithmétique élémentaire.

Le statisticien qui applique la probabilité peut se passer de modèles raffinés et spécifiques. C'est probablement la raison pour laquelle il sait mieux que les autres qu'il applique des modèles, et qu'il se sert de ce terme plus souvent que les autres chercheurs qui font usage des méthodes mathématiques — c'est le même sens dans lequel j'emploierai le terme de «modèle», c'est-à-dire non comme les logiciens, pour lesquels le modèle est une réalisation d'un système axiomatique, mais comme les hommes des sciences, pour qui le modèle est une image stylisée d'une réalité.

Vous connaissez mon modèle. Je m'en suis servi quelques fois ce soir. C'est l'urne remplie de balles de diverses couleurs ou de billets portant des chiffres ou d'autres signes. Le modèle de l'urne est l'expression de trois postulats: (1) la constance de la distribution des probabilités garantie par la solidité du vaisseau, (2) le caractère aléatoire du choix assuré par l'étroitesse de la bouche, qui empêche la visibilité du contenu et la sélectivité consciente du choix, (3) l'indépendance des choix successifs si les pièces choisies sont retournées au vaisseau. Il va sans dire qu'en probabilité abstraite on peut se passer du terme de «choix» et que tout se fait sans allusion à un modèle physique. Mais au moment où cette théorie est appliquée, le choix aléatoire joue un rôle essentiel. En effet, pour définir le choix aléatoire nous sommes renvoyés à la réalité, parce qu'aucune définition mathématique du choix aléatoire n'a été donnée jusqu'à présent et qu'il est extrêmement improbable qu'une telle définition soit jamais donnée. En pratique statistique, on se sert de nombres aléatoires, des nombres dits de Tippet, dont les premiers exemples furent construits au moyen d'un outil stochastique, et qui rappellent toujours le modèle de l'urne, même s'ils sont produits par d'autres méthodes.

En fixant notre attention sur l'outil aléatoire, l'urne, nous avons négligé l'autre type des jeux de hasard, le pari proprement dit, le contrat sur les paiements que l'un des joueurs paie à l'autre en

fonction de ce que la prise dans l'urne a amené. Le pari est essentiel pour les jeux de hasard, et pendant deux siècles après l'invention de la théorie des probabilités on a borné l'usage du pari à ce domaine. On a traité les problèmes statistiques comme des jeux altruistes. Ce point de vue a été modifié par les recherches de Wald. On fait le bilan des gains et pertes qui proviennent des décisions statistiques justes et fausses. Le modèle de l'urne est complété par un tableau de paiements, il est remplacé par le modèle du pari. Mais du point de vue des relations entre la mathématique et ses applications, ce n'est pas essentiellement différent. Des outils aléatoires ne peuvent pas être définis mathématiquement, mais une fois qu'on a introduit le modèle non-mathématique d'un outil aléatoire, le pari peut se définir par la mathématique pure. Le modèle du pari n'est pas aussi fondamental que celui de l'urne.

Si après cette exposition vous jugez que le modèle de l'urne est indispensable en statistique mathématique, je dois vous dire que je l'ai cru moi-même jusqu'il y a quelques années quand j'ai remarqué que ce n'est pas correct. Il y a un autre modèle qui peut servir aussi bien que le modèle de l'urne. Ce modèle est bien connu, quoique moins consciemment que l'autre. Je l'ai découvert quand j'ai essayé d'élaborer un langage de communication avec des êtres qui seraient nos égaux, mais qui ne connaîtraient aucun de nos langages, même pas notre système d'expression mathématique. Il ne vaut pas la peine que j'entre dans les détails, mais je dois mentionner que les premiers chapitres s'appelaient «Mathématiques», «Temps», «Comportement humain», «Espace-mouvement-masse». Ce qui importe pour le moment, c'est qu'un grand nombre de traits du comportement humain pouvaient être expliqués sans introduire aucune notion du monde matériel, aucune notion de mécanique. Arrivé à un certain point du chapitre sur le comportement humain, j'ai été frappé par la possibilité d'introduire la probabilité, non comme une abstraction mathématique, mais sous sa forme appliquée. Cela pouvait être fait sans aucun appel au monde physique, et à un instant où on ne pouvait évoquer aucune idée d'urnes qu'on secouerait, de dés qu'on jetterait, et d'autres outils matériels. J'ai introduit deux acteurs jouant un jeu comme celui qui s'appelle en anglais «matching pennies». Le jeu est joué par deux personnes A et B qui simultanément font voir chacun une pièce de monnaie. Si le résultat est deux piles ou deux faces, A gagne, si c'est une pile et une face, B gagne.

Grâce à l'œuvre de von Neumann la théorie des jeux est devenue un objet favorisé de la recherche, mais même dans le cas où vous

n'auriez jamais entendu parler de cette théorie, vous n'auriez pas de difficulté à découvrir les traits essentiels de ce jeu. Chaque joueur s'efforce d'augmenter sa chance, et la seule méthode d'y arriver est de découvrir des régularités dans le jeu de l'autre joueur et d'éviter toute régularité dans ce qu'il fait lui-même. Dès qu'un des joueurs fait voir quelque habitude, l'autre peut en profiter. Il y a une stratégie minimale pour chaque joueur, c'est-à-dire une stratégie qui est la meilleure sous les conditions les moins favorables. Elle consiste à faire des choix aléatoires de pile et de face, donnant aux deux la même probabilité. Pour la réaliser, les joueurs feraient bien de se servir d'un outil aléatoire, par exemple de laisser à un jeu de pile ou face de décider quel côté de la pièce ils vont montrer. Autrement il leur serait difficile de ne pas se trahir soi-même. Si l'on doit choisir des nombres, on s'expose à faire des répétitions inconscientes, qui peuvent être découvertes par des joueurs habiles. Une machine construite par Shannon, qui joue ce jeu contre des adversaires humains, gagne 60 % des jeux.

Dans la version de Shannon et dans la mienne, «*matching pennies*» est joué par deux joueurs qui choisissent chacun en même temps un des nombres 1 et 2. S'ils choisissent le même, A gagne, si les choix sont différents, B gagne. Tout être dont le comportement ressemble au comportement humain et qui comprend le comportement humain et la règle du jeu, peut découvrir la stratégie minimale, particulièrement si le jeu est illustré par des exemples. Le stratège parfait qui joue contre un autre stratège parfait, est un stratège minimal. En jouant «*matching pennies*», il sera semblable à une urne qui produit deux événements avec les mêmes probabilités. Cela veut dire que dans toutes les applications, à l'urne on peut substituer un homme, un stratège parfait qui joue «*matching pennies*» contre un autre stratège parfait. Il est évident que ceci n'est pas une caractéristique des seules urnes qui contiennent des balles blanches et des balles noires dans la même proportion; il est facile de construire un jeu qui correspond à une urne donnée quelconque tel que le stratège parfait qui jouerait le jeu équivaut comme un outil aléatoire à l'urne donnée.

Peu importe de quelle manière le stratège atteint sa perfection. En fait, il pourrait le faire en se servant d'un outil mécanique aléatoire, mais la définition du stratège parfait ne doit pas inclure le moyen spécial de réalisation. Par conséquent vous comprendrez comment, dans le contexte mentionné, il a été possible d'introduire la probabilité et des notions qui y sont liées, comme le choix aléatoire, à un

moment où l'on ne dispose pas encore de la réalité physique. Elle était remplacée par des expressions essentielles du comportement humain.

Je pense que c'est un résultat remarquable, qu'en probabilité appliquée, on puisse se passer du modèle de l'urne, modèle que l'on croyait indispensable. Dans le modèle du pari, l'outil aléatoire peut être remplacé par le stratège parfait et jouant contre son égal. Il va sans dire que ce modèle est aussi peu formel que celui de l'urne. Ce n'est pas un outil mathématique. Pour le définir nous devons recourir à la réalité, à celle de la nature physique, ou à celle du comportement humain, et en ce sens on peut parler d'«objectivité» ou de «subjectivité» dans les applications de la probabilité axiomatique. Elles ne s'excluent pas, mais elles se complètent l'une l'autre.

Enfin il ne doit pas nous étonner qu'il y ait un modèle humain équivalent au modèle mécanique de l'urne. La racine historique des notions comme «désordre» et «hasard» est le comportement humain tel qu'il se manifeste dans les jeux. A cet égard, les notions de «désordre» et de «chance» n'ont pas une origine différente de celles de «ordre» et «loi», lesquelles sont aussi profondément enracinées dans le comportement humain qui caractérise la société humaine.

Utrecht

Hans FREUDENTHAL