L'ORIGINE ET LE MÉCANISME DES ANTINOMIES DANS LA PREMIÈRE PHILOSOPHIE DE RUSSELL (1903) [1]

Jules VUILLEMIN

§ 1. *La formulation de l'antinomie de Russell en 1905* [2].

Elle est générale et exprime la matrice d'une antinomie susceptible de recouvrir tous les cas possibles: «Étant donné un propriété φ et une fonction f, telles que, si φ appartient à tous les membres de u, $f`u$ existe toujours, a la propriété $\varphi$ et n'est pas un membre de $u$, alors la supposition qu'il y a une classe $w$ de tous les termes ayant la propriété $\varphi$ et que $f`w$ existe conduit à la conclusion que $f`w$ a et n'a pas la propriété φ».

Symboliquement:

$$\text{(A)} \qquad (u)\ \{[(x)\ (x\ \varepsilon\ u \supset \varphi x)] \supset [\varphi f`u\ .\ f`u\ \varepsilon'\ u]\} \supset \{[(\exists w)\ (y)\ (\varphi y \equiv y\ \varepsilon\ w)] \supset [(\exists w)\ (\varphi f`w\ .\ \sim\varphi f`w)]\},$$

où φ désigne une fonction propositionnelle et f une description.

Pour obtenir le paradoxe de Burali-Forti, on posera les interprétations suivantes: φx signifie: «x est un nombre ordinal», $f`u$ signifie: «le successeur de u» (le nombre ordinal de u).

Par analogie on obtiendrait le paradoxe de Cantor, en posant les interprétations: φx signifie: «x est un ensemble», $f`u$ signifie «$\mathscr{P}`u$», c'est-à-dire «l'ensemble des parties de l'ensemble u». — Ce dernier cas correspond au théorème cantorien selon lequel le nombre cardinal

(1) Je remercie M. Philippe Devaux qui m'a invité à donner, sur ce sujet, une conférence au Centre National Belge de Recherches de Logique. M. Joseph Dopp a bien voulu faire quelques objections au texte primitif de cette conférence, que j'ai remaniée avec l'aide de M. Marcel Guillaume. M. Guillaume a corrigé, éclairci et complété; à ce dernier point de vue seulement, on lui doit les argumentations reposant sur le procédé d'identification (pp. 7, 73, 81-81) et l'analyse de l'antinomie des propositions (pp. 79-81). Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Pour des raisons typographiques, nous représentons par «ε'» la négation de la relation «ε».

(2) «On some difficulties in the Theory of transfinite Numbers and Order types», *Proceedings of the London Mathematical Society*, Second Series, vol. 4, 1907, pp. 29-53 (voir p. 35) (date de communication: 1905); de même: «Les paradoxes de la logique», *Revue de Métaphysique et de morale*, v. 14, 1906, pp. 627-650 (voir p. 635).

de l'ensemble des parties d'un ensemble est supérieur au nombre cardinal de cet ensemble. L'antinomie qui résulte de l'hypothèse selon laquelle existe un ensemble w de tous les ensembles signifie que, d'une part, l'ensemble des parties de l'ensemble de tous les ensembles est un ensemble — et donc est contenu en w, en sorte que son cardinal est égal ou inférieur au cardinal de l'ensemble de tous les ensembles — et que, d'autre part, cet ensemble des parties de l'ensemble de tous les ensembles ayant un cardinal supérieur à cet ensemble ne peut être contenu en lui, qui, par définition, les contient tous et, par conséquent, n'est pas un ensemble.

Dans ces deux formes, deux solutions de l'antinomie sont possibles. Ou bien on mettra en question le caractère «prédicatif» (3) de φ: les ordinaux non plus que les ensembles ne forment une classe. Ou bien on mettra en question l'existence de $f`w$: tout en admettant l'existence de l'ensemble des ordinaux ou de l'ensemble de tous les ensembles, on contestera qu'il y ait un nombre ordinal du premier ou un ensemble des parties du second.

On aperçoit, par là, que Russell a, en 1905, construit une matrice générale des antinomies pour intégrer dans leur liste le paradoxe de Burali-Forti et la double lecture à laquelle il donne lieu. En 1903, dans les *Principles of Mathematics*, il ne tenait le paradoxe de Burali-Forti que pour une pseudo-antinomie, destinée à s'évanouir dès qu'on abandonnait le posutlat selon lequel la série de tous les ordinaux est bien ordonnée; au contraire, en 1905, ce «postulat» est reçu parmi les théorèmes de la Théorie des ensembles et la difficulté signalée par Burali-Forti doit dès lors recevoir droit de cité philosophique.

A la différence des deux antinomies précédentes, l'antinomie à laquelle Russell a attaché son nom n'offre qu'une seule solution, parce qu'elle n'offre qu'une seule interprétation. En effet, φx signifie alors: «x n'est pas membre de x» («$x \varepsilon' x$») et $f`u = u$ (f = fonction identité). La matrice générale se réduit donc à l'expression:

$$\text{(B)} \quad (u) \; \{[(x)\ (x \,\varepsilon\, u \supset x \,\varepsilon'\, x)] \supset (u \,\varepsilon'\, u)\} \supset \\ \{[(\exists w)\ (y)\ (y \,\varepsilon'\, y \equiv y \,\varepsilon\, w)] \supset [(\exists w)\ (w \,\varepsilon'\, w,\ \sim w \,\varepsilon'\, w)]\}$$

L'unique solution possible, dans ce cas, consiste à considérer que «$y \,\varepsilon'\, y$» n'est pas une fonction propositionnelle prédicative et, en conséquence, à nier l'existence de w.

Dans l'article de 1905, Russell rappelle l'origine cantorienne des

(3) Une *norme* (c'est-à-dire une *propriété* ou une *fonction propositionnelle* qui contient une variable est dite *non-prédicative*, quand elle ne définit pas une classe; quand elle définit une classe, elle est dite *prédicative* («On some Difficulties..., pp. 30 et 34).

antinomies (4) ,mais les formes générale et particulière de leur matrice commune tendent à cacher cette origine. Pour l'apercevoir, il convient de remonter à l'exposé plus compliqué et plus ancien des *Principles.*

§ 2. *L'antinomie dans les* Principles *(1903): sa forme primitive.*

«Soit *w* un concept-classificatoire qui peut être prédiqué de lui-même, *id est* tel que «*w* est un *w*». Des exemples sont fournis par *le concept-classificatoire* et par les négations des concepts-classificatoires ordinaires, par exemple non-homme. Alors (α) si *w* est contenu dans une autre classe *v*, puisque *w* est un *w*, *w* est un *v*; en conséquence, il y a un terme de *v* qui est un concept-classificatoire tel qu'il peut être prédiqué de lui-même. Donc, par contraposition, (β) si *u* est un concept-classificatoire dont nul membre n'est un concept-classificatoire tel qu'il puisse être prédiqué de lui-même, aucun concept-classificatoire contenu en *u* ne peut être prédiqué de lui-même. Donc, de plus, (γ) si *u* est un concept-classificatoire quelconque et *u'* le concept-classificatoire des membres de *u* qui ne sont pas prédicables d'eux-mêmes, ce concept-classificatoire est contenu en lui-même et aucun de ses membres n'est prédicable de lui-même; donc, par (β), *u'* n'est pas prédicable de lui-même. Alors *u'* n'est pas un *u'* et n'est donc pas un *u*; car les termes de *u* qui ne sont pas termes de *u'* sont tous prédicables d'eux-mêmes, ce que n'est pas *u'*. Alors (δ) si *u* est un concept-classificatoire quelconque, il y a un concept-classificatoire contenu en *u* qui n'est pas un membre de *u* et qui est aussi l'un des concepts-classificatoires qui ne sont pas prédicables d'eux-mêmes. Jusqu'ici, nos déductions paraissent difficilement pouvoir être mises en question. Mais si nous considérons à présent la dernière d'entre elles et si nous admettons la classe des concepts-classificatoires qui ne peuvent pas être prédiqués d'eux-mêmes, nous trouvons que cette classe doit contenir un concept-classificatoire qui n'est pas membre de lui-même et qui, de plus, n'appartient pas à la classe en question» (5).

(4) *Op.cit.*, pp. 32-36; voir plus bas, p. 81.

(5) *The Principles of mathematics*, cité d'après la 2e éd., 7e impression, London, Allen et Unwin, 1956, Chap. X, § 100, p. 101. Également, *Ibid.*, chap. VI, § 78, pp. 79-80: «Parmi les prédicats, la plupart des instances ordinaires ne peuvent être prédiquées d'elles-mêmes, bien qu'en introduisant des prédicats négatifs, on puisse trouver qu'ils sont exactement autant d'instances de prédicats qui sont prédicables d'eux-mêmes. Parmi ces derniers, l'un au moins, à savoir la prédicabilité, n'est pas négatif: la prédicabilité, comme il est évident, est prédicable, c'est-à-dire est un prédicat de soi-même. Mais la

On écrira ce raisonnement ([6]), sous la forme symbolique suivante:

(α) 1. $\vdash w \subset v \equiv (x)\,(x\,\varepsilon\,w \supset x\,\varepsilon\,v)$ (Axiome-définition).

(a) $\vdash [(x)\,(x\,\varepsilon\,w \supset x\,\varepsilon\,v)] \supset (w\,\varepsilon\,w \supset w\,\varepsilon\,v)$

(par 1, la règle de spécification universelle et la Substitution w/x).

(b) $\vdash [w \subset v \equiv (x)\,(x\,\varepsilon\,w \supset x\,\varepsilon\,v)] \supset$
$\{[((x)\,(x\,\varepsilon\,w \supset x\,\varepsilon\,v)) \supset (w\,\varepsilon\,w \supset w\,\varepsilon\,v)] \supset [(w \subset v) \supset (w\,\varepsilon\,w \supset w\,\varepsilon\,v)]\}$

(par 1, (a) et le Syllogisme hypothétique).

(c) $\vdash (w \subset v) \supset (w\,\varepsilon\,w \supset w\,\varepsilon\,v)$

(par (b) et deux fois le *Modus Ponens*).

2. $\vdash (w \subset v) \supset (w\,\varepsilon\,w \supset w\,\varepsilon\,v)$ (par. 1)

(a) $\vdash (w \subset v\,.\,w\,\varepsilon\,w) \supset (w\,\varepsilon\,w)$

(simplification du produit).

(b) $\vdash (w \subset v\,.\,w\,\varepsilon\,w) \supset (w\,\varepsilon\,v)$

(par (2) et l'Importation).

(c) $\vdash (w \subset v\,.\,w\,\varepsilon\,w) \supset (w\,\varepsilon\,w\,.\,w\,\varepsilon\,v)$

(par (a), (b), le théorème $[(p \supset q) \supset (p \supset r)]\ (p \supset q\,.\,r)$ et 2 M.P.).

(d) $\vdash (w\,\varepsilon\,w\,.\,w\,\varepsilon\,v) \supset [(\exists x)\,(x\,\varepsilon\,x\,.\,x\,\varepsilon\,v)]$

(par la règle de la Généralisation existentielle).

plupart des instances sont négatives; ainsi, la non-humanité est non-humaine et ainsi de suite. Les prédicats qui ne sont pas prédicables d'eux-mêmes sont, par conséquent, seulement une sélection parmi les prédicats, et il est naturel de supposer qu'ils forment une classe ayant un prédicat définissant. Mais alors, examinons si ce prédicat définissant appartient ou non à la classe. S'il appartient à la classe, il n'est pas prédicable de lui-même, puisque c'est là la propriété caractéristique de la classe. Mais s'il n'est pas prédicable de lui-même, alors il n'appartient pas à la classe dont il est le prédicat définissant, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'autre part, s'il n'appartient pas à la classe dont il est le prédicat définissant, alors il n'est pas prédicable de lui-même, c'est-à-dire qu'il est l'un des prédicats qui ne sont pas prédicables d'eux-mêmes, et par conséquent il appartient à la classe dont il est le prédicat définissant, de nouveau en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi de l'une et l'autre hypothèse, nous pouvons déduire sa contradictoire».

([6]) Je donne dans l'*Addendum* (p. 85) les raisons pour lesquelles j'ai omis d'introduire explicitement dans le symbolisme la notion de «concept-classificatoire». Les formules (α) 1, 2, ..., (β) 1, 2, ..., etc. expriment directement le texte de Russell. Les formules secondaires, qui figurent sous ces formules principales (a), (b), ..., représentent les moments intermédiaires du raisonnement que j'ai tenté de rétablir exhaustivement.

3. $\vdash (w \subset v \,.\, w \,\varepsilon\, w) \supset [(\exists x)\,(x \,\varepsilon\, x \,.\, x \,\varepsilon\, v)]$
(par (c), (d), Syll. hyp. et 2 M. P.).

(β) 1. $\vdash [\sim (\exists x)\,(x \,\varepsilon\, v \,.\, x \,\varepsilon\, x)] \supset [\sim (w \subset v \,.\, w \,\varepsilon\, w)]$
(par (α3) et la contraposition).

(a) $\vdash [\sim (\exists x)\,(x \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\varepsilon\, x)] \supset [(y) \sim (y \subset u \,.\, y \,\varepsilon\, y)]$
(par (1), la règle de la Généralisation universelle et les Subst. u/v, y/w).

(b) $\vdash \sim (y \subset u \,.\, y \,\varepsilon\, y) \equiv [(y \subset u) \supset \sim y \,\varepsilon\, y]$
(loi de Morgan et définition de l'implication par la disjonction et la négation).

2. $\vdash x \,\varepsilon'\, y \equiv \sim x \,\varepsilon\, y$ (Axiome-définition).

3. $\vdash [\sim (\exists x)\,(x \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\varepsilon\, x)] \supset [(y)\,(y \subset u \supset y \,\varepsilon'\, y)]$
(par (a), (b), Syll. Hyp., 2 M.P. et 2).

(γ) 1. $\vdash (u)\,(y)\,[y \,\varepsilon\, u' \equiv (y \,\varepsilon\, u \,.\, y \,\varepsilon'\, y)]$ (Axiome-définition).

(a) $\vdash u' \subset u' \equiv (x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon\, u')$
(par (α1) et les Subst. u'/w et u'/v).

(b) $\vdash (u)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon\, u')$
(Identité).

(c) $\vdash (u)\,(x)\,\{[x \,\varepsilon\, u' \equiv (x \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\varepsilon'\, x)] \supset (x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon'\, x)\}$
(par 1, la Subst. x/y, le théorème: «$(p \supset (q \,.\, r)) \equiv$
$[(p \supset q) \,.\, (q \supset r)]$
et la simplification du produit).

(d) $\vdash \{(u)\,(x)\,[x \,\varepsilon\, u' \equiv (x \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\varepsilon'\, x)]\} \supset \{(u)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset$
$x \,\varepsilon'\, x)\}$
(par (c) et la distribution des quantificateurs).

(e) $\vdash (u)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon'\, x)$
(par (d), 1 et M. P.).

(f) $\vdash [(u)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon\, u')] \,.\, [(u)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon'\, x)]$
(par (b) et (e)).

(g) $\vdash (u)\,\{[(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon\, u')] \,.\, [(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon'\, x)]\}$
(par (f) et distr. des quantificateurs).

(h) $\vdash [(x)\,(x \,\varepsilon\, u' \supset x \,\varepsilon'\, x)] \equiv [\sim (\exists x)\,(x \,\varepsilon\, u' \,.\, x \,\varepsilon\, x)]$
(par les équivalences des quantificateurs et (β2)).

2. $\vdash (u)\,[u' \subset u' \,.\, \sim (\exists x)\,(x \,\varepsilon\, u' \,.\, x \,\varepsilon\, x)$
(par (g), (a) et (h)).

(a) $\vdash [\sim (\exists x)\,(x \,\varepsilon\, u' \,.\, x \,\varepsilon\, x)] \supset [(y)\,(y \subset u' \supset y \,\varepsilon'\, y)]$
(par (β3) et la Subst. u'/u).

(b) $\vdash (u)\ \{[(y)\ (y \subset u' \supset y\ \varepsilon'\ y)] \supset (u' \subset u' \supset u'\ \varepsilon'\ u')\}$
(par la règle de Spéc. Univ. et la Subst. u'/y).

(c) $\vdash (u)\ [u' \subset u' \supset (u' \subset u' \supset u'\ \varepsilon'\ u')]$
(par 2, (a) et (b), 2 Syll. Hyp. et 4 M.P.).

3. $\vdash (u)\ u'\ \varepsilon'\ u'$
(par (c), l'Identité et 2 M. P.).

(a) $\vdash (u)\ [x\ \varepsilon'\ u' \equiv x\ \varepsilon'\ u \vee x\ \varepsilon\ x]$
(par (γ1), la Subst. x/y, la Règle de Spéc. Univ., la négation et la loi de Morgan).

(b) $\vdash (u)\ \{(x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon'\ u') \equiv [(x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon'\ u) \vee (x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon\ x)]$
(par (a) qu'on «multiplie» par «$x\ \varepsilon\ u$» et la distr. du produit par rapport à la disjonction).

(c) $\vdash (u)\ [(x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon'\ u') \equiv (x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon\ x)]$
(puisque le premier terme de la disjonction en (b) est vide).

4. $\vdash (u)\ [(x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon'\ u') \supset x\ \varepsilon\ x]$.
(par (c) et les tautologies:
«$(p\ .\ q \equiv p\ .\ r) \supset [(p\ .\ q) \supset (p\ .\ r)]$» et «$[(p\ .\ q) \supset (p\ .\ r)] \equiv [(p\ .\ q) \supset r]$»).

(a) $\vdash (u)\ [x\ \varepsilon'\ x \supset \sim (x\ \varepsilon\ u\ .\ x\ \varepsilon\ u')]$
(contraposition de (γ4).

(b) $\vdash (u)\ [u'\ \varepsilon'\ u' \supset \sim (u'\ \varepsilon\ u\ .\ u'\ \varepsilon'\ u')\ ]$
(par (a) et la Subst. u'/x).

(c) $\vdash [(u)\ (u'\ \varepsilon'\ u')] \supset [(u) \sim (u'\ \varepsilon\ u\ .\ u'\ \varepsilon'\ u')]$
(par (b) et Distr. des quantificateurs).

(d) $\vdash (u) \sim (u'\ \varepsilon\ u\ .\ u'\ \varepsilon'\ u')$
(par (c), (γ3), M. P.).

(e) $\vdash (u)\ (u'\ \varepsilon'\ u \vee u'\ \varepsilon\ u')$
(par (d), la loi de Morgan et (β2)).

5. $\vdash (u)\ (u'\ \varepsilon'\ u)$
(par (e), (γ3) et la règle de disjonction des cas).

(a) $\vdash u' \subset u \equiv (x)\ (x\ \varepsilon\ u' \supset x\ \varepsilon\ u)$
(par (α1) et les Subst. u'/w, u/v).

(b) $\vdash (u)\ (x)\ (x\ \varepsilon\ u' \supset x\ \varepsilon\ u)$
(par (γ1), la Subst. x/y et un raisonnement analogue à celui qui conduit de (γ1) à (γ1a).

(c) $\vdash (u)\ (u' \subset u)$
(par (a), (b), M. P.).

(d) $\vdash (u)\ (\exists u')\ (u' \subset u)$
(par (c) et la Gén. Exist.).

(δ) 1. $\vdash (u)\,(\exists u')\,(u' \subset u \,.\, u' \,\varepsilon'\, u')$
(par (α1), (γ1), (γ5) et (γ3)).
2. $\vdash (\exists h)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, h \equiv x \,\varepsilon'\, x)$ (Axiome).
3. $\vdash (\exists h')\,(h' \subset h \,.\, h' \,\varepsilon'\, h \,.\, h' \,\varepsilon'\, h')$
(par (δ1), la Spéc. Univ. et les Subst. h'/u' et h/u)
4. $\vdash (\exists h')\,(h' \subset h \,.\, h' \,\varepsilon'\, h)$
(par (δ3) et (δ2) avec la Subst. h'/x).

§ 3. *Comparaison entre ces deux formulations de l'antinomie.*

Quatre différences essentielles distinguent ces deux formulations.

1°. Les moments (α) et (β) sont passés sous silence en 1905.

2°. Le moment (γ) tout entier, ainsi que (δ1), sont ramassés dans la prémisse de (B):
$$\{[(x)\,(x \,\varepsilon\, u \supset x \,\varepsilon'\, x)] \supset (u \,\varepsilon'\, u)\}.$$

3°. Le moment (δ) se trouve de même simplifié et, de plus, par opposition à la contradiction explicite (en δ 4), la contradiction en (B) porte désormais directement sur w dans son rapport d'appartenance avec lui-même, et non plus sur le rapport d'appartenance de w', contenue dans w, à w.

4°. Seule l'esquisse d'une matrice particulière est donnée en 1903; la notion de $f'u$ n'apparaît pas.

Cette dernière différence s'explique par l'évolution de Russell à l'égard de l'antinomie dε Burali-Forti. Quelle est la raison des autres ?

(α) et (β) servent à établir que si nul des membres d'un ensemble, u, n'est membre de lui-même, alors tous les ensembles y, *contenus dans* u, sont non-membres d'eux-mêmes. La différence entre (β3) et la prémisse de (B) consiste en ce que (B) déduit directement et pour u la conséquence $u \,\varepsilon'\, u$ de la supposition $[(x)\,(x \,\varepsilon\, u \supset x \,\varepsilon'\, x)]$, tandis que (β3) déduit de la même supposition la conséquence $y \,\varepsilon'\, y$ pour tous les y contenus dans u.

Or il est remarquable que ce qui complique (γ) et (δ) par rapport à (B), c'est toujours, de même, l'introduction d'un ensemble dans lequel est contenu l'ensemble dont on considère les propriétés et c'est cette complication que Russell a supprimée, comme logiquement superflue, en 1905. Ainsi, en ramassant l'argument (γ) et (δ), on en écrirait la matrice sous la forme suivante:

(C) $\{(u)\,[(u' \subset u\,.\,(x)\,(x\,\varepsilon\,u' \supset x\,\varepsilon'\,x)) \supset (u'\,\varepsilon'\,u'\,.\,u'\,\varepsilon'\,u)]\} \supset$
$\{[(\exists w)\,(y)\,(y\,\varepsilon'\,y \equiv y\,\varepsilon\,w)] \supset [(\exists w)\,(w' \subset w\,.\,w'\,\varepsilon\,w\,.\,w'\,\varepsilon'\,w)]\}$

Dans cette formule, le conséquent de la première ligne correspond au produit de ($\gamma 3$) et de ($\gamma 5$), l'antécédent de la seconde ligne à ($\delta 2$) et son conséquent à ($\delta 4$). Quant à l'antécédent de la première ligne, il résulte logiquement de (γI) et de (αI):

(a) $\vdash (u)\,(x)\,(x\,\varepsilon\,u' \supset (x\,\varepsilon\,u\,.\,x\,\varepsilon'\,x))$
(par (γI), la Subst. x/y et le théorème: «$(p \equiv q) \supset (p \supset q)$»).

(b) $\vdash ((u)\,(x)\,(x\,\varepsilon\,u' \supset x\,\varepsilon\,u))\,.\,((u)\,(x)\,(x\,\varepsilon\,u' \supset x\,\varepsilon'\,x))$
(par (a), la Distr. des quantificateurs et le théorème: «$[p \supset (q\,.\,r)] \equiv [(p \supset q)\,.\,(p \supset r)]$»

(c) $\vdash ((u)\,(x)\,(u' \subset u))\,.\,((u)\,(x)\,(x\,\varepsilon\,u' \supset x\,\varepsilon'\,x))$
(par (b) et (αI)).

(d) $\vdash (u)\,((x)\,(u' \subset u)\,.\,(x)\,(x\,\varepsilon\,u' \supset x\,\varepsilon'\,x))$
(par (x) et la Distr. des quantificateurs, d'où l'on tire immédiatement l'antécédent cherché).

Les inclusions $u' \subset u$, $w' \subset w$ constituent donc l'unique différence, — compte tenu des changements qui leur sont liés: substitution de u' à u dans la première ligne et adjonction de $u' \subset u$ dans son conséquent, énoncé de la contradiction, dans le conséquent de la deuxième ligne, en fonction de l'inclusion de w' dans w — entre (B) et (C) et, si l'on fait abstraction du problème de l'antinomie de Burali-Forti, l'unique différence entre les formulations de 1903 et de 1905. Leur considération est inutile à la force logique de l'argument. On tentera de démontrer que cette différence atteste en 1903 le souvenir de l'origine mathématique de l'antinomie, dans la mesure où cette première formulation utilise un procédé de démonstration typique dans la Théorie des Ensembles, la méthode «diagonale» de Cantor.

§ 4. *La «méthode diagonale»: deux exemples de son application.*

Russell lui-même expose de la façon suivante — et en relation explicite avec le problème des antinomies (7) — la méthode diagonale

(7) *Principles*, Chap. XLIII, § 344, p. 365 («Examinons d'abord les preuves cantoriennes démontrant qu'il n'y a pas de plus grand nombre cardinal; nous discuterons ensuite les cas dans lesquels apparaît la contradiction». De même, § 348, p. 366, où les mots: «l'argument précédent» renvoie à la méthode diago-

appliquée à la démonstration qu'il existe des puissances supérieures à la première ([8]):

«Soient m et w, dit Cantor, deux caractères mutuellement exclusifs. Considérons alors une collection R d'éléments E, où chaque élément E est une collection dénombrable $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, et où chaque x est ou bien un m ou bien un w. (Les deux caractères m et w peuvent être considérés respectivement comme «plus grand» et «plus petit que quelque terme fixé». Ainsi les x's peuvent être les nombres rationnels, chacun d'entre eux étant un m s'il est plus grand que 1, et un w s'il est plus petit que 1. Ces remarques n'ont pas d'incidence logique, mais elles permettent de suivre plus aisément l'argument). La collection R doit consister en tous les éléments possibles E de la description précédente. Alors M n'est pas dénombrable, c'est-à-dire est d'une puissance supérieure à la première. Car prenons une collection quelconque mais dénombrable de E's, qui sont définis de la façon suivante:

$$\begin{aligned} E_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{1n}, \ldots) \\ E_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_p &= (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les a's sont chacun un m ou un w de quelque façon déterminée. (Par exemple, les premiers p termes de E_p peuvent être des m's, le reste, en totalité, des w's. Ou quelque autre loi peut être suggérée, qui assure que les E's de notre série sont tous différents). Alors, quelle que soit la façon dont on aura choisi notre série des E's, nous pouvons toujours trouver un terme E_0, appartenant à la collection R, mais non à la série dénombrable des E's. Car, soit E_0 la série $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, où, pour chaque n, b_n est différent de a_{nn} — c'est-à-dire que si a_{nn} est un m, b_n est un w et *vice versa*. Alors chacune de nos séries dénombrables de E's contient au moins un terme non identique avec le terme correspondant de E_0, et donc E_0 n'est pas l'un des termes de notre série dénombrable des E's. Donc aucune série de ce genre ne peut contenir tous les E's et, par conséquent, les E's ne sont pas dénombrables, c'est-à-dire que R a une puissance supérieure à la première».

Telle est la méthode dont on se sert par exemple en théorie des en-

nale: «l'argument précédent, on doit le proclamer, apparaît ne contenir aucune hypothèse douteuse. Cependant il y a certains cas dans lesquels la conclusion apparaît évidemment fausse».

([8]) *Ibid.*, § 346, p. 365.

sembles pour démontrer que l'ensemble des nombres irrationnels compris entre 0 et 1 a une puissance supérieure à celle du dénombrable. D'une part, on démontre que tout nombre incommensurable compris entre 0 et 1 peut être représenté d'une seule manière par une fraction continue illimitée, c'est-à-dire par une expression de la forme:

$$x_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

qu'on écrira conventionnellement [9]:

$$x_n = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \dots)$$

c'est-à-dire comme une suite illimitée d'entiers, dans laquelle certains entiers peuvent figurer une infinité de fois et certains autres ne pas figurer. L'ensemble des suites x n'est pas dénombrable. Supposons le contraire. On pourrait alors définir une suite dénombrable $x_1, x_2, \dots,$ telle que les x_n seraient tous les nombres incommensurables du segment $0 - 1$. Désignons par «a_{np}» l'entier naturel de rang p de x_n et définissons un nombre x_0 par la condition que son entier de rang p ne soit pas égal à a_{pp}, c'est-à-dire à l'entier de rang p de x_p. Il suffirait alors d'établir une convention destinée à déterminer cette inégalité pour obtenir avec x_0 un nombre distinct de tous les x_n au moins par un des entiers — celui de rang n —, si nous étions certains *a priori* que dans la série dénombrable $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$ tous les x's étaient distincts. Pour fonder cette certitude, nous avons besoin d'une règle qui permette de décider si chacun des a_{pn} pour chaque x_p possède exclusivement l'un des deux caractères m ou w et, en conséquence, de ranger les x's dans un ordre déterminé.

On utilise le même mode de raisonnement dans la théorie des ensembles, pour démontrer que l'ensemble des parties d'un ensemble M, soit $\mathscr{P}(M)$, a une puissance supérieure à l'ensemble M. En vue de cette démonstration, on choisit dans $\mathscr{P}(M)$ un ensemble P_m équivalent à M [10]. Si, pour la clarté de l'exposé, on considére d'abord M fini, soit $M = \{1, 2, 3\}$, on aura:

$$\mathscr{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

[9] Par exemple, $\pi - 3 = (7, 15, 1, \dots)$.

[10] Je reprends ici l'exposé de cette démonstration dans J. Breuer, *Initiation*

Extrayons de $\mathscr{P}(M)$ un ensemble P_m équivalent à M, par exemple:

$$P_m = \{\{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Fixons la correspondance biunivoque:

$$\begin{aligned} &M \leftrightarrow P_m\,, \\ &1 \leftrightarrow \{2, 3\}, \\ &2 \leftrightarrow \{1, 2, 3\}, \\ &3 \leftrightarrow \{2\}. \end{aligned}$$

Les éléments de M se répartissent en deux classes exclusives.

classe I	*classe II*
Eléments de M qui figurent dans le sous-ensemble correspondant: p. ex. 2, qui figure dans $\{1, 2, 3\}$,	Eléments de M qui ne figurent pas dans le sous-ensemble correspondant: p. ex. 1, qui ne figure pas dans $\{2, 3\}$, 3, qui ne figure pas dans $\{2\}$.

Soit L, l'ensemble des éléments de M contenus dans la classe II:

$$L = \{1, 3\}; L \subset M, \quad \text{donc} \quad L \,\varepsilon\, \mathscr{P}(M).$$

Démontrons que $L \,\varepsilon'\, P_m$. Supposons le contraire. Il correspond alors à L un élément bien déterminé de M, soit m_1, lequel appartient soit à la classe I, soit à la classe II. Si m_1 appartient à I, m_1 devrait figurer dans le sous-ensemble correspondant, soit L; mais L contient uniquement les éléments de M qui ne figurent pas dans le sous-ensemble correspondant, c'est-à-dire les éléments de la classe II. Si m_1 appartenait à la classe II, il ne devrait pas être contenu en L, en vertu de la définition de la classe II; mais L contient tous les éléments de la classe II et devrait donc contenir aussi m_1. Bref, chaque hypothèse conduit à sa contradictoire:

$$m_1 \,\varepsilon\, I \supset m_1 \,\varepsilon\, II \;\; ; \;\; m_1 \,\varepsilon\, II \supset m \,\varepsilon\, I.$$

Donc $L \,\varepsilon'\, P_m$. Par conséquent, aucun sous-ensemble P_m, équivalent à M, ne peut épuiser $\mathscr{P}(M)$:

$$\overline{\overline{\mathscr{P}(M)}} > \overline{\overline{M}}\,.$$

à la théorie des ensembles, trad. Gloden, Dunod, Paris, 1961, pp. 42-44. On le trouvera — sous une forme condensée — dans Bourbaki, *Théorie des ensembles*, L. I, Chap. III, § 3, n° 6, Théorème 2 (*in Eléments de mathématiques*, Hermann, 1956, XX, pp. 63-64.

Soit alors M un ensemble infini et $\mathscr{P}(M)$ l'ensemble de ses sous-ensembles. Puisque l'ensemble des sous-ensembles qui ne contiennent qu'un seul élément est déjà équivalent à M, on a:

$$\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{P}(M)}},$$

Il faut donc démontrer que $\overline{\overline{\mathscr{P}(M)}} > \overline{\overline{M}}$.

Soit alors P_m un sous-ensemble de $\mathscr{P}(M)$, équipotent à M:

$$P_m \subset \mathscr{P}(M) \;\; ; \; P_m \sim M.$$

Supposons que les éléments de M soient associés biunivoquement à ceux de P_m. On répartira alors les éléments de M en deux classes, suivant qu'ils appartiennent à l'élément (c'est-à-dire à l'ensemble) de P_m, qui leur est associé (classe I) ou à celui qui ne leur est pas associé (classe II). L'ensemble L, comprenant tous les éléments de II, est un élément de $\mathscr{P}(M)$, mais n'appartient pas à M, en vertu du même raisonnement que le précédent.
N. B. Le raisonnement reste naturellement valable si l'on choisit comme mode de corrélation entre M et P_m la corrélation qui fait correspondre chaque élément de M avec la classe dont le seul terme est cet élément, P_m étant la classe qui comprend comme éléments toutes ces classes.
Alors L comprendra la classe-nulle: $L = \{\emptyset\}$, qui vérifie bien $L \subset M$, $L \,\varepsilon\, \mathscr{P}(M)$.

§ 5.- *Analyse du mécanisme de la méthode «diagonale».*

Il peut paraître arbitraire de considérer que le raisonnement par lequel on a prouvé que $\overline{\overline{\mathscr{P}(M)}} > \overline{\overline{M}}$ est une application de la méthode «diagonale», puisqu'on n'y retrouve ni la fonction de transformation des a_{pp} termes de E_p ou de x_p, ni l'opération qui réunit en une collection ces termes, permettant de constituer respectivement les suites E_0 ou x_0. C'est donc par abus de langage qu'on la regarde comme résultant d'une telle application. Toutefois, l'analyse montre que cet abus est bien fondé [11].

[11] «La preuve est semblable, dans sa conception générale, à la preuve selon laquelle les nombres réels ne sont pas dénombrables, puisqu'elle montre l'impossibilité d'une certaine corrélation, en montrant qu'elle permettrait de définir un élément qu'elle ne recouvrirait pas. Pour cette raison, on dit parfois que l'argument manifeste le procédé diagonal de Cantor, bien que

Comparons les étapes successives de l'argument tel que le définit Russell (en R, E, E_i, a_{ij}, E_o), tel qu'il apparaît dans sa première application (en l'ensemble des nombres irrationnels compris entre 0 et 1, X, x_i, a_{ij}, x_o) et tel qu'il apparaît dans la seconde application (en $\mathscr{P}(M)$, P_m, A_i - éléments de P_m -, m_i - éléments de M-, L). Cette énumération des éléments homologues des raisonnements suffit à faire apercevoir entre eux une différence importante. Dans les deux premières formes de l'argument, les a_{ij} sont les éléments respectivement de E_i et de x_i; dans la troisième, les m_i ne sont pas éléments des A_i.

1°) Le but de l'argument est de démontrer qu'un ensemble muni de certaines propriétés (dénombrables pour E, X, P_m quand M est infini dénombrable, ou fini pour P_m quand M est fini) est partie propre d'un ensemble défini (R, I, $\mathscr{P}(M)$). Tous ces ensembles sont des ensembles d'ensembles.

2°) Pour établir l'existence de cette inclusion propre — laquelle signifie l'impossibilité d'établir la validité d'une relation de correspondance biunivoque —, on définit une telle correspondance entre les ensembles destinés à être inclus et des ensembles d'éléments — non d'ensembles — munis de propriétés analogues à eux: $\mathbf{N}$ (ensemble des entiers naturels), N, une section finie de $\mathbf{N}(=M)$, ou M infini.

3°) Russell stipule qu'il existe un type de distribution des a_{ij} en m ou en w et, par conséquent, une façon déterminée de répartir en classes les éléments de E, qui assure la biunivocité de la correspondance $E \leftrightarrow N$. Cette condition n'est pas nécessaire. Réciproquement il suffit que la correspondance bi-univoque puisse être fixée: alors, quel que soit le moyen qu'on aura utilisé pour la fixer, cette correspondance aura pour conséquence de répartir tous les a_{ij} en deux classes exclusives définies par les propriétés m et w:

$$1.\ \{(i\,.\,j)\ [a_{ij} \varepsilon E_i\,(\mathrm{N})\ (\text{resp. } x_i)\ \supset\ (a_{ij} \varepsilon m \vee a_{ij} \varepsilon w)]\}\,.$$
$$[\sim (\exists_i) \sim (\exists_j)\ (a_{ij} \varepsilon m\ .\ a_{ij} \varepsilon w)].$$

De même, dans la démonstration du théorème de Cantor, quel que soit le mode de correspondance biunivoque établi entre P_m et M, cette

l'instance supplémentaire qu'il introduit pour réfuter l'hypothèse de l'équivalence ne soit pas, au sens littéral, une séquence diagonale» (W. and M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford, 1962, pp. 441-442). Kleene, (*Introduction to Metamathematic*, Amsterdam, 1962, p. 14) considère que cette preuve appartient à la méthode diagonale. Rosser (*Logic for Mathematicians*, New York, 1953, p. 346) lie directement le théorème de Cantor et le paradoxe; de même Bourbaki (*Op.cit.*); ils en tirent deux solutions différentes pour conserver le théorème et éliminer l'antinomie.

correspondance suffit à répartir en deux classes disjointes, non plus, comme dans le cas précédent, les termes a_{ij} des E_i (*resp.* x_i), mais les classes A_i de P_m elles-mêmes, par la nature de la correspondance fixée entre P_m et M. En effet les éléments de M sont les éléments de P_m: le symbole «$\leftrightarrow$» désignant une correspondance biunivoque,

2. $(P_m \leftrightarrow M) \supset \{[(i)\ (A_i \,\varepsilon\, P_m)] \equiv [(\exists m_i)\ (m_i \,\varepsilon\, M \,.\, A_i \leftrightarrow m_i)]\}$

(loi qui vaudrait pour (1) en changeant P_m en E et A_i en E_i (*resp.* x_i)).

3. $(i)\ [(A_i \leftrightarrow m_i) \supset (m_i \,\varepsilon\, A_i \vee m_i \,\varepsilon'\, A_i)]$.

La répartition des A_i est aussi une répartition des m_i; ceux-là sont des ensembles comme les E_i, ceux-ci des éléments comme les a_{ij}; mais, à la différence des a_{ij}, ils ne sont pas éléments de P_m, mais de l'ensemble équivalent M. Bref, dans les deux premiers arguments, la correspondance E(*resp.* X)$\leftrightarrow N$ sert à répartir les termes des E_i (resp. des x_i) en deux classes disjointes et N cesse de jouer un rôle, tandis que dans le dernier argument la correspondance $P_m \leftrightarrow M$ sert à répartir les éléments de M et non ceux de P_m.

Lorsqu'on passe du premier genre de raisonnement au théorème de Cantor, les caractères mutuellement exclusifs présents dans le premier s'effacent. C'est que, dans le second, la relation d'appartenance, le tiers exclu et la correspondance biunivoque qui introduit les «couples diagonaux» les déterminent automatiquement, ce qui n'est pas le cas pour le premier genre [11bis].

4°) Parmi les a_{ij}, on sélectionne ceux pour lesquels les deux indices sont égaux (les éléments diagonaux). Ensuite on leur applique une transformation f telle que

4. $(i)\ \{[b_i = f(a_{ii})] \supset [(a_{ii} \,\varepsilon\, m \supset b_i \,\varepsilon\, w) \vee (a_{ii} \,\varepsilon\, w \supset b_i \,\varepsilon\, m)]\}$.

Pour le troisième argument, on sélectionne non pas les éléments des $A_i \,\varepsilon\, P_m$, mais ceux de $M \leftrightarrow P_m$ qui sont par la relation de correspondance placés dans la classe des éléments m_i qui n'appartiennent pas à leur ensemble correspondant en P_m. La fonction de transformation appliquée à ces éléments choisis est la fonction identité.

5°) On forme la suite E_0 (*resp.* x_0) des b_i ou l'ensemble L des m_i tels que $m_i \,\varepsilon'\, A_i$. L'analogie et la différence entre les deux types d'ar-

[11bis] Dans ce cas, dit Russell, «on peut suggérer toute autre loi, à condition qu'elle assure que les E's de notre série sont tous différents» — ce qui revient à changer la répartition des a_{ij} en m ou w, ou, du point de vue des caractères, à changer ceux-ci.

guments apparaît alors, si l'on formule leurs conclusions respectives:

5. $[(i)\ (b_i \neq a_{ii})] \,.\, E_0 = \ (b_i)_{i\,\varepsilon\,N} \,.\, E_0\, \varepsilon\, E \,.\, E \sim N,$

6. $L = \hat{m}_i(m_i\, \varepsilon'\, A_i) \,.\, L\, \varepsilon\, \mathscr{P}(M) \,.\, L\, \varepsilon'\, P_m \sim M.$

Dans la formule 6 fait défaut le correspondant du premier terme de 5: ce premier terme de 5 résulte de la fonction de transformation f décrite en 4, tandis qu'on a noté que, pour 6, cette fonction serait la fonction-identité, ce qui donnerait un terme correspondant tautologique. La démonstration, en 5 ,est une réduction à l'absurde, mais cette réduction a lieu par la construction d'un contre-exemple. De la supposition que $R \sim N$, on conclut:

$$[(\exists\, E_0)\ (E_0\, \varepsilon\, R \,.\, E_0\, \varepsilon' E)] \,.\, E \sim N,$$

contrairement à la supposition. Au contraire, l'argumentation du théorème de Cantor est une double réduction à l'absurde. On suppose d'abord que $\mathscr{P}(M) \sim M$. De cette première hypothèse, on conclut qu'il existe un L, ensemble des m_i tel que $m_i\, \varepsilon'\, A_i$. Alors, L devra être compris dans la correspondance biunivoque entre M et $P_m\, \varepsilon\, \mathscr{P}(M)$ et il devra exister en M un m correspondant à L. Cette conséquence de l'hypothèse à infirmer est alors examinée à son tour et elle donne lieu à des cas mutuellement exclusifs — selon que le m, correspondant de L, figure ou non en L. Chacun de ces cas est alors pris comme seconde hypothèse à infirmer: chacun d'eux conduit en effet à une contradiction eu égard à la distribution de tous les termes de M en $m_j\, \varepsilon\, A_j$ et $m_i\, \varepsilon'\, A_i$.

On est donc fondé à affirmer que ces arguments illustrent un même procédé méthodique. Le premier et le second d'entre eux n'en sont que la forme simplifiée, le troisième, la forme générale.

C'est ce que Russell a clairement aperçu en décrivant, en dehors de tout contexte numérique, la méthode utilisée par Cantor dans la seconde démonstration qu'il a donnée de l'impossibilité du plus grand cardinal (12).

Le premier exposé que Russell donne de cette preuve se résume ainsi. — Soit u une classe quelconque et K la classe des relations R telles que

6. $(x)\ [x\, \varepsilon\, u \equiv (xR0 \vee xR1).$

(12) Russell rejette la première preuve (*Mannigfaltigkeitslehre*, p. 44) *in Principles*, XLIII, § 345, pp. 363-364; la seconde preuve de Cantor a paru dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, I, 1892, p. 77 (Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre»).

On veut démontrer que:

7. $\overline{K} > \bar{u}$.

On prouvera d'abord que:

8. $\sim (\overline{K} < \bar{u})$.

Car:

9. $(x) \{x \varepsilon u \supset (\exists R) [R \varepsilon K . ((y) (y \varepsilon u . y \neq x \supset yR0 . xR1)\}$.

Les relations R qui figurent en *9* forment, pour les différentes valeurs de x, une classe ayant une corrélation biunivoque avec les termes de u et contenue dans la classe K. Donc 8 est vérifiée .
Soit donc une classe S de relations, contenue dans K et semblable à u:

10. $S \subset K . S \sim u$.

Toute relation de S peut être appelée R_x, où $x \varepsilon u$, l'indice x indiquant la corrélation avec x.

11. $(R) [R \varepsilon S \equiv (\exists x) (x \varepsilon u . R_x = R)]$.

Définissons alors la relation R' par les conditions suivantes:

12. $[(x) [(x \varepsilon u . xR_x O) \supset xR'1]] . [(y) [(y \varepsilon u . yR_y 1) \supset yR'O]]$.

On voit, sur 12, que:

13. $R' \varepsilon K . [(x) (x \varepsilon u \supset R' \neq R_x)]$.

Donc 7 est vérifiée [13].

On aperçoit ici la première forme de l'argument: K correspond à R, u à N, S à E et R' à E_0. La condition 12 exprime clairement le procédé «diagonal». Toutefois l'image intuitive de la diagonale a disparu en même temps que la sélection des b_i définis comme $f(a_{ii})$. Cette traduction russellienne est donc intermédiaire entre les deux premières et la troisième forme de l'argument. Mais, ajoute l'auteur des ***Principles***, cette forme que nous avons qualifiée d'intermédiaire peut être simplifiée et cette simplification — entendue ici au sens d'une abstraction portant sur les conditions particulières du raisonnement — ne se distingue plus de la troisième forme de l'argument.
«Soit une relation quelconque R qui a les deux propriétés:

[13] *Principles*, XLIII, § 346, pp. 365-366.

1) que son domaine, que nous appelons p, est égal à son domaine converse (14).
2) que deux termes quelconques du domaine n'ont jamais exactement le même ensemble de relatés. Alors au moyen de R, n'importe quel terme de p est mis en correspondance avec une classe contenue dans p, à savoir la classe des relatés dont ledit terme est le référent; et cette corrélation est biunivoque. Nous avons à montrer qu'au moins une classe contenue dans p est omise dans cette corrélation. La classe omise est la classe w qui est composée de tous les termes du domaine qui n'ont pas la relation R à eux-mêmes, c'est-à-dire la classe w qui est le domaine du produit logique de R et de la diversité. Car, si y est un terme quelconque du domaine et donc du domaine converse, y appartient à w s'il n'appartient pas à la classe correspondant à y et n'appartient pas à w dans le cas contraire. Donc w n'est pas la même classe que le corrélat de y, et ceci s'applique à quelque terme y que nous choisissions. Donc la classe w est nécessairement omise dans la corrélation» (15).

On peut d'ailleurs légitimer algébriquement l'usage du mot «diagonal» appliqué au théorème de Cantor. Étant donné $m \varepsilon M$ et $A \varepsilon P_m$,

1°) la correspondance biunivoque $M \leftrightarrow P_m$ est assurée par la propriété:

$$A_{xB} = B \text{ et } x_{Am} = m;$$

2°) l'appartenance à A est un prédicat de m;

3°) l'application du tiers-exclu assure que $m \varepsilon A \vee m \varepsilon' A$, en sorte qu'il y a bipartition du produit des ensembles $M \times P_m$ en couples du graphe de ε ou de ε'. On aura le tableau suivant, où l'on introduit entre les couples les signes de l'appartenance:

$$\begin{aligned} M \times P_m = \{1, 2, 3\} \times \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}\} = \\ \{(1\ \varepsilon'\ \{2, 3\}),\ (1\ \varepsilon\ \{1, 2, 3\},\ (1\ \varepsilon'\ \{2\}) \\ \searrow \qquad\qquad\qquad \\ (2\ \varepsilon\ \{2, 3\}),\ (2\ \varepsilon\ \{1, 2, 3\}),\ (2\ \varepsilon\ \{2\}) \\ \searrow \qquad \\ (3\ \varepsilon\ \{2, 3\}),\ (3\ \varepsilon\ \{1, 2, 3\}),\ (3\ \varepsilon'\ \{2\}). \end{aligned}$$

La correspondance univoque permet une identification entre les éléments de M et ceux de P_m, par laquelle les couples (m_i, A_i) qui

(14) C'est-à-dire le domaine de la relation converse (*Principles*, IX, § 96, p. 98).
(15) *Principles*, XLIII, § 347, p. 366.

vérifient la relation de correspondance $m_i \leftrightarrow A_i$ deviennent diagonaux. La diagonale n'est autre que le graphe de cette correspondance. La trace de la bipartition dans la diagonale est une bipartition de celle-ci, qui se projette sur M, et donne les deux classes I et II. L'une de ces classes prise comme une (L) ne peut entrer dans un des couples de la diagonale. Par là l'analogie est entièrement établie avec les raisonnements du premier genre, où l'on trouve en effet un $E_i \,\varepsilon\, R$ en dehors de la «diagonale des a_{ij}».

§ 6. *Méthode diagonale et antinomie.*

Revenons à la formulation de l'antinomie en général.

L'analogie entre la forme (A) de cette antinomie et le raisonnement «diagonal» apparaît si l'on écrit ce dernier de la façon suivante:

$$(\mathrm{A_c}) \quad (A)\ \{[(x)\ (x\,\varepsilon\, A \supset x\,\varepsilon'\, A_x)] \supset (x_{\mathrm{A}}\,\varepsilon'\, A)\} \supset$$
$$\{[(\exists L)\ (y)\ (y\,\varepsilon'\, A_y \equiv y\,\varepsilon\, L)] \supset [(\exists L)\ (y_L\,\varepsilon'\, L\,.\,y_L\,\varepsilon\, L)]\}.$$

(Pour éviter de surchanger les notations, on conviendra que les variables de classes, A et L, désignent des classes appartenant à P_m. Ainsi, on devra lire «(A)»: «pour tout A appartenant à P_m»; et, de même, «$(\exists L)$»: «il existe un L, tel que $L\,\varepsilon\, P_m$», ce qui revient à poser l'hypothèse à infirmer. D'autre part, dans la conclusion de la première ligne, «$x_A\,\varepsilon'\, A$» abrège «$x_A\,\varepsilon'\, Ax_A$», puisque $Ax_A = A$, étant donnée la biunivocité de la correspondance entre M et P_m).

Or, si la définition de L qui figure dans la prémisse de la seconde ligne correspond bien au moment (δ2) de la démonstration de 1903, les stipulations, caractéristiques de cette démonstration et concernant des inclusions de classes, ne figurent pas dans cette expression.

Au contraire, on passe aisément de la forme (A) de l'antinomie à ($\mathrm{A_c}$) par les opérations suivantes: on substitue A à u, L à w et l'on pose:

$$\begin{cases} \varphi x = x\,\varepsilon'\, A_x\,, \\ f`A = x_A\,. \end{cases}$$

(On notera que l'identification des deux propositions $\varphi f`u$ et $f`u\,\varepsilon'\, u$ résulte, dans ces conditions, de ce que $A_{x_A} = A$).

Bien plus, le procédé d'identification que légitime la correspondance entre M et P_m permet de comprendre comment on peut simplifier la forme ($\mathrm{A_c}$) elle-même et en obtenir une forme ($\mathrm{B_c}$), de même qu'on passe de la matrice générale (A) à la matrice simplifiée de l'antinomie (B). En effet, l'identification permettra d'écrire x pour A_x et A pour x_A dans la formule (A_c), qui deviendra donc:

$$(B_c) \quad (A) \{[(x)(x \varepsilon A \supset x \varepsilon' x)] \supset [A \varepsilon' A]\} \supset \{[(\exists L)(y)(y \varepsilon' y \equiv y \varepsilon L)] \supset [(\exists L)(L \varepsilon' L . L \varepsilon L)]\}.$$

Il existe donc un rapport étroit entre la méthode «diagonale» et l'antinomie. Celle-là utilise la transformation R' de la relation R entre les éléments d'un ensemble M et deux classes exclusives m et w pour construire un ensemble de puissance supérieure. Celle-ci définit une classe par l'absence d'une relation que les termes de cette classe ont avec eux-mêmes. Dans le premier cas, un mode de raisonnement, semble-t-il, correct, conduit à poser l'existence d'une inclusion propre en vertu de la contradiction impliquée dans l'hypothèse contraire. Dans le second cas, toute hypothèse sur l'ensemble w est contradictoire avec elle-même.

L'analogie ainsi établie prouve que ou bien nous excluons les preuves cantoriennes de l'édifice mathématique, ou bien, si nous les recevons, nous devons trouver le moyen d'écarter la contradiction de cet édifice. Elle permet donc de rejeter la position de certains mathématiciens — tel Schoenflies ([16]) — accusant les philosophes et les logiciens d'avoir introduit les antinomies dans les mathématiques et dans le cantorisme, et n'apercevant aucune parenté entre les raisonnements de cette science et ceux qui expliquent le renouveau de ces antinomies. Ainsi, c'est non seulement un *résultat* mathématique propre à la théorie des ensembles, c'est une *forme de preuve* que la contradiction met en question.

D'ailleurs, comme le note Russell, dès la supposition faite en (β), qui, elle, contient une stipulation concernant des inclusions de classes, l'argument donne lieu à des conclusions mathématiquement ruineuses.

«Nous pouvons observer également que, en vertu de ce que nous avons prouvé en (β), la classe des concepts-classificatoires qui ne peuvent pas être prédiqués d'eux-mêmes, que nous appellerons *w*, contient comme membres d'elle-même toutes ses sous-classes, bien qu'il soit aisé de prouver que toute classe a plus de sous-classes que de termes» ([17]).

([16]) A. Schoenflies, «Ueber die Stellung der Definition in Axiomatik», *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 20 Bd, 1911, pp. 222-255, p. 244, p. 253-255.

En effet, par (β3):

$$[\sim(\exists x)\,(x\,\varepsilon\,u\,.\,x\,\varepsilon\,x)] \supset [(y)\;(y \subset u \supset y\,\varepsilon'\,y)]$$

signifie que la classe *u*, qui est telle que par exemple, tous ses éléments sont ceux qui ne figurent pas dans l'ensemble correspondant, ne peut posséder que des sous-classes qui soient assujetties à la même condition; aucun élément appartenant à *u* n'échappant à cette règle, il en résulte que tous les sous-ensembles de *u* appartiennent à *u*, ce qui, précisément, contredit la démonstration de la Théorie des ensembles sur laquelle Russell avait calqué sa propre démonstration.

«De même, si *y* est un terme quelconque de *w* et *w'* le tout de *w* excepté *y*, alors *w'*, étant une sous-classe de *w*, n'est pas un *w'* mais est un *w* et donc est *y*. Ainsi tout concept-classificatoire qui est un terme de *w* a tous les autres termes de *w* comme son extension. Il s'ensuit que le concept *bicyclette* est une cuiller à thé et que *cuiller à thé* est une bicyclette. C'est là une absurdité évidente et on peut prouver un nombre quelconque d'absurdités semblables» ([18]).

Cette contradiction générale se tire également de (β).

§ 7. *Formulation de la contradiction en d'autres termes.*

On peut étendre à d'autres catégories grammaticales la contradiction dérivée de la considération des prédicats.

1°) La première de ces catégories est celle des concepts-classificatoires qui ne se distinguent des prédicats que dans la mesure où la considération de leur extension devient explicite:

«Un concept-classificatoire peut être ou peut ne pas être un terme de sa propre extension. «Concept-classificatoire qui n'est pas un terme de sa propre extension» apparaît être un concept classificatoire. Mais s'il est un terme de sa propre extension, il est un concept classificatoire qui n'est pas un terme de sa propre extension et *vice-versa*» ([19]).

2°) La seconde de ces catégories est celle de classe, dérivée de celle de concept-classificatoire. Elle donne lieu à une antinomie «encore plus extraordinaire» que les précédentes. Une classe comme une peut être un terme d'elle-même en tant qu'elle est plusieurs. Ainsi la classe de toutes les classes est une classe; la classe de tous les termes qui

([17]) *Principles*, X, § 100, p. 102.
([18]) *Principles*, X, § 100, p. 102.
([19]) *Principles*, X, § 101, p. 102; *On some Difficulties*, p. 33.

ne sont pas des hommes n'est pas un homme, et ainsi de suite. Toutes les classes qui possèdent cette propriété forment-elles une classe ? Dans ce cas, est-elle, en tant qu'une, membre d'elle-même en tant que plusieurs ou non ? Si oui, elle est alors une des classes qui, en tant qu'unes, ne sont pas membres d'elles-mêmes en tant que plusieurs, et *vice-versa*» ([20]).

Dans la conception russellienne de 1903, ces trois premières catégories relèvent toutes du premier principe de la formation des classes, celui qui se réfère au jugement de prédication et qu'on peut nommer principe de la formation adjective de ces entités. Or il existe une second principe ou principe de la formation verbale des classes, qui se réfère au jugement de relation. La contradiction s'applique également aux catégories subsumées sous ce second principe: les relations et les fonctions propositionnelles.

3°) Appliqué directement aux relations, le raisonnement ne produit pas immédiatement une contradiction: «Soit R une relation et considérons la classe w des termes qui n'ont pas la relation R à eux-mêmes. Alors il est impossible qu'il puisse y avoir un terme a auquel tous ces termes et aucun autre aient la relation R. Car, s'il y avait un tel terme, la fonction propositionnelle «x n'a pas la relation R à x» serait équivalente à «x a la relation R à a» ([21]).

Le raisonnement revient à poser:

1. $(x)\ (x \,\varepsilon\, w \equiv {\sim} xRx)$,

2. $(x)\ ({\sim} xRx \equiv xRa)$.

Mais 2 est impossible car ou bien

3. $a \,\varepsilon\, w$. Par 1, ${\sim} aRa$, mais, par 2: ${\sim} aRa \equiv aRa$,
ou bien

4. $a \,\varepsilon'\, w$. Par. 1, aRa, mais, par 2: $aRa \equiv {\sim} aRa$.

Ici, la contradiction n'a pas lieu, puisque la réduction à l'absurde oblige à lever l'hypothèse 2, qui correspond à l'axiome (δ 2).

On obtient la contradiction «en substituant a partout où se trouve x, ce qui est légitime, puisque l'équivalence est formelle» ([22]), substitu-

([20]) *Principles*, X, § 101, p. 102.

([21]) *Principles*, X, § 102, p. 102.

([22]) *Principles*, X, § 102, p. 102. Le même mécanisme s'applique au rapport des prédicats et des relations: *Principles*, IX, § 96, p. 97: «... Certains prédicats peuvent être prédiqués d'eux-mêmes. Considérons à présent ceux pour lesquels ce n'est pas le cas. Ce sont les référents (et aussi les relatés) où tion qui n'a de sens que si l'on admet l'existence du terme a. C'est bien ce que prouve la réflexion par laquelle Russell signale qu'on passe de l'antinomie des relations à l'antinomie des prédicats, en remplaçant «R» par «ε». Cette substitution fournit alors, à la place de 1, la prémisse:

1′ $(x)\,(x\,\varepsilon\,u \supset x\,\varepsilon'\,x)$.

Mais l'antinomie des prédicats ne se distingue pas, au point de vue formel, de l'antinomie des classes telle qu'elle apparaît sous la forme simplifiée (B): l'axiome

$$(\exists w)\,(x)\,(x\,\varepsilon'\,x \equiv x\,\varepsilon\,w)$$

introduit bien la contradiction dans la seconde ligne de l'argument. Il suffira alors, conformément à la suggestion de Russell, de substituer dans la forme (B) le signe de la relation $\sim R$ partout où figure le signe ε' pour obtenir l'antinomie des relations:

$$(\mathrm{B_R})\quad (u)\,\{[x)\,(x\,\varepsilon\,u \supset \sim xRx)] \supset (\sim uRu)\} \supset$$
$$\{[\exists w)\,(y)\,(\sim yRy \equiv y\,\varepsilon\,w) \supset [(\exists w)\,(\sim wRw\,.\,wRw)\}.$$

4°) On pourrait chercher la raison pour laquelle le raisonnement produit une contradiction dans le fait que lorsque, dans 3°, on affirme l'existence de a, cela revient ou bien à admettre l'axiome, selon lequel toute fonction propositionnelle ne contenant qu'une variable équivaut à affirmer l'existence de la classe posée et définie par la fonction propositionnelle, ou bien à obéir au principe selon lequel toute classe, reçue comme multiple, peut aussi être prise comme une, comme un terme ([23]). Mais si l'on abandonne l'axiome, la difficulté réapparaît lorsqu'on se demande quelles fonctions propositionnelles définissent des classes qui sont aussi bien «unes» que multiples et

apparaît comme une relation complexe, à savoir la combinaison de la non-prédicabilité avec l'identité. Mais il n'y a pas de prédicat qui s'attache à eux tous à l'exclusion d'autres termes. Car ce prédicat sera ou prédicable ou imprédicable de soi-même. S'il est prédicable de soi-même, il est un des référents en relation auxquels il a été défini et, par conséquent, en vertu de leur définition, il n'est pas prédicable de lui-même. Inversement, s'il n'est pas prédicable de lui-même, alors à nouveau il est l'un des dits référents, il est prédicable d'eux tous (par hypothèse) et donc à nouveau il est prédicable de lui-même. C'est une contradiction qui montre que tous les référents considérés n'ont pas de prédicat commun exclusif et donc que, si les prédicats définissants sont essentiels aux classes, ils ne forment pas une classe».

([23]) *Principles*, X, § 102, pp. 102-103.

quelles sont celles qui ne possèdent pas cet avantage. En d'autres termes, la résolution d'amender le principe fait surgir la contradiction dans le rapport des fonctions propositionnelles à leurs termes. «Toute méthode par laquelle nous essayons d'établir une corrélation biunivoque ou simplement univoque de tous les termes et de toutes les fonctions propositionnelles doit omettre au moins une fonction propositionnelle. Une telle méthode existerait si toutes les fonctions propositionnelles pouvaient être exprimées sous la forme ... $\varepsilon\, u$, puisque cette forme fait correspondre u à ... $\varepsilon\, u$. Mais on prouve l'impossibilité d'une telle corrélation de la façon suivante. Soit φ_x, une fonction propositionnelle correspondant à x; alors, si la correspondance couvre tous les termes, la négation de $\varphi_x(x)$ sera une fonction propositionnelle, puisqu'elle est une proposition pour toutes les valeurs de x. Mais elle ne peut pas être incluse dans la corrélation; car si elle correspondait à a, $\varphi_a(x)$ équivaudrait, pour toutes les valeurs de x, à la négation de $\varphi_x(x)$; mais cette équivalence est impossible pour toutes les valeurs de a, puisqu'elle a pour résultat l'équivalence de $\varphi_a(a)$ avec sa propre négation. Par conséquent, il y a plus de fonctions propositionelles que de termes — résultat qui paraît évidemment impossible, bien que la preuve en soit tout aussi convaincante que n'importe quelle preuve mathématique» [24].

5°) La raison de la contradiction ne peut pas être l'ambiguïté du signe «ε», puisqu'elle en recouvre tous les sens. La trouvera-t-on dans le rapport des fonctions propositionnelles aux classes ? Mais ce rapport reproduit la même antinomie. En effet, étant donné l'axiome qui permet de passer de la fonction propositionnelle à l'extension qu'elle détermine, on peut écrire l'équivalence:

$$y\, \varepsilon\, \hat{x}\, (\varphi x) \equiv \varphi y,$$

et si, dans cette équivalence, on substitue $\alpha\, \varepsilon'\, \alpha$ à φx, on obtient:

$$\beta \equiv \hat{\alpha}\, (\alpha\, \varepsilon'\, \alpha).$$

Il suffira alors de substituer «β» à «y» et «$x\, \varepsilon'\, x$» à «φx» dans la première équivalence pour avoir [25]:

$$\beta\, \varepsilon\, \hat{\alpha}\, (\alpha\, \varepsilon'\, \alpha) \equiv \beta\, \varepsilon'\, \beta,$$

et par la seconde équivalence:

$$\beta\, \varepsilon\, \beta \equiv \beta\, \varepsilon'\, \beta\, .$$

(24) *Principles*, X, § 102, p. 103.

(25) A. N. Prior, *Formal Logic*, 2e éd., Oxford, Clarendon Press, 1962, p. 263.

§ 8.- *Extension de la contradiction aux propositions elles-mêmes; Reconstitution du «Menteur».*

«Dans ce cas, faisons correspondre à chaque classe de propositions la proposition qui est leur produit logique; par ce moyen il semble que nous ayons une relation biunivoque de toutes les classes de propositions à quelques propositions. Mais en appliquant l'argument de Cantor, nous trouvons que nous avons omis la classe x des propositions qui sont des produits logiques ,mais ne sont pas membres des classes de propositions dont elles sont les produits logiques. Cette classe, conformément à la définition de notre corrélation, devrait correspondre à son propre produit logique, mais en examinant ce produit logique, nous trouvons qu'il est et qu'en même temps il n'est pas membre de la classe dont il est le produit logique» ([26]).

Cet argument peut être aussi présenté sous la forme suivante: «Si m est une classe de propositions, la proposition «tout m est vrai» peut être ou ne pas être elle-même un m. Mais il y a une relation biunivoque de cette proposition à m; si n est différent de m, «tout n est vrai» n'est pas la même proposition que «tout m est vrai». Considérons maintenant la classe totale des propositions de la forme «tout m est vrai» et ayant la propriété de ne pas être membres de leur m respectif. Appelons w cette classe et soit p la proposition «tout est vrai». Si p est un w, il doit posséder la propriété définissante de w; et donc est un w. Ainsi la contradiction apparaît inévitable» ([27]).

1°) Puisqu'il existe une correspondance biunivoque entre les classes de proposition m et les propositions de la forme «tout m est vrai», si toute variable désigne un élément de l'une ou l'autre espèce selon qu'elle figurera à gauche ou à droite d'un signe relationnel autre que «=», on peut écrire:

«tout m est vrai» $= p_m \leftrightarrow m,$

la propriété $p_{m_q} = q$ et $q_{p_m} = m$ rendant compte de l'univocité ([28]).

2°) L'appartenance à m est un prédicat de p_m, puisque p_m est une proposition et que m est une classe de propositions.

3°) En vertu du principe du tiers-exclu, on a:

$(m)\ (p_m \,\varepsilon\, m \vee p_m \,\varepsilon'\, m)\ .$

([26]) *Principles,* XLIII, § 349, pp. 367-368; voir aussi *Ibid.*, Appendice B, p. 527.

([27]) *Principles,* Appendice B, p. 527.

([28]) Comparer avec la situation identique pour $M \leftrightarrow P_m$ (p. 18). En effet, comme la correspondance est biunivoque, on a $p_{m_q} \leftrightarrow m_q$ et $q \rightarrow m_q$; d'où l'identité $p_{m_q} = q$. Réciproquement: $q_{p_m} \leftrightarrow p_m$ et $p_m \leftrightarrow m$; d'où $q_{p_m} = m$.

Posons l'axiome-définition:

1. $\vdash (x) \{[\exists q_x)(x \leftrightarrow q_x . x \,\varepsilon'\, q_x)] \equiv (x \,\varepsilon\, w)\}$

à condition d'admettre, de façon correspondante à (δ 2)

2. $\vdash (\exists w)(x) \{[\exists q_x)(x \leftrightarrow q_x . x \,\varepsilon'\, q_x)] \equiv (x \,\varepsilon\, w)\}$,

le principe d'extension assurant l'unicité. Russell conclut que si, par définition,

3. $\vdash p = p_w$

(c'est-à-dire $\vdash p \leftrightarrow w$),
alors, en vertu de 1, par substitution de p_w à x et puisque $q_{p_w} = w$

4. $\vdash (p \leftrightarrow w . p \,\varepsilon'\, w) \equiv p \,\varepsilon\, w$,

d'où, par 3,

5. $\vdash p \,\varepsilon'\, w \equiv p \,\varepsilon\, w$.

On peut, d'autre part, puisque les conditions 1°) - 3°) sont définies pour le théorème de Cantor ([30]), reconstruire une argumentation analogue à celle de la forme (A) et y faire clairement apparaître la méthode diagonale. Il suffira, pour retrouver (A) de poser:

$$\begin{cases} \varphi_x = (\exists q_x)(x \leftrightarrow q_x . x \,\varepsilon'\, q_x), \\ f'_k = p_k . \end{cases}$$

La prémisse majeure de (A) ainsi interprété donnera ([31]):

1' $\vdash (u) \{[(x)(x \,\varepsilon\, u \supset (\exists q_x)(x \leftrightarrow q_x . x \,\varepsilon'\, q_x)] \supset [p_u \,\varepsilon'\, u]\}$.

([29]) En effet, par 3 et 4:

$\vdash (p = p_w . p \,\varepsilon'\, w) \equiv p \varepsilon w$

équivalente au produit des deux implications:

$[(P . Q) \supset R] \equiv [P \supset (Q \supset R)]$

et

$[(R \supset (P . Q)] \equiv [(R \supset P) . (R \supset Q)]$

Par conséquent:

$\vdash (p = p_w) \supset (p \,\varepsilon' w \supset p \varepsilon w)$

et par 3 et le *Modus Ponens*

$\vdash p \,\varepsilon'\, w . \supset p \varepsilon w.$

D'autre part:

$\vdash (p \varepsilon w \supset p = p_w) . (p \varepsilon w \supset p \,\varepsilon'\, w)$,

mais, puisque $(P . Q) \supset Q$ et par le *Modus ponens*

$\vdash p \varepsilon w \supset p \,\varepsilon'\, w.$

([30]) Voir plus haut, p. 67.

([31]) Le conséquent de cette prémisse donne: $[(\exists q_{p_u})(p_u \leftrightarrow q_{p_u} . \; p_u \,\varepsilon'\, q_{p_u})]$.

On aura:

2′ $\vdash w$ satisfait $1'$.

3′ $\vdash p_w \,\varepsilon\, w$.

4′ $\vdash p_w$ satisfait à 1′, par définition de w.

5′ $\vdash p_w \,\varepsilon\, w$.

La forme complète de l'argument est bien:

$$(\mathrm{A_p}) \quad (u) \{[(x) (x \,\varepsilon\, u \supset (\exists q_x) (x \leftrightarrow q_x \,.\, x \;\; \varepsilon' \, q_x)] \supset [p_u \,\varepsilon'\, u]\} \supset \{[(\exists w) (y) ([\exists q_y) (y \leftrightarrow q_y \,.\, y \,\varepsilon'\, q_y)] \equiv y \,\varepsilon\, w)] \supset . [(\exists w) (p_w \,\varepsilon'\, w \,.\, p_w \,\varepsilon\, w)]\} .$$

Si l'on compare cet argument au Théorème de Cantor, on constate les analogies suivantes: à M correspond la classe des propositions, à P_m la classe des propositions de la forme $<$ tout m est vrai $>$, à $L(\varepsilon' P_m)\, w$, à $x_A\, p_u$.

Enfin, on pourra passer de la forme $(\mathrm{A_p})$ à la forme $(\mathrm{B_p})$ par identification, de même qu'on a pu passer de la forme $(\mathrm{A_c})$ à la forme $(\mathrm{B_c})$ ([32]). Cette identification de p_m à m donne une formule qui ne se distingue pas de (B).

On notera que le Menteur ne figure pas dans les contradictions relevées par Russell dans les *Principles*. Mais on peut le construire aisément sur le modèle du raisonnement précédent.

L'antinomie procède de la considération de la «proposition»:

$q = < q$ est faux $>$

et de la substitution de q à x dans la matrice:

$$\vdash < x \text{ est faux} > \text{est vrai} \equiv x \text{ est faux.}$$

On retrouvera la forme (A) de l'antinomie par les conventions:

$$\begin{cases} \varphi x = < x \,\varepsilon\, F > \varepsilon' F \\ f^{c}_{F} = q \,, \end{cases}$$

«F» désignant la classe du faux. Dans le raisonnement disparaîtront les quantificateurs portant sur les classes, puisque le domaine des classes qui y intervient n'en comporte qu'une. On obtient l'expression ([33]):

$(p_u \,\varepsilon'\, u)$. Mais en vertu de l'univocité $(q_{p_u} = u)$ et de 3 ($p_u \leftrightarrow u$ signifie $p = p_u$) la simplification obtenue a lieu. On fera la même remarque pour l'écriture du conséquent dans la deuxième ligne.

([32]) Voir plus haut, p. 69.

([33]) Les expressions $\varphi f^c F$ et $\sim \varphi f^c F$ donnent en effet respectivement: φq et $\sim \varphi q$, c'est-à-dire: $< q \varepsilon f > \varepsilon' f$ et $< q \varepsilon f > \varepsilon f$. Mais, par définition: $\langle q \,\varepsilon'\, f \rangle = q$.

$$(A_M)\quad \{[(x)\,(x\,\varepsilon\,F \supset \langle x\,\varepsilon\,F\rangle\,\varepsilon'\,F)] \supset [q\,\varepsilon'\,F]\} \supset$$
$$\{[(x)\,(\langle x\,\varepsilon\,F\rangle\,\varepsilon'\,F \equiv x\,\varepsilon\,F)] \supset [q\,\varepsilon'\,F\,.\,q\,\varepsilon\,F]\}\,.$$

Le caractère diagonal de l'argument apparaît en ce que:

1°) il y a une correspondance biunivoque entre le domaine des classes F et la classe $\{q\}$ des propositions;

2°) l'appartenance à F est un prédicat de q;

3°) en vertu du tiers-exclu, on a

$$q\,\varepsilon\,F \vee q\,\varepsilon'\,F\,.$$

Si l'on fait le produit $\{q\} \times F$, ce produit consiste en un seul couple (q, F): ce couple est la «diagonale» et ne peut lui appartenir. C'est là le cas extrême de la méthode, sous sa forme la plus simple.

§ 9. *Retour à l'argumentation de 1903.*

Les traductions que nous avons données du théorème de Cantor (forme (A_c) et forme (B_c)), du paradoxe sur les propositions (forme (A_p) et forme (B_p) et du Menteur lui-même (forme (A_M))) évoquent la doctrine russellienne de 1905 et, en ce sens ,on est fondé à dire qu'elle est déjà contenue *in nuce* dans les *Principles.*

Mais la formule (C) de 1903 est irréductible aux formes précédentes et elle contient des stipulations concernant des inclusions de classes, qui ont disparu dans les énoncés ultérieurs et dont il faut rendre compte.

Si l'on reprend la formule (A_c) et qu'on y veuille exprimer, de façon explicite, que 1°) les x sont des M; 2°) les A et les L sont des éléments de P_m; 3°) que P_m est une famille des parties de M, ce qu'expriment les inclusions $A \subset M$ et $L \subset M$, on aura à effectuer, dans (A_c), les cinq substitutions suivantes:

1. $(x)\;([x\,\varepsilon\,M\,.\,x\,\varepsilon\,A] \supset x\,\varepsilon'\,A_x)\;/\;(x)\;(x\,\varepsilon\,A \supset x\,\varepsilon'\,A_x)$
2. $(x)\;(x\,\varepsilon\,M \supset [x\,\varepsilon'\,A_x \equiv x\,\varepsilon\,L])\;/\;(x)\;(x\,\varepsilon'\,A_x \equiv x\,\varepsilon\,L)$
3. $(A)\;(\{[A\,\varepsilon\,P_m\,.\,A \subset M\,.\,(x)\,(\ldots)] \supset [x_A\,\varepsilon'\,A]\}\;/\;(A)\;\{[(x)\,(\ldots)] \supset$ $\supset [x_A\,\varepsilon'\,A]\}$
4. $(\exists L)\;\{L\,\varepsilon\,P_m\,.\,L \subset M\,.\,(x)\,(\ldots)\}\;/\;(\exists L)\;[(x)\,(\ldots)$
5. $(\exists L)\;(L\,\varepsilon\,P_m\,.\,L \subset M\,.\,x_L\,\varepsilon'\,L\,.\,x_L\,\varepsilon\,L)\;/\;(\exists L)\;(x_L\,\varepsilon'\,L\,.\,x_L\,\varepsilon\,L)$.

Donc. $\varphi f^c F$ et $\sim\varphi f^c F$ sont: $q\,\varepsilon'\,F$ et $q \varepsilon F$, seules expressions figurant dans les deux conséquents de (A_M).

Deux simplifications s'introduisent. D'abord, 3. rend 1. inutile, puisque la condition $x \varepsilon M$ est impliquée par la condition $x \varepsilon A$. Ensuite à 2. et 4. on peut substituer la substitution unique:

6. $(\exists L)\ (L \varepsilon P_m \,.\, (x)\ ([x \varepsilon' A_x \,.\, x \varepsilon M] \equiv x \varepsilon L)\} \,/\, (\exists L)\ (x)\ (x \varepsilon A_x \equiv x \varepsilon L)$,

qui leur est logiquement équivalente.

Posons alors, en vertu de 6.

$$\varphi x = x \varepsilon' A_x . x \varepsilon M \,,$$

ce qui impose les substitutions:

7. $x \varepsilon' A_x \,.\, x \varepsilon M / x \varepsilon' A_x$ dans l'antécédent de la prémisse majeure,

8. $x_A \varepsilon' A \,.\, x_A \varepsilon M / x_A \varepsilon A$ dans le conséquent de la prémisse majeure.

9. $x_L \varepsilon' L \,.\, x_L \varepsilon M / x_L \varepsilon L$ dans le conséquent de la mineure,

où 3. rend 7. inutile.

On obtient ainsi la formule (C_c):

$$(C_c) \quad (A)\ \{[A \varepsilon P_m \,.\, A \subset M \,.\, (x)\ (x \varepsilon A \supset x \varepsilon' A_x)] \supset [x_A \varepsilon' A \,.\, x_A \varepsilon M]\} \supset \{[(\exists L)\ \{L \varepsilon P_m \,.\, (y)\ ([y \varepsilon' A_y \,.\, y \varepsilon M] \equiv y \varepsilon L)\}] \supset [(\exists L)\ (L \varepsilon P_m \,.\, L \subset M . y_L \varepsilon' L . y_L \varepsilon M . y_L \varepsilon L] \,.$$

Par identification de P_m avec M, la formule devient:

$$(\Gamma_c) \quad (A)\ \{A \varepsilon M \,.\, A \subset M \,.\, (x)\ (x \varepsilon A \supset x \varepsilon' x)] \supset [A \varepsilon' A \,.\, A \varepsilon M]\} \supset \{[(\exists L)\ \{L \varepsilon M \,.\, (y)\ ([y \varepsilon' y \,.\, y \varepsilon M] \equiv y \varepsilon L)\}] \supset [(\exists L)\ (L \varepsilon M \,.\, L \subset M \,.\, L \varepsilon' L \,.\, L \varepsilon L)].$$

Supprimons alors, pour simplifier ce raisonnement, l'hypothèse d'appartenance à M sur A et sur L, puisque (Γ_c) a simplement pour conséquence de rejeter l'hypothèse $L \varepsilon M$. Il vient alors:

$$(\Gamma'_c) \quad (A)\ \{A \subset M \,.\, (x)\ (x \varepsilon A \supset x \varepsilon' x) \supset [A \varepsilon' A)\} \supset \{[(\exists L)\ (y)\ (y \varepsilon' y \,.\, y \varepsilon M \equiv y \varepsilon L)] \supset [(\exists L)\ (L \subset M \,.\, L \varepsilon' L\, L \varepsilon L)].$$

Une telle expression a toujours pour conséquence, mais implicitement cette fois, de rejeter l'hypothèse $L \varepsilon M$; on a en effet: $\vdash L \varepsilon' L$ (correspondant à (γ3), mais en vertu de (γ1) on a alors: $\vdash L \varepsilon L$ et donc $L \varepsilon' M$ (correspondant à (γ5)).

Sous cette forme, il est possible d'apercevoir l'origine «ensembliste» de l'antinomie de 1903, telle qu'elle s'exprime en (C). Dans la formule C, la prémisse majeure correspond à (γ1), (α1), (γ3) et (γ5). De même, pour (Γ'_c), on aura un moment équivalent à (β'_3), à la forme logique près. Dans (Γ'_c), un moment correspondant à $(\gamma 3)$ apparaît, mais il n'est pas accompagné par un moment $(\gamma' 5)$: en effet, l'hypothèse $L \varepsilon M$ est précisément l'hypothèse que l'ensemble de l'argument aura pour effet d'invalider. Le conséquent de (C) est constitué par l'implication: $(\delta 2) \supset (\delta 4)$. A $(\delta 2)$ correspond en (Γ'_c) $(\gamma' 1)$ sous une forme existentielle, et à $(\delta 4)$ un moment $(\gamma' 6)$ qui conduit à affirmer $(\gamma' 5)$.

Pour parvenir du raisonnement de Cantor, tel que l'exprime (Γ'_c) à la forme (C) de l'antinomie, il suffit de forcer L à être tel que $\vdash L \varepsilon M$. C'est ce qu'on obtient en prenant pour M la classe universelle V. Tel est le moment (δ) qui n'a naturellement pas d'analogue dans aucune des formes du théorème de Cantor.

§ 10. *Conclusion.*

1°) La formule (C) de l'antinomie, en 1903, a pour origine le traitement (Γ'_c) du théorème de Cantor. La formule (C) se distingue de la formule (B) par l'inclusion $u' \subset u$ et la substitution de u' à u dans l'antécédent. On trouve, en (Γ'_c), les mêmes caractéristiques lorsqu'on la compare à (B_c). On explique, de la sorte, la survivance, dans la forme (C) de l'inclusion inutile $w' \subset w$ dans le conséquent mineur (moment $(\gamma 5\ d)$; cette survivance est le souvenir de $L \subset M$ dans la conclusion de (Γ'_c).

2°) Le passage de la forme (Γ'_c) du théorème de Cantor à la forme (C) de l'antinomie est obtenu par un double procédé. D'une part, l'identification de M et de P_m, grâce à laquelle on a pu passer de la forme (C_c) aux formes (Γ_c) et (Γ'_c) a effacé la trace de l'ancienne correspondance biunivoque entre M et P_m. De l'autre, l'introduction de $\vdash L \varepsilon M$, due à l'hypothèse selon laquelle M est la classe universelle, rétablit une correspondance biunivoque nouvelle.

3°) On pourrait, en reprenant le schéma général de la méthode diagonale, montrer la genèse de l'antinomie. On formera d'abord le produit $M \times M$ de la classe universelle par elle-même. Dans la diagonale de ce produit figurent tous les couples formés par la correspondance d'une classe avec elle-même. D'autre part, en vertu du tiers-exclu, chacun des couples du produit est tel que le premier de ses termes est ou n'est pas élément du second. La trace de la bipartition de la diagonale est une bipartition de celle-ci, qui se projette, à son tour, sur M. Mais, tandis que, dans le raisonnement de Cantor, l'une des classes (prises comme une) qui résultent de cette bipartition ne pouvait figurer dans un couple de la diagonale, le raisonnement de Russell, en vertu de l'hypothèse faite sur l'universalité de M, a pour conséquence nécessaire que l'ensemble w entre dans les couples de la diagonale, où, par ailleurs, il ne peut pas figurer par l'effet de la méthode diagonale elle-même.

4°) Russell élimine, dans ses exposés de 1905, les stipulations «ensemblistes» superflues de 1903. Mais cette élimination n'a nullement pour effet d'effacer ou d'affaiblir les liens étroitis de l'antinomie avec la méthode diagonale. La forme (A_c) du théorème de Cantor a encore paru le modèle de la forme (A) de l'antinomie. Ces formes ne se distinguent des précédentes que par le caractère implicite des hypothèses respectives faites sur A et L ($\varepsilon\, P_m$) et sur u, w ($\varepsilon\, M$, M étant entendue comme classe universelle).

5°) Bien plus, il est probable que l'idée de solution alternative à l'antinomie, selon qu'on nie le caractère prédicatif de φ ou l'existence de $f'w$, a pour origine cette forme (A_c) du théorème de Cantor. En effet, commentant, à propos du paradoxe de Burali-Forti, l'équivalent de la formule (A), Russell écrit: «S'il y a une classe telle que w et une entité telle que $f'w$, alors, puisque tout membre de w satisfait φ, $f'w$ satisfait φ; mais, inversement, $f'w$ doit ne pas être membre de w et doit donc ne pas avoir la propriété φ, puisque w consiste dans tous les termes ayant la propriété φ. Dans le cas particulier des ordinaux, nos deux alternatives sont: 1) les ordinaux ne forment pas une classe; 2) bien qu'ils forment une classe, ils n'ont pas de nombre ordinal» ([34]). Or, sur le paradoxe de Russell lui-même, ces deux alternatives se confondent précisément puisque le foncteur f' est le foncteur unité. Au contraire, sur le théorème de Cantor, φx est la fonction propositionnelle $x\, \varepsilon'\, Ax$ et $f'A$ est le terme x_A. En d'autres termes, la fonction φ institue le graphe de l'appartenance tandis que f' détermine les couples d'une correspondance biunivoque. En 1905, cette distinction suggère à Russell qu'on peut résoudre le paradoxe de Burali-Forti, soit en niant la classe w de tous les ordinaux, soit en convenant qu'à w ne corresponde aucun type défini.

6°) Le passage de (A) à (B) est calqué sur le modèle du passage de (A_c) à (B_c). Il résulte du procédé d'identification qu'on a décrit.

7°) Enfin, cette même méthode diagonale inspire l'antinomie de Russell tirée de la considération naïve des prédicats. On la retrouve dans les substituts de cette antinomie à laquelle donne lieu la considération des concepts-classificatoires, des classes, des relations, des fonctions propositionnelles. Elle peut enfin être étendue aux propositions-mêmes et, à la condition d'introduire dans la langue les catégories sémantiques du vrai et du faux, elle produit comme cas dégénéré et comme idéal, le paradoxe du Menteur.

([34]) Russell, *On some difficulties...*, p. 34.

ADDENDUM

I

Nous n'avons pas formalisé les hypothèses en vertu desquelles Russell spécifie que les variables portent sur des «concepts-classificatoires» (*class-concepts*). Voici pourquoi.

Dans les *Principles* (1), Russell distingue deux genèses différentes de la notion de classe. La première a pour principe l'adjectif, la seconde le verbe. Pour chacune cinq moments essentiels conduisent à la notion complète et substantive des classes.

Le premier de ces moments est constitué, respectivement pour ces deux genèses, par le prédicat (*humain*) (2) et la fonction propositionnelle (*tel que-*) (3). Un exemple de fonction propositionnelle est fourni par une implication: ($\varphi a = Pa \supset Qa$), dans laquelle le même sujet est argument de deux prédicats (*«Socrate est un homme» implique que «Socrate est mortel»*). La différence entre les deux cas résulte de ce que le prédicat a des instances (4) et non la fonction propositionnelle. En conséquence on peut analyser «Socrate est humain» en un sujet et un prédicat; tandis que, lorsqu'une telle analyse est appliquée à une fonction propositionnelle, elle dénature celle-ci (que *Socrate* soit le même sujet dans P et Q fait qu'on ne peut séparer φ de a, comme on peut séparer *Socrate* de *est humain*) (5).

Il semble que Russell donne donc aux mots *adjectif* et *verbe* un sens très particulier, dont l'usage constant dans les *Principles* lui permet de dériver du premier la théorie des jugements de prédication, où sujet et prédicat sont séparables, et du second la théorie des jugements de relation, où la relation, du moment qu'elle possède un sens (6) déterminé, est inséparable des arguments. Plus précisément, c'est *l'identification des variables* — fondamentale pour la production des antinomies — qui caractérise les relations au sens strict ou fonctions propositionnelles, tandis que cette identification n'a pas lieu dans la prédication, même si des analogies formelles voilent cette différence fondamentale. Soient, par exemple les jugements:

(1) Chap. IV, § 48, p. 44.
(2) Chap. IV, § 48, p. 45.
(3) Chap. VII, § 80, p. 82.
(4) Chap. IV, § 55, p. 51-52.
(5) Chap. VII, §§ 81-82, pp. 84-85.
(6) Chap. IX, § 94, p. 95.

(1) Ha (Socrate est homme)

(2) $Ha \supset Ma$ (Socrate est homme implique que Socrate est mortel)

(3) $Ha \supset Mb$ (Socrate est homme implique que le père de Socrate est mortel).

On peut traduire respectivement, sous forme «condensée», les jugements (2) et (3):

(2)′ φa (Socrate a la propriété que s'il est homme il est mortel)

(3)′ $\varphi' a$ (Socrate a la propriété que s'il est homme, le père de Socrate est mortel).

En d'autres termes l'implication (2) est une fonction propositionnelle de a et, linguistiquement, il semble qu'il en aille de même pour l'implication (3).

C'est là une illusion. En effet nous pouvons analyser (3) en deux propositions indépendantes dont l'une est l'antécédent et l'autre le conséquent d'une implication matérielle. Et la légitimité de cette analyse résulte de la différence entre a et b, qui désignent deux individus différents, en sorte que l'implication joue entre les propositions Ha et Mb et non pas, pour ainsi dire, entre les prédicats H et M en tant qu'ils seraient liés par un argument identique. Si nous désignons par la proposition indépendante Mb, nous pouvons écrire (3) sous la forme:

(3)″ $Ha \supset p$,

en sorte qu'il n'existe aucune différence formelle entre (3) et (1), sinon que (3) est une fonction élémentaire de (1) définie au niveau du Calcul propositionnel. Au contraire nous ne pouvons pas analyser (2) et réduire φa à des éléments ultimes qui lui seraient antérieurs. C'est pourquoi φ n'est pas séparable de a, en vertu de l'identité de l'argument de H et de M qu'énonce (2).

Cette différence est fondamentale. Selon les *Principles*, toutes les propositions de la logique et des Mathématiques pures sont des implications formelles et elles enveloppent donc des formes telles que (2). Au contraire, des formes telles que (1) ou (3) — qui sont semblables — n'apparaissent pas dans ces sciences. On s'explique alors l'échec de la Logique aristotélicienne qui reposait sur l'analyse de la prédication et la nécessité d'ajouter, à cet ancien corps de doctrine, pour fonder les Mathématiques, la théorie des relations ou des verbes, dont Russell a, le premier, constitué en corps déductif la Logique (7).

(7) *The Logic of Relations*, traduit et publié par R. C. Marsh, in *Logic and Knowledge*, London, Allen and Unwin, 1956, pp. 1-38; (l'article: *La logique des relations* a paru en 1900-01 dans la *Revue de mathématique*, Turin, vol. VII, pp. 115-48.

Le second moment de la formation des classes précise la différence. Dans la genèse «adjective», le prédicat donne lieu au concept-classificatoire (*homme*), qui ne diffère pas du prédicat sinon en ce qu'il indique que le prédicat, considéré du point de vue de la compréhension, est tel qu'une extension lui correspondra, susceptible de sélectionner les êtres ([8]). Dans la genèse verbale, nous obtenons comme concept-classificatoire correspondant «le x tel que φx» ([9]).

Le troisième moment fournit le concept de classe. En lui-même le concept-classificatoire *homme* ne dénote rien; au contraire le concept de classe *hommes* dénote la classe *tous les hommes* ([10]). De même, pour la genèse verbale, les propositions du type φx constituent un concept de classe qui devient dénotant dès qu'on établit pour quels x ces propositions sont vraies ([11]).

Le quatrième moment fournit la classe entendue comme plurale (*class as many*). Si la classe est engendrée de façon purement extensionnelle, comme il peut arriver pour les classes finies, elle est indépendante du précédent moment et consiste simplement dans la conjonction numérique des termes (*Brown et Jones*) ([12]). Si la classe est infinie, elle doit être donnée par un concept classificatoire. Ce seront, respectivement, *les hommes* et les x tels que φx ([13]). Mais dans le cas de la formation adjective, on peut séparer le prédicat générateur et les sujets arguments, tandis qu'on ne peut isoler généralement φ, en désignant le prédicat correspondant. Dire qu'il y a une classe comme multiple, c'est dire, lorsque la classe est «adjective», que le prédicat était un concept-classificatoire ([14]). Puisque, dans le cas des classes «verbales», on ne peut détacher φ de son argument, il faudra de même, pour qu'on obtienne les x tels que φx, être préalablement assuré que «l'x tel que φx» est bien un concept classificatoire.

Le dernier moment permet de passer de la classe-plurale à la classe-une (*class as one*) ([15]). Ici on forme *humanité* à partir de *hommes*, là le nom verbal (*la différence entre A et B*) à partir du verbe engagé dans l'assertion elle-même (*A diffère de B*) ([16]). La raison d'être de ce

([8]) *Principles*, Chap. II, §§ 21-22, pp. 19-20.
([9]) Chap. VIII, § 84, p. 88.
([10]) Chap. VI, § 67, p. 67.
([11]) Chap. VII, § 84, p. 88.
([12]) Chap. V, §§ 59-60, pp. 56-59.
([13]) Chap. V, § 60, pp. 58-59.
([14]) Chap. V, § 58, p. 56.
([15]) Chap. VI, § 70, pp. 68-69.
([16]) Chap. VI, § 77, pp. 78-79 et chap. VII, § 81, pp. 83-84.

dernier moment est un principe fort général, admis sans contestation par Russell en 1903 (mais qu'il abandonnera en 1905), selon lequel tout terme du discours doit pouvoir devenir sujet d'une proposition ([17]). La classe doit alors pouvoir devenir à son tour argument. Mais c'est ici que se produit l'antinomie dans certains cas, par exemple si $\varphi(x) \equiv x\,\varepsilon'\,x$ et si l'on forme $\varphi(\varphi)$ ([18]).

II

Pouvons-nous, dans ces conditions, définir le concept-classificatoire dans la langue du discours logique ?

On pourrait d'abord penser à une définition du genre

D1 $\quad Cv = (x)\,(x\,\varepsilon\,v \vee x\,\varepsilon'\,v) \quad$ Df

signifiant que v est un concept-classificatoire lorsque, quel que soit x, x appartient à v ou ne lui appartient pas. Mais la Logique de Russell admet comme thèse le principe du tiers-exclu:

$$\vdash (x)\,(v)\,(x\,\varepsilon\,v \vee x\,\varepsilon'\,v)$$

en sorte que D1 perd toute utilité.

Dans le texte, que nous avons formalisé, Russell évoque, au moins implicitement des entités qui ne seraient pas des concepts-classificatoires, bien que les variables qu'il utilise désignent toujours en fait des concepts-classificatoires. Par exemple «non prédicable de soi-même» — formellement: φx pour $x\,\varepsilon'\,x$ — est implicitement regardé comme un concept-classificatoire. Dira-t-on alors qu'un concept est non-classificatoire si rien ne lui appartient et qu'il est classificatoire si quelque chose lui appartient ? Cette définition s'écrirait

D2 $\quad Cv = (\exists x)\,(x\,\varepsilon\,v)\,. \quad$ Df.

et, de même,

D3 $\quad \sim Cv = \sim(\;\;x)\,(x\,\varepsilon\,x) \quad$ Df.

Mais D3 doit être rejeté puisqu'un concept qui détermine la classe

([17]) Chap. IV, § 52, p. 48. Ce principe s'exprime encore sous la forme suivante: Tout mot doit avoir «une signification» (Chap. IV, § 51, p. 47 et *Introduction à la seconde édition,* p. X) ou: «Tout ce qui peut être objet de pensée... est un terme» (*Ibid.*). Ce principe n'est donc autre que celui qui commande la théorie des «considérations» (*Annahnen*) chez Meinong.

([18]) Chap. VII, § 85, p. 88.

nulle est tel que rien ne tombe sous son extension ([19]): un concept-classificatoire nul est, en effet, un concept classificatoire.

On pourrait alors suggérer l'axiome:

$$\vdash (\exists x)\ (x \varepsilon v) \supset Cv$$

qui n'est point une définition mais qui évite l'aporie de D3. Mais 1°) s'il est vrai que lorsque quelque chose tombe sous l'extension de v, v est un concept-classificatoire, cette condition, pour être suffisante, n'est pas nécessaire et elle est donc trop forte étant donné le concept-classificatoire nul; 2°) Cet axiome suggère que ne sont pas des concepts-classificatoires les éléments primitifs individuels (Socrate, Platon) puisque la question de leur extension n'a pas forcément de sens dans un langage logique cohérent. Or, Russell, lui aussi, admet la différence fondamentale entre individus (les «choses» désignées par les noms propres) et concepts (prédicats et relations) ([20]) et lorsqu'il pense aux *concepts* non classificatoires ce n'est évidemment pas des *Urelemente* individuels qu'il s'agit.

Pour donner à l'axiome la forme d'une équivalence propositionnelle et l'amender du défaut signalé, on proposerait alors la définition:

D4 $\quad Cv = [(\exists x)\ (x \varepsilon v)] \vee (v = \emptyset),$

signifiant qu'un concept est classificatoire s'il possède une extension ou s'il est nul. Mais, à son tour D4, si elle échappe à la première objection, tombe sous le coup de la seconde et de plus elle n'est qu'une forme plus faible de D1 ([21]).

Tous ces essais échouent soit qu'il reviennent au tiers-exclu, soit qu'ils interdisent la formation de concepts-classificatoires nuls, et ils échouent parce qu'ils cherchent dans le domaine des individus ces concepts non-classificatoires qui, de toute évidence, ne peuvent, s'ils existent, qu'appartenir au domaine des concepts. Dans le langage de Russell de tels concepts non-classificatoires seraient, dans la genèse

([19]) Chap. III, § 41, p. 38; chap. VI, § 73, p. 74: «Tous les concepts dénotants sont dérivés des concepts-classificatoires; et *a* est un concept-classificatoire quand «*e* est un *a*» est une fonction propositionnelle. Les concepts dénotants associés à *a* ne dénotent rien si et seulement si «*x* est un *a*» est fausse pour toutes les valeurs de *x*. Ceci est une définition complète d'un concept dénotant qui ne dénote rien; et, dans ce cas, nous dirons que *a* est le concept-classificatoire nul et que «tous les *a*'s» est le concept nul de la classe».

([20]) Chap. IV, § 48, p. 44.

([21]) Par la règle des quantificateurs permettant de passer de $\vdash (x)\varphi x$ à $\vdash (\exists x)\varphi x$, $v = \emptyset$ n'étant qu'une autre expression pour $\sim (\exists x)(x \varepsilon v)$.

«adjective», fournis par les prédicats, s'il en est, qui ne fournissent pas de concepts classificatoires, ou, dans la genèse «verbale» par les fonctions propositionnelles «quadratiques» qui ne constituent pas d'authentiques concepts-classificatoires.

III

Dès les *Principles*, Russell remarque qu'un concept «dénotant» est utilisé dans une proposition qui porte non sur le concept, mais sur sa dénotation ([22]). Lorsque nous énonçons la sentence: «J'ai rencontré un homme», la proposition correspondante porte sur un individu (indéterminé) et non sur «homme».

Mais c'est dire que, dans le calcul des prédicats on utilise les concepts-classificatoires, on ne les mentionne pas. L'usage en est donc, dans la langue-objet, nécessairement implicite. La mention explicite qu'on en peut faire n'appartiendra qu'à la langue-syntaxe.

Or cette distinction entre deux langues, bien qu'elle soit parfois esquissée en 1903 à propos des notions de vérité, de règle et d'assertion ([23]), demeure un thème mineur et accessoire de la philosophie de Russell, probablement pour des raisons qui tiennent à sa position critique à l'égard du formalisme ([24]).

On notera que le Calcul propositionnel de 1903 est construit en sorte que des axiomes particuliers ou des stipulations explicites y doivent préciser que les variables qui y figurent sont des variables de sentences ([25]). En conséquence, ce Calcul «restreint» l'usage des varia-

([22]) Chap. V, § 56, p. 54.

([23]) Chap. I, § 1, p. 1; Chap. II, § 18, p. 16; Chap. III, § 38, p. 35.

([24]) Introduction à la seconde édition des *Principles*, pp. V et VI et Chap. II, § 17, p. 15.

([25]) Axiomes:

1°) $\vdash (p \supset q) \supset (p \supset q)$ («quels que soient «p» et «q», «$p \supset q$» est une proposition»)

2°) $\vdash (p \supset q) \supset (p \supset p)$ («tout ce qui implique quelque chose est une proposition»)

3°) $\vdash (p \supset q) \supset (q \supset q)$ («tout ce qui est impliqué par quelque chose est une proposition»).

Exemple de stipulation dans les axiomes proprement dits du Calcul.

$\vdash [(q \supset q) \cdot (r \supset r)] \supset [(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \cdot q) \supset r)]$ (Importation).

(le caractère propositionnel de p est assuré par l'axiome 2°)

(Chap. II, § 18, p. 16).

bles [26]. Ces restrictions qui conduisent à des lourdeurs et à des paradoxes, comme Russell le reconnaîtra en 1906 pour y renoncer [27], proviennent d'un usage abusif du rasoir d'Occam [28] et des incertitudes générales tenant à la distinction de la langue-objet et de la langue-syntaxe.
Or, c'est également en renonçant à l'ancienne doctrine de l'univers du discours et à l'usage des variables restreintes en Logique que Russell parviendra à formuler adéquatement sa théorie des types. D'accord avec Poincaré pour reconnaître que la raison d'être des antinomies est le «cercle vicieux», il s'en sépare et refuse de limiter la variabilité des termes figurant dans les implications. Pour Russell, l'exclusion du cercle vicieux ne peut pas figurer explicitement dans l'énoncé de propositions générales, sous peine de retomber dans le cercle vicieux. La théorie des types permet, précisément, d'éviter de stipuler explicitement des conditions requises pour éviter les antinomies.

Telle sera la solution finale de la difficulté liée, en 1903, à l'énoncé dans la langue-objet du caractère classificatoire des concepts représentés par les variables *u, v,* ... Cette solution permet en même temps d'expliquer pourquoi il était impossible de traduire symboliquement des phrases telles que «*u* est un concept-classificatoire».

Collège de France. Jules VUILLEMIN.

[26] Chap. III, § 41, p. 37.

[27] *The Theory of Implication,* American journal of Mathematics, vol. XXVIII, 1906, p. 162.

[28] *Principles,* chap. II, § 16, p. 15.

[29] *Mathematical Logic as based on the Theory of Types,* in *Logic and Knowledge,* Allen et Unwin, London, 1956, p. 63, pp. 71-72; *Les Paradoxes de la Logique,* Revue de Métaphysique et de Morale, 1906, pp. 643-645.