UN PROBLÈME D'AXIOMATISATION EN PSYCHOLOGIE

Le «Groupement» de Jean Piaget.

GILLES GRANGER

La formalisation d'une notion empirique consiste toujours à partir de concepts plus ou moins ambigus et à opérer des déterminations, sauf à laisser subsister explicitement cette ambiguïté dans le formalisme, si elle paraît être un élément essentiel de la description empirique. Il se peut aussi que la notion se révèle contradictoire à l'analyse. Dans ce cas, trois voies sont possibles: ou l'on renonce à formaliser, ou l'on retouche la description en supprimant les contradictions, ou l'on substitue à la logique classique une autre logique qui donne un sens nouveau à la non-contradiction.

On sait que Jean Piaget (1) a introduit et décrit en divers endroits une notion de «Groupement», qui correspondrait à l'organisation des opérations concrètes effectuées par l'enfant, organisation plus faible et plus lâche que l'organisation booléenne du calcul des classes. Nous nous en tiendrons à l'aspect fondamental le plus simple de cette organisation, celui des groupements de classes. Disons immédiatement que la présentation globale d'un corps expérimental systématique établissant l'existence empirique de la notion dans son ensemble fait défaut. Ce sont jusqu'à présent des propriétés fragmentaires du Groupement qui ont été démontrées par Piaget ou ses collaborateurs. Il y aurait sans aucun doute intérêt à reprendre ces travaux; mais peut-être qu'une axiomatisation est précisément la base et l'hypothèse de travail indispensable à une mise en place d'un plan d'expériences. L'excellent logicien J. Bl. Grize l'a tentée; mal-

(1) L'auteur de cet article avait déjà présenté quelques observations au sujet du Groupement dans *Pensée formelle et sciences de l'homme* (1960), observations auxquelles Piaget avait répondu avec beaucoup de bienveillance dans *Etudes d'Epist. Génét.* XVI (1962). Il n'est pas question ici d'ouvrir une polémique, mais de faire un examen critique de l'axiomatisation du Groupement proposée par mon collègue et ami Grize dont je serais heureux qu'il veuille bien rectifier, s'il y a lieu, à son tour l'axiomatique ici présentée (*ibid.* XI. 1962). Je remercie vivement mes collègues des Laboratoires de Psychologie expérimentale et génétique, et du Séminaire d'épistémologie comparative de la Faculté d'Aix, qui ont bien voulu discuter et critiquer le contenu de ce travail.

heureusement, il semble que son système soulève, dans sa présentation et dans sa structure, de graves difficultés qui l'invalident. Je me propose donc d'en faire ici l'examen, et d'esquisser une solution possible, que je livre bien entendu à la critique du lecteur.

QU'AXIOMATISE-T-ON ?

Nous disions dans le préambule que la notion à axiomatiser n'est nullement *a priori* libre d'équivoques ou de contradictions. C'est certainement le cas du Groupement, mais il n'est pas impossible de s'entendre sur ce qui est ici à axiomatiser, en essayant de se placer, croyons-nous, sur le même terrain que Grize. Le *Traité de Logique* donne à ce sujet des précisions suffisantes, permettant semble-t-il d'envisager le Groupement comme une double organisation (ne disons pas encore «structure», puisque nous réserverons ce vocable à l'organisation axiomatisée).

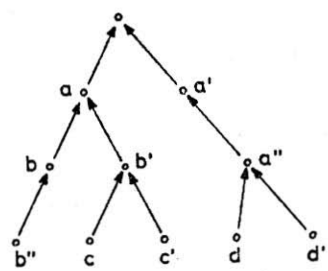
1° Une organisation d'*ordre,* qui est caractérisée par les propriétés suivantes:

a) Les classes de même rang sont disjointes (*T. de L.* 87). La classification réalisée par le Groupement est donc, à chaque étape, une partition stricte.

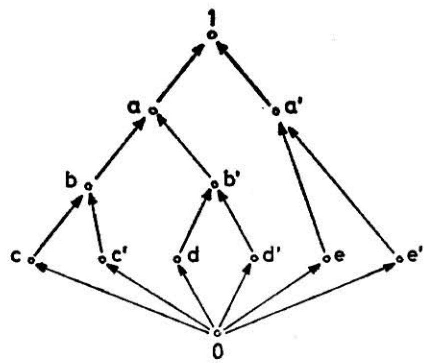
b) Cette partition est *dichotomique (T. de L.* ibid).

c) Tout «terme individuel» doit être «emboîté dans une suite de classes appartenant respectivement à chacun des niveaux de la hiérarchie». (*ibid.* 89).

Il en résulte que le Graphe correspondant à un Groupement ne peut être que du type ci-dessous:



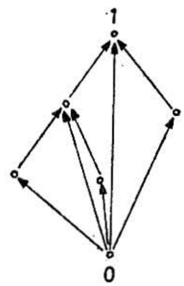
En particulier, le schéma de la p. 89 de *T de L* est inadéquat au texte, puisqu'il fait intervenir à la fois *toutes* les sous-classes de B, parmi lesquelles, évidemment, certaines, bien que de même rang, ont des parties communes. De même le schéma de la p. 91, qui comporte une trichotomie. D'autre part, toutes les classes envisagées par Piaget dans un Groupement sont de même type: leur subordination est toujours une *inclusion,* jamais une appartenance; chacune d'entre elles est la *réunion* des classes subordonnées, et non pas la «surclasse» qui les comprendrait comme éléments. Dans ces conditions, l'exigence c) n'est pas admissible, car elle fait apparaître, dans le cas où la classification s'arrête sur un arc à un niveau donné, des classes postiches ayant même contenu que la classe unique qu'elles enveloppent, et n'en différant que parce qu'elles seraient d'un type supérieur. (Ainsi par exemple de a' et a" ci dessus). Il est bien entendu possible de concevoir une classification de cette manière; ce n'est pas le cas de Piaget. Par conséquent, si l'on introduit en outre, comme le veut Piaget, la classe vide, la seule représentation cohérente de l'ordre établi par le Groupement est du genre:



On observera que les classes c, c', d, d', e, e' sont les «*infimae species*» ou atomes de la classification; ce sont les objets à classer. Leur réunion constitue la classe 1, élément maximal du Groupement.

On observera en outre que ce Graphe est bien un *treillis* (non distributif et non complémenté), *si l'on y définit de façon convenable les deux opérations* U et U . Ce qui caractériserait le niveau de pensée du Groupement, c'est justement que ces deux opérations n'y apparaissent pas, mais seulement des opérations définies de façon plus limitative et de nature pour ainsi dire locale.

2° Une organisation opératoire, comportant une opération non partout définie de regroupement des compléments dichotomiques sous la classe dichotomisée. Elle doit cependant être aussi définie entre éléments d'une même lignée, si l'on veut, comme fait Piaget, conserver une loi d'absorption. Une seconde opération consiste à déboîter les compléments. Il nous semble que Piaget ne la considère que dans le cas de classes strictement contigües. Enfin, la classe vide est introduite, comme être neutre pour la première opération, mais non pas pour la seconde, dans la mesure où cette classe n'est pas définie comme contiguë à une classe quelconque. On pourrait assurément postuler cette dernière propriété, mais le Graphe de Piaget devient alors:



Nous laisserons de côté cette complication possible, dont le sens psychologique paraît douteux au niveau de l'opération concrète.

L'AXIOMATIQUE DE GRIZE NE CORRESPOND PAS AU GRAPHE DE PIAGET.

Nous pensons que le point de vue de Grize est le suivant, tel qu'il apparaît dans sa construction. On part d'un ensemble d'objets appelés *termes,* dans lequel l'axiomatique permettrait de découper un sous-ensemble propre. (M. Grize dit expressément, p. 74 de Études d'*Epist. Génét.* XI. qu'il veut «précisément» éviter que *tout* terme soit élément de M). Il semble donc que l'ensemble des termes soit confondu avec l'ensemble des sommets d'un Graphe de Piaget. Quant aux termes, ils sont définis comme comprenant les éléments de M et tous les objets obtenus par composition d'éléments de M au moyen des deux opérations + et —. Mais on ne nous dit pas si ces opérations sont *a priori* définies seulement sur les éléments de M, ou sur les termes en général; sans doute faut-il entendre qu'elles sont définies sur les éléments de M (sauf restrictions données par les axiomes), et que le résultat tombe ou ne tombe pas dans M suivant les cas. De toute façon, il y aurait avantage à supprimer dans l'axiomatique ces considérations ambigües sur les «termes», notion métalinguistique, et à s'arranger pour que le système des axiomes se suffise à lui-même. Mais il s'agit là surtout d'une critique de rhétorique. Notre critique de fond s'articule comme suit:

1° Il résulte des axiomes de Grize que *M comprend tous les termes*, circonstance qu'il voulait essentiellement éviter.

2° On peut construire des modèles satisfaisant aux axiomes de Grize et correspondant à des Graphes irréductibles au Graphe Piaget.

M comprend tous les termes.

La démonstration est simple:

$x \,\varepsilon\, M \,\&\, x \rightarrow_i y \Rightarrow (x + (y - x)) \,\varepsilon\, M$ (Go/c)

$x \rightarrow_i y \Rightarrow (x + (y - x)) \leftrightarrow y$ (MT 3/1)

Donc:

$x \,\varepsilon\, M \,\&\, x \rightarrow_i y \Rightarrow y \,\varepsilon\, M$ (par MT 1)

$x \,\varepsilon\, M \,\&\, x \rightarrow y \Rightarrow y \,\varepsilon\, M$ (par T 4.1)

Comme O précède tout élément et est dans M (G 8), tout élément est dans M.

Construction d'un modèle non-piagétien.

Soit un ensemble E quelconque et $\mathfrak{P}$ (E) l'ensemble de ses parties. Donnons nous sur $\mathfrak{P}$ (E) la relation d'inclusion $\leqslant$ qui induit un ordre partiel, et les opérations de réunion, d'intersection et de complémentation. L'interprétation suivante satisfait aux axiomes de Grize:

M	l'ensemble $\mathfrak{P}$ (E) lui-même
$a \rightarrow b$	$a \leqslant b$
$a + b$	$a \cup b$
$a - b$	$a \cap \bar{b}$
$a \rightarrow_i b$	$(a \leqslant b) \,\&\, \sim (a = b) \,\&\, (c)\ (a \leqslant c \,\&\, c \leqslant b \Rightarrow a = c \vee b = c)$

La traduction des axiomes G 1 à G 7 est triviale.

G 8 se réduit à: $\exists\, O\, (x)\ (O \leqslant x)$

Les G O deviennent:

G O/a: $(y)\ (x \leqslant y \Rightarrow \exists\, x\, (x \leqslant y))$, qui est alors redondant.

G O/b: $(x)\ ((x \leqslant y) \,\&\, \sim (x = y) \,\&\, (u)\ (x \leqslant u \leqslant y \Rightarrow x = u \vee y = u)) \Rightarrow \exists\, z\, (z = y - x)$

G O/c: $(x)\ ((x \leqslant y) \,\&\, \sim (x = y) \,\&\, (u)\ (x \leqslant u \leqslant y \Rightarrow x = u \vee y = u)) \Rightarrow \exists\, z\, (z = x + (y - x))$

Le z de G O/b existe en effet toujours, ainsi que celui de G O/c (qui est égal à y).

Il en résulte qu'un treillis dont les sommets sont toutes les parties d'un ensemble E quelconque est un modèle des axiomes de Grize; ce n'est évidemment pas un Graphe dichotomique de Piaget.

ESSAI D'UNE AXIOMATISATION NOUVELLE.

Nous voulons construire une axiomatique dont tout modèle soit du genre d'un graphe de Piaget. Nous voulons aussi traduire autant que possible le caractère local, ou «pas à pas», des opérations du Groupement de Piaget, l'organisation globale étant sans doute effectivement dominée par les sujets de ce niveau, mais seulement selon une contexture fibreuse, le long des différentes lignées.

Le problème de classification proposé aux sujets consiste à leur offrir une collection d'objets, qui vont constituer les *infimae species*. La structure de Groupement organise certaines parties de cet ensemble (mais non pas *toutes*: auquel cas on aboutirait à une algèbre de Boole). Selon les descripteurs choisis — selon les questions dichotomiques adoptées, — on obtient, à partir d'un même ensemble d'*infimae species* des Groupements différents, mais qui doivent avoir des structures de même espèce; c'est cette espèce de structure qu'il s'agit d'axiomatiser, et dont nous avons donné l'image au moyen d'un Graphe dichotomique. Nous laissons de côté le problème de l'énumération de tous les Groupements réalisables à partir de *n* *infimae species*, ainsi que celui d'une structuration possible de cet ensemble de Groupements. Mais il se pourrait que la question de la saisie de cet ensemble et des rapports entre ses éléments ait un intérêt pour le psychologue génétique (par exemple, cette saisie est-elle contemporaine de la pensée opératoire concrète, ou n'apparaît-elle que plus tard ?)

Soit donc un ensemble *fini* d'objets notés x, y, etc...,
 deux objets distingués, O et 1,
 deux opérations binaires notées $+$ et $-$,
 une relation binaire notée $=$ (qui sera déterminée par les axiomes comme une équivalence), dont la négation sera abrégée en $\neq$.

Définitions

Df 1 $x \rightarrow_i y$ = Df $(x - y = O \,\&\, x \neq y)$,

Df 2 $x \rightarrow y$ = Df ancestrale de $\rightarrow_i$ ou $x = y$.

Axiomes

Outre le calcul des propositions et des prédicats (²),
la clôture des schémas suivants:

Gr. I $x = y \mathbin{\&} y = z \Rightarrow x = z$

Gr. II $x = y \Rightarrow y = x$

Gr. III $x = y \Leftrightarrow \exists z\, (z \neq O \mathbin{\&} z - x = z - y)$

Gr. IV $x = y \Rightarrow \exists z\, (x + z = y + z)$

Gr. V $x - x = O$

Gr. VI $z = y - x \Leftrightarrow (z \neq x \mathbin{\&} x \rightarrow_i y \mathbin{\&} z \rightarrow_i y) \vee (z = y. \mathbin{\&} (\exists u\, (x \rightarrow_i u \mathbin{\&} y \rightarrow_i u) \vee (O \rightarrow_i y \mathbin{\&} x = O)) \vee (z = O \mathbin{\&} (y \rightarrow_i x \vee y = x))$

Gr. VII $x \rightarrow_i y \Rightarrow \exists z\, (z = y - x)$

Gr. VIII $z = x + y \Leftrightarrow (x \rightarrow_i z \mathbin{\&} y \rightarrow_i z) \vee (z = x \mathbin{\&} y \rightarrow x) \vee (z = y \mathbin{\&} x \rightarrow y)$

Gr. IX $x \rightarrow 1$

Gr. X $O \rightarrow x$

Observations

L'ensemble E des *infimae species* est ici la classe: $E = \hat{u}\, (O \rightarrow_i u)$. C'est un élément de $\mathfrak{P}$ (E), noté 1, dans lequel toutes les classes du Groupement sont évidemment incluses.

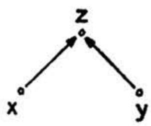
Nous sommes partis de la relation de contiguïté $x \rightarrow_i y$ (lue: «x précède immédiatement y», ou «est immédiatement subordonné à y»), en la définissant au moyen des opérations, plutôt que de la relation transitive $\rightarrow$; cette procédure nous a paru plus conforme à l'esprit «local» du Groupement. Notre définition n'est, bien entendu, qu'une abréviation, et n'introduit aucune nouveauté dans l'axiomatique. Les axiomes permettent de montrer que la notion est bien une relation de contiguïté, encore que ce caractère n'apparaisse pas dans la définition (Th. 10-Corollaire).

Gr. I et II caractérisent = comme équivalence.

(²) Grize introduit la logique comme partie de la métalangue; nous l'introduisons comme partie de l'axiomatique. Les deux procédures sont également gênantes (voir notre conclusion). Bien entendu, nous devrions formuler en toute rigueur les règles de syntaxe des expressions auxquelles s'applique cette logique: il n'y a là aucune difficulté et nous pouvons sans inconvénient les sous-entendre. Nous devrions aussi préciser quel «état» de cette logique nous est nécessaire. Ce serait une question essentielle, mais nous restons pour le moment sur le terrain de Grize qui laisse lui aussi — provisoirement peut-être — le problème de côté (*Et. d'épist. génét.* XI, p. 72 et 73).

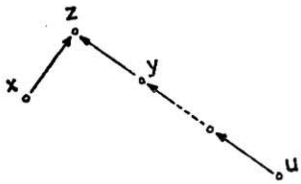
Gr. III et IV établissent la régularité de + et — par rapport à =, sous réserve de la définition des opérations (d'où le quantificateur).

Gr. V, VI et VII caractérisent la soustraction, en la restreignant aux cas suivants du Graphe représentatif:



$x - y$ et $y - x$
$y - z$ et $x - z$ (dans ce cas égaux à O)
$z - y$ et $z - x$
$x - o$ et $x - x$

Gr. VIII caractérise l'addition, qu'il restreint aux cas suivants:



$x + y$
$z + x$ et $z + y$
$z + u$

Gr. IX et X déterminent 1 et O comme éléments extrémaux.

Théorèmes.

Dans tous les calculs, la clôture des formules a été sous-entendue chaque fois qu'aucune ambiguïté n'en résulte.

Th. 0 $(y)\ \exists x\ (x \rightarrow_i y) \vee (y = O)$.
$(y)\ O \rightarrow y$ (Gr. X), c'est-à-dire par Df 2: $(y)\ \exists x_k \ldots (O \rightarrow_i x_o \rightarrow_i x_1 \rightarrow_i \ldots \rightarrow_i x_n \rightarrow_i y)$, ou $y = O$.

Th. 1 $x = x$.
Supposons $x = a$ et $x = b$, $a \neq b$. Par Gr. II et Gr. I, $a = b$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $x = a = x$.

Th. 2 $x + y = y + x$.
Dans Gr. VIII, si l'on permute x et y dans le second membre, le résultat demeure logiquement équivalent, en raison de la symétrie de & et de v. Donc:
$z = x + y \Leftrightarrow (y \rightarrow_i z \ \&\ x \rightarrow_i z) \vee (z = y \ \&\ x \rightarrow y) \vee (z = x \ \&\ y \rightarrow x) \Leftrightarrow y + x = z$.
D'où par Gr. I: $x + y = y + x$.

Th. 3 $x \rightarrow y \ \&\ y \rightarrow x \Leftrightarrow x = y$.
De Gr. VIII, $x \rightarrow y \Rightarrow x + y = y$ et $y \rightarrow x \Rightarrow x + y = x$. Donc $x \rightarrow \leqslant \&\ y \rightarrow x \Rightarrow x = y$.

La réciproque dérive immédiatement de Df 2.

Th. 4 $x \to y \ \& \ y \to z \Rightarrow x \to z$.

L'hypothèse signifie:

$\exists\, x_k \ldots (x \to_i x_o \to_i \ldots \to_i x_n \to_i y \ldots)$ (Df2)

$\exists\, y_k \ldots (y \to_i y_o \to_i \ldots \to_i y_n \to_i z)$ (Df 2) , ou $x = y = z$.

Donc en réunissant les x_k et les y_k:

$\exists\, u_k \ldots (x \to_i u_o \to_i \ldots \to_i u_n \to_i z)$, c'est-à-dire: $x \to z$.

Th. 5 $x \to_i y \Rightarrow x \to y$.

par Df 2.

Th. 6 $(x)\ \exists\, y\,(x \to_i y) \vee (x = 1)$.

$x \to 1$ (Gr. IX)

$\exists\, y_k \ldots (x \to_i y_o \to_i \ldots \to_i y_n \to_i 1) \vee (x = 1)$ (Df. 2)

Th. 7 $\sim \exists x (x \to O)$.

Supposons qu'il y ait un $a \to_i o$. On aurait: $a \to o$ et $a \neq o$ (Df 2 et Th. 5). Mais $0 \to a$ par Gr. X, donc $a = o$, par Th. 3, ce qui contredit l'hypothèse.

Th. 8 $\sim \exists\, x\,(1 \to_i x)$.

Même raisonnement à partir de Gr. IX.

Th. 9 $(x \neq y \ \& \ x \to_i z \ \& \ y \to_i z) \Rightarrow (u \to_i z \Rightarrow u = x \vee u = y)$.

$x \to_i z \ \& \ y \to_i z \ \& \ u \to_i z \ \& \ x \neq y \neq u \Rightarrow (z - u = x \ \& \ z - u = y)$, par Gr. VI.

Donc par Gr. I: $x = y$, ce qui contredit l'hypothèse.

Th. 10 $(x \neq O \ \& \ x \to_i y) \Rightarrow (x \to_i z \Rightarrow y = z)$.

$x \to_i y \Rightarrow x - y = O$ (Df. 1) et $x \to_i z \Rightarrow x - z = O$.

$(x \neq o \ \& \ x - y = x - z) \Rightarrow y = z$, par Gr. III.

Corollaire $x \to_i y \Rightarrow \ \sim \exists\, u\,(x \to_i u \to_i y)$.

Soit $x \neq O$; par Th. 10: $x \to_i y \Rightarrow (u \to_i y \Rightarrow u = y)$, ce qui contredit Df. 1.

Soit $x = O$; par Gr. VI: $y - u = O \Rightarrow y \to_i u \vee y = u$, ce qui contredit $u \to_i y$.

Th. 11 $(x \to_i z \ \& \ (u)\ (u \to_i z \Rightarrow u = x)) \Rightarrow x = O$.

$x \to_i z \Rightarrow \exists\, s\,(s = z - x)$, par Gr. VII.

D'après Gr. VI, trois cas sont à envisager:

1°. $s \neq x$, avec $x \to_i z \ \& \ s \to_i z$, ce qui contredit l'hypothèse, qui exige alors $s = x$.

2°. $s = z$. Alors: $\exists\, u\,(x \to_i u \ \& \ z \to_i u) \vee (O \to_i z \,\&\, x = O)$. Le Th. 10 rejette le premier membre de l'alternative, sauf pour

$x = O$; le second membre est compatible avec l'hypothèse.

3°. $s = O$ avec $z \rightarrow_i x \vee z = x$, ce qui contredit l'hypothèse $x \rightarrow_i z$.

Le seul cas possible est donc $x = O$.

D'où le théorème, avec $\Rightarrow$.

Th. 12 $(x)\,(y)\; y \rightarrow x + y$.

$\exists z\,(z = x + y) \Rightarrow (x \rightarrow_i z \,\&\, y \rightarrow_i z) \vee (z = x \,\&\, y \rightarrow x) \vee (z = y \,\&\, x \rightarrow y)$, par Gr. VIII.

Examinons les trois membres de la disjonction:

1° $x \rightarrow_i z \,\&\, y \rightarrow_i z,\; z = x + y$, donc $y \rightarrow x + y$,

2° $x \rightarrow_i y \,\&\, y = x + y$, donc $y \rightarrow x + y$ (Df. 2),

3° $y \rightarrow x \,\&\, x = x + y$, donc $y \rightarrow x + y$.

Th. 13 $x \rightarrow_i y \,\&\, z \rightarrow_i y \Rightarrow y \rightarrow (x + z)$.

Par Gr. VIII et Df. 2.

Th. 14 $x \rightarrow_i y \Rightarrow x + (y - x) = y$.

Supposons $x \neq O$. Le th. 11 contraposé montre que le prédécesseur de y n'est pas unique. Donc $\exists z\,(z \neq x \,\&\, z \rightarrow_i y)$. Par Th. 9 ce z est unique.

On a donc: $x \rightarrow_i y \,\&\, z \rightarrow_i y \Rightarrow y - x = z$, par Gr. VI,

$x \rightarrow_i y \,\&\, z \rightarrow_i y \Rightarrow x + z = y$, par Gr. VIII.

Donc: $x + (y - x) = x + z = y$.

Supposons maintenant $x = O$. On a: $x + (y - x) = O + (y - O)$.

Lemme $O \rightarrow_i y \Rightarrow (y - O = y)$.

Par Gr. VII: $\exists z\,(z = y - O)$. Examinons les trois cas de l'alternative dans Gr. VI:

1°. $z \neq O \,\&\, O \rightarrow_i y \,\&\, z \rightarrow_i y$: impossible par Th. 11,

2°. $z = y$; alors: $\exists u\,(O \rightarrow_i u \,\&\, y \rightarrow_i u) \vee (O \rightarrow_i y)$.

Le second membre de l'alternative est possible: $z = y = y - O$, avec $O \rightarrow_i y$.

3°. $z = O \,\&\, (y \rightarrow_i O \vee y = O)$. Seul est possible: $z = O \,\&\, y = O$. C'est le cas trivial: $O = O - O$.

Le seul cas possible est donc bien $y - O = y$.

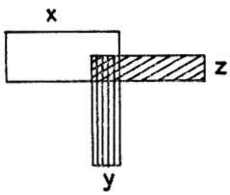
D'où le théorème.

Th. 15 $x \rightarrow_i y \Rightarrow y - (y - x) = x$.

Démonstration analogue à la précédente,

Il est facile de vérifier qu'un graphe de Piaget constitue un modèle de cette axiomatique; par contre, un modèle comme celui dont nous avons montré qu'il satisfait à l'axiomatique de Grize ne satisfait pas la nôtre; (par exemple l'axiome III partiel:
$\exists z\,(z \neq O \;\&\; z - x = z - y) \Rightarrow x = y$ se traduit:
$\exists z\,(z \neq O \;\&\; z \cap \bar{x} = z \cup \bar{y} \Rightarrow x = y)$, propriété dont le modèle fournit un facile contre-exemple schématisé ci-dessous).

$z \cap x = z \cup \bar{y}$
$x \neq y$



D'une manière plus formelle, on démontre les propriétés suivantes, caractéristiques du graphe de Piaget:

1°. Dichotomie. Un élément quelconque, non nul, ne peut être subordonné qu'à un seul élément (Th. 10), et un élément non nul a toujours deux prédécesseurs distincts et deux seulement, ou est précédé du seul O (Th. 9 et 11).

2°. O et 1 sont les éléments extrémaux du Groupement (Gr. IX, X).

3°. La structure ne comporte pas de circuits, tels que:
$x \rightarrow u \rightarrow \ldots \rightarrow x.$
Ils sont éliminés par Th. 3.

4°. Propriétés énoncées par Grize (p. 81).
1) $x \rightarrow_i y \Rightarrow x + (y - x) = x$. C'est le Th. 14.
2) $x \rightarrow_i y \Rightarrow y - (y - x) = x$. C'est le théorème 15.
3) O est élément neutre pour +, mais ne l'est pour — que dans la mesure où «x—O» est définie, c'est-à-dire quand $O \rightarrow_i x$. Gr. VI).
4) Les opérations + et — ne sont évidemment pas associatives sauf en des cas particuliers. Leur définition est exactement et univoquement précisée par Gr. V, VI, VII et VIII.

5) La résorption de l'addition: $x \rightarrow y \Rightarrow x + y = y$ découle directement de Gr. VIII, et l'idempotence: $x + x = x$ en est un cas particulier.

Nous sommes donc parvenus à construire un système qui répond, sauf erreur, aux réquisits empiriques du Graphe de Piaget, tout en évitant les ambiguïtés de l'axiomatique de Grize. Nous savons qu'il ne peut être satisfait pour des modèles manifestement impropres, comme c'était le cas pour cette dernière. Bien entendu, il se peut qu'il ne présente pas lui non plus de catégoricité par rapport au Graphe de Piaget, et que des modèles d'espèce différente le satisfassent. Il serait alors intéressant de voir si ces modèles traduisent néanmoins des comportements expérimentaux.

En tout état de cause, la formulation proposée paraît suffisamment précise pour qu'il soit possible de construire des expériences piagétiennes permettant d'établir — ou de rejeter — *axiome par axiome* sa réalité psychologique fonctionnelle.

Enfin, comme nous le suggérions dans le préambule, la porte reste ouverte à une reconsidération radicale du problème qui consisterait à refuser d'entrée de jeu l'hypothèse facile qui nous a permis — ainsi qu'à Grize — d'incorporer à notre axiomatique la logique classique des propositions et des prédicats. Une telle incorporation ne laisse pas d'être choquante, puisqu'il s'agit ici d'axiomatiser un mode de pensée supposé plus fruste que la pensée logique abstraite. Elle revient à supposer qu'au niveau des opérations concrètes l'enfant est incapable de se représenter par combinaison d'objets des règles de pensée qu'il utilise en fait quand il compose entre elles ces combinaisons mêmes. Cette situation n'est toutefois pas aussi ruineuse qu'il pourrait sembler à première vue, car elle est assez comparable à celle que rencontre le logicien quand il veut construire axiomatiquement les mathématiques. En l'espèce, elle suscite pourtant un malaise, qui pourrait peut-être se dissiper si les psychologues génétiques arrivaient à déceler par l'expérience les limites effectives de cette logique latente naïve; s'il se trouvait qu'elle suffise à construire des théorèmes du genre de ceux que nous avons établis, notre axiomatique conserverait un sens. Sinon, c'est à partir de cette proto-logique naturelle qu'il faudrait reconsidérer le problème et c'est à ce prix seulement que pourrait être valablement axiomatisé le Groupement.

Aix en Provence
Décembre 1964

Gilles GRANGER