DIE LOGIK ALS EMPIRISCHE WISSENSCHAFT

GERHARD FREY

«Die Umgangssprache ist ein Teil des menschlichen Organismus und nicht weniger kompliziert als dieser. Es ist menschenunmöglich, die Sprachlogik aus ihr unmittelbar zu entnehmen.» (WITTGENSTEIN, *Tractatus* 4.002).

1. *Klassische und symbolische Logik*

Unter der Vielfalt dessen, was in der Geistesgeschichte und Philosophie des Abendlandes alles als «Logik» bezeichnet wurde, wollen wir hier nur das herausgreifen, was auch allgemeine und reine Logik bezeichnet wird und was etwa Kant als «ein Kanon des Verstandes und der Vernunft» bezeichnet, «aber nur in Ansehung des formalen ihres Gebrauchs, der Inhalt mag sein, welcher er wolle». Sie kann in der hier zur Diskussion stehenden Bedeutung daher auch als «formale Logik» bezeichnet werden.

Die klassische Logik gründet auf der antiken Tradition. Als Kernstück wird dabei im allgemeinen die 1. Analytik des Aristoteles angesehen, die in der Lehre vom Schluß die sogenannten Syllogismen dargestellt hat. Diese Syllogistik wird im allgemeinen als eine Begriffslogik angesehen und als solche wurde sie häufig noch bis zur Jahrhundertwende gelehrt. Im allgemeinen wird die Meinung vertreten, daß diese klassische Logik zumindest seit der Spätantike keine wesentlichen Fortschritte erzielen konnte. Galen habe zwar den drei aristotelischen noch eine 4. Figur hinzugefügt, wodurch das seither gelehrte System von 19 Syllogismen entstanden ist. Zweifellos werden bei dieser vereinfachten Sicht die Leistungen der Scholastik wesentlich unterschätzt. Berücksichtigt werden muß dabei allerdings, daß eben diese logischen Arbeiten der Scholastik in der Zwischenzeit weitestgehend in Vergessenheit geraten sind.

Selbst wenn man aber all dies zugesteht, so bleibt die Leibnizsche Idee einer Erneuerung der Lullischen Kunst in seinem *Calculus ratiocinator* doch ein wirklicher Neubeginn. Um diesen Schritt tun zo können, mußte in der Mathematik erst die Vieta'sche Erfindung der Algebra gemacht werden. Die Idee der *«Mathesis universalis»* des Descartes erstrebt eben eine Anwendung auf alle Bereiche, auch die Philosophie soll ihr unterworfen werden. So kann nicht bestritten werden, daß der Neubeginn in der Logik zu einem wesentlichen Teil von der Mathematik ausgegangen ist. Die neue «symbolische» Logik ist als eine Mathematisierung der Logik anzusprechen. Von diesem historischen Faktum her ist die Bezeichnung als «mathematische» Logik also nicht ganz unzutreffend.

Diese so entwickelte «neue» Logik ist eine Satzlogik. Nicht mehr die Begriffe, sondern Sätze werden als Elementarbestandteile angesehen. Man hat nun rückblickend gesehen, daß auch die klassische Logik nicht ausschließlich Begriffslogik war. Ob aber tatsächlich schon die aristotelische Logik als Satzlogik aufzufassen sei, wie dies weitgehend Łukasiewicz behauptet, mag dahingestellt bleiben. Die Logik des Chrysippos ist aber ziemlich sicher eine Satzlogik gewesen, und daß auch die scholastische Logik nicht eine reine Begriffslogik war, ist wohl heute allgemein anerkannt.

Die Unterscheidung von Begriffs- und Satzlogik erweist sich also wohl gar nicht als so wesentlich. Denn zweifellos kann die ganze Syllogistik als Satz- (oder Urteils)-logik dargestellt werden. Der Versuch von Freytag-Löringhoff zeigt dies deutlich. Nun hat die neue Logik (auch mitunter «Logistik» genannt) behauptet, daß einige Syllogismen nicht gültig seien. Es ist schon oft darauf hingewiesen worden, daß die neue Logik zunächst jedenfalls als eine Umfangslogik entwickelt wurde, die klassische Logik aber immer Umfang und Inhalt der Begriffe berücksichtigt hat. Eine klassen- oder prädikatenlogische Behandlung der Syllogismen dagegen geht nur von den Umfängen aus. Das kommt insbesondere dann zum Ausdruck, wenn es die Dinge, von denen etwas ausgesagt wird, gar nicht gibt. Ist der Schluß gültig:

Alle Geister tragen weisse Gewänder
Einige um Mitternacht erscheinende Wesen sind Geister

Einige um Mitternacht erscheinende Wesen tragen weiße Gewänder.

Stimmt dieser Schluß, wenn es keine Geister gibt? Formal ist der Schluß richtig. Es handelt sich um den als «*Darii*» bezeichneten Syllogimus. Hängt die Gültigkeit desselben von der Existenz ab, d.h. ob die vorkommenden Begriff leer sind oder nicht? Daß die empirische Existenz nicht über die logische Gültigkeit entscheiden kann, scheint sicher zu sein. (Sonst wäre ja die indirekte Widerlegung einer Existenzhypothese, wie es die Naturwissenschaften des öfteren machen, unzulässig.) Wir brauchen uns aber auf diesen Streitpunkt hier gar nicht einzulassen. Denn die neue Logik hat inzwischen gezeigt, daß sie auch die Möglichkeit hat, inhaltslogische Zusammenhänge zu behandeln.

Die Beschränkung auf eine reine Umfangslogik war vielmehr nur aus dem Bestreben hervorgegangen, eine möglichst große Exaktheit zu erlangen. Umfänge eines Begriffes sind im allgemeinen als aufweisbar zu denken, sie scheinen numerisch erfaßt werden zu können. Diese Vorstellung stimmt schon für die allermeisten naturwissenschaftlichen Begriffe nicht. Während man wenigstens prinzipiell sich noch vorstellen kann, was der Umfang des Begriffs «Elefant» bedeutet, kann niemand sagen, was der Umfang von Begriffen wie «Molekül», «Stromstärke», «Energie» oder «Silbernitrat» bedeuten soll. All solche Begriffe sind ausschließlich inhaltlich zu definieren. Ich muß wissen, wie ich die Stromstärke messe, wie ich feststelle, daß der vorliegende Stoff Silbernitrat ist. Eben das aber sind inhaltliche Bestimmungen. Auch die Mathematik kann sich anscheinend nicht ausschließlich auf umfangslogische Definitionen ihrer Begriffe beschränken.

Es mag hier vorläufig die Bemerkung genügen, daß jede axiomatische Definition eines Begriffes schon eine inhaltliche Definition darstellt. Auch die Unterscheidung von Umfangs- und Inhaltslogik hat sich also als nicht so entscheidend herausgestellt, als daß auf ihr der Unterschied von neuer und klassischer Logik ausschließlich begründet werden könnte. Was somit als wesentlicher Unterschied übrig bleibt ist das, was wir zuerst feststellten, die symbolisch-mathematische Form. Durch sie ist es möglich, der Logik die Gestalt eines Kalküls zu geben, mit dem man «rechnen» kann.

2. *Was ist eigentlich Logik ?*

Ist die symbolisch-mathematische Logik im Grunde die gleiche Logik wie die klassische, nur mit einer verbesserten Methode durchgeführt ? Ein Einwand scheint naheliegend und ist auch schon mehrfach vorgebracht worden. Wenn es sich tatsächlich um eine Mathematisierung der Logik handelt, so ist Mathematik vorausgesetzt. Carnap hat bereits im Jahre 30 darauf hingewiesen, daß für die Aufstellung eines symbolisierten Formalsystems immer Mathematik, Mengen- und Gruppentheorie vorausgesetzt werden. Setzt aber nicht jede mathematische System selbst wieder Logik voraus ? Hat also nicht jedes symbolisierte Formalsystem, insbesondere jeder Logikkalkül, Logik schon zur Voraussetzung ?

Dieses Argument scheint so kräflig, daß es nicht ohne weiteres aus der Welt geschafft werden kann. Die Frage ist aber, was denn *die* Logik sei, die für jeden Logikkalkül schon vorausgesetzt werden muß. Es wurde mehrfach behauptet, daß dies eben die klassische Logik sei. Überlegen wir, ob das obige Argument auf die klassische Logik nicht zutrifft ? Auch sie besteht aus Sätzen und Regeln, die auf Grund von Überlegungen und bestimmten Voraussetzungen hergeleitet wurden. Setzt aber ein Lehrsystem von Sätzen und Regeln nicht ebenso bereits Logik voraus ? Sie wird durch Denkprozesse gewonnen und in einer Sprache formuliert. Indem wir denken und unsere Sprache gebrauchen, setzen wir doch auch wieder Logik voraus. Das Argument trifft also gar nicht bloß die Logikkalküle, sondern zweifellos ebenso schwer die klassiche Logik einschließlich der Syllogistik.

Das vorgebrachte Argument hängt aber nun vollständig in der Luft, da vollkommen unklar ist, was eigentlich jene Logik ist, die Voraussetzung der symbolischen ebenso wie der klassischen Logik sein soll. Unserem Denken liegen zweifellos gewisse Formen und Regeln zugrunde, auch wenn dieselben nicht explizit formuliert sind. Auch wer nicht «Logik» gelernt hat, denkt im allgemeinen richtig, kann zumindest richtig denken. Unsere Denkprozesse manifestieren sich in der Sprache. Jenes richtige Denken kommt somit in einem «richtigen» Gebrauch der Sprache zum Ausdruck. Denken und Sprache waren es aber, die uns veranlaßten von einer «Logik» zu sprechen, die vorausgesetzt ist für symbolische und klassische Logik. Wir werden somit jedenfalls sagen können, daß dem «richtigen» Gebrauch der Sprache eine Logik immanent ist. Jede Sprache enthält implizit eine Logik. Und insofern wir in und mit einer Sprache denken, ist diese Logik auch unserem Denken implizit.

Unsere Feststellung enthält immer noch unbestimmte Elemente.

Was «Sprache» ist, kann wohl überhaupt nicht vollständig bestimmt werden. Unsere Umgangssprachen sind lebendig gewachsen und zudem in einem ständigen Umwandlungsprozeß. Sie haben daher eine Vielfältigkeit ähnlich einem Organismus. Aber wir wissen ja alle, was eine Sprache ist. Und so erinnern wir uns an Pascals Forderung «keine Begriffe, die vollkommen bekannt sind, zu definieren». Im übrigen sei angemerkt, daß wir, wenn nicht eigens festgestellt, unter Sprache immer unsere natürlichen Umgangssprachen meinen.

Was ist dann aber der «richtige» Gebrauch einer Sprache? Dieser ist eine Konvention. Man erlernt eine Sprache zunächst in der nationalen und sozialen Gruppe, in der man aufwächst und lebt. Und so kann letztlich nur der Gebrauch der Vielen bestimmen, was «richtig» ist.

Sowohl die symbolisch-mathematische als auch die klassische Logik erheben den Anspruch, die implizit der Sprache enthaltene Logik explizit darzustellen. Kommen wir aber irgendwie aus dem Zirkel heraus: Um die logischen Regeln explizit darzustellen, benötigen wir die Sprache, die implizit eine Logik bereits enthält?

3. *Der formalistische Standpunkt.*

Wenn die Logik mathematisierbar ist, so muß wohl auch für unser Problem einiges aus den Bemühungen um die Begründung der Mathematik zu gewinnen sein. Der Logizismus Freges und Whitehead-Russells führt uns sicher nicht weiter. Denn er stellt ja nur den Versuch dar, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen. Wie steht es aber mit dem Formalismus, dessen Hauptvertreter ja D. Hilbert war? Wir wenden seine Gedanken gleich auf die Logik an.

Der Logikkalkül wird axiomatisch begründet. Das ist jedenfalls möglich für das System aller tautologischen, d.h. immer wahren Formeln. Die Axiome werden vorausgesetzt als solche immer wahren Formeln. Aus ihnen können mittels der Schlußregeln alle anderen tautologischen Theoreme hergeleitet werden. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Axiomensysteme für Logikkalküle aufstellen.

So gibt es verschiedene Axiomensysteme für den vollständigen zweiwertigen Aussagenkalkül etwa von Łukasiewicz und Frege, bzw. Russell und Whitehead. Diese Systeme unterscheiden sich im wesentlichen darin, welche logischen Funktionen sie zugrunde legen. Łukasiewicz hat ein System nur für Implikation und Negation aufgestellt. Russell und Whitehead verwenden nur Disjunktion und Implikation.

Der Aussagenkalkül kann nun dadurch, daß man andere Axiome einführt, verändert werden. Auf solche Weise entsteht z.B. der intuitionistische Aussagenkalkül, der sich vom vollständig zweiwertigen Aussagenkalkul dadurch unterscheidet, daß eine Reihe von Theoremen des letzteren im intuitionistischen Kalkül nicht gelten. Man kann dann von diesem Standpunkt aus sagen, daß der intuitionistische Kalkül ein Teilkalkül des vollständig zweiwertigen ist.

Die axiomatische Begründung hat den zweifellos großen Vorteil, eine eindeutige Bestimmung des Kalküls zu liefern. Sie wird als Darstellungsmethode daher keineswegs vermißt werden können. Sie stellt aber die Kalküle vollkommen gleichwertig nebeneinander. Sie liefert also kein Kriterium, das uns feststellen läßt, ob der vollständig zweiwertige oder der intuitionistische Kalkül «richtig» ist. Kann es aber nicht nur *eine* Logik geben ? Die axiomatisch-formalistische Methode kann uns also wohl keine Lösung liefern.

Dazu kommt, daß jedes axiomatische System aus Axiomen und Regeln bestehen muß. Die Axiome bestehen nur aus Zeichen des Kalküls. Demgegenüber müssen die Regeln Bestandteile einer natürlichen Sprache, einer unserer Umgangssprachen, enthalten. Selbst wenn diese in den Regeln vorkommenden Bestandteile einer natürlichen Sprache auf ein Minimum eingeschränkt werden, bleibt die Tatsache bestehen, daß all unsere natürlichen Umgangssprachen bereits eine Logik implizit enthalten und voraussetzen. Wir kommen wohl kaum um die Verwendung des konjunktiven «und», sowie einer hypothetischen Satzform der Art «wenn, dann» herum. Ob eine solche hypothetische Satzform nun mit den üblicherweise als Implikation oder Subjunktion bezeichneten logischen Funktionen identisch ist oder nicht, ist für uns hier gleichgültig. Uns genügt vielmehr die Feststellung, daß diese umgangssprachlichen Elemente jedenfalls eine Logik, wenn vielleicht auch nur rudimentär, enthalten müssen. Wir kommen also zu der Feststellung: Falls es überhaupt die Logik schlechthin gibt, kann die axiomatische Methode sie nicht liefern. Ja es scheint ausgeschlossen, daß sie überhaupt explizit in axiomatisierter Form darstellbar ist.

4. *Der intuitionistische und der operative Standpunkt*

Beide Standpunkte haben philosophisch gesprochen eine Art transzendentalen Idealismus gemeinsam. Unser Verstand hat gewisse Fähigkeiten. Durch sie sind uns die Formen unseres Denkens vorgegeben. Bezüglich der Arithmetik führte das den Intuitionismus zur Behauptung der Urintuition der Reihe der natürlichen Zahlen. Was die Logik betrifft kann man in diesem Sinne etwa die Fähigkeit des Schließens oder Herleitens zugrunde legen. Auf Grund der Annahme dieser Fähigkeit entwickelt etwa H. A. Schmidt eine derivative Logik, die sehr nahe verwandt ist der intuitionistischen, bzw. zu dieser ergänzt werden kann.

Der operative Standpunkt setzt entsprechend eine Fähigkeit zum schematischen Operieren voraus. Nur auf Grund dieser Fähigheit können wir willkürliche «Kalküle» herstellen, indem wir beliebige Zeichen oder Artefakte und bestimmte «Spielregeln» für sie zugrundelegen. Der «Kalkül» besteht dann aus allen auf Grund der Spielregeln zulässigen Zeichenkombinationen. In diesem Sinne ist auch das Schachspiel ein «Kalkül». Die zulässigen Zeichenkombinationen sind dann alle Stellungen, die bei richtigem Spiel auftreten können.

Lorenzen behauptet nun, daß das sprachliche «wenn, dann», das in den Regeln auftritt, als ein Operationsprozeß aufgefaßt werden dürfe. Er meint, daß man auf diese Weise dem Zirkel entgeht, in den sich die axiomatische Methode verstrickt: Nämlich, daß jedes Axiomensystem bereits Logik voraussetzt. Wenn das Axiomensystem in dem eben beschriebenen Sinne ein «Kalkül» ist, dann setzte es keine Logik voraus, sondern nur die Fähigkeit zum schematischen Operieren. Diese könne man aber nur durch Nachmachen, durch Imitation, erlernen.

Das Begründungsproblem der Logik wird dann folgendermaßen gelöst: In jedem «Kalkül» treten Regeln auf, die alle nur auf dem schematischen Operieren beruhen. Nun kann gefragt werden, ob innerhalb des vorliegenden Kalküls weitere Regeln zulässig sind. Es kann jetzt gefragt werden, welche Regeln insbesondere «allgemeinzulässig» sind, d.h. die zulässig sind für alle Kalküle und die gelten ohne Rücksicht auf eventuelle Besonderheiten des zugrunde liegenden Kalküls. Diese allgemeinzulässigen Regeln bilden einen Metakalkül, der nun als *der* Logikkalkül angesprochen wird. Dieser Logikkalkül erweist sich übrigens als identisch mit dem intuitionistischen Aussagenkalkül. Die Logik wird hier also aufgefaßt als das System aller Regeln, die für jeden beliebigen operativ bestimmten Kalkül gelten.

Die Einwände, die gegen die axiomatische Begründung der Logik vorgebracht wurden, scheinen beseitigt. Die Herleitung und Begründung der Logik ist hier eine apriorische. D. h. aber doch, daß sehr allgemeine Voraussetzungen und Definitionen zugrunde gelegt wurden und auf ein allgemeines Vermögen unseres Verstandes angewendet werden. Logik wird also gewissermaßen definiert als das System der Regeln alles schematischen Operierens.

Es besteht kein Zweifel darüber, daß alles Sprechen — im allgemeinsten Sinne genommen, nicht nur akustisch gemeint — operative Elemente enthält. Gibt es aber für unsere Sprache und für unser Denken nur diese eine apriorische Voraussetzung ? Die Begründung der vollständigen zweiwertigen Aussagenlogik beruht auf der apriorischen Voraussetzung, daß alle Sätze entweder wahr oder falsch sind. Lorenzen konnte zeigen, daß unter etwas abgewandelten operativen Voraussetzungen auch die vollständig zweiwertige Aussagenlogik herleitbar ist. Eine endgültige Entscheidung, welcher Logikkalkül als *die* Logik anzusprechen sei, ist wohl auch durch den Operativismus noch nicht gebracht.

5. *Die Reichweite apriorischer Begründung der Logik.*

Intuitionismus und Operativismus liefern eine apriorische Begründung der Logik. Aber auch die semantische Begründung der Logik durch Frege ist apriorisch. Es scheint naheliegend, diese verschiedenen apriorischen Begründungsversuche dadurch zu deuten, daß ihnen jeweils eine andere Ontologie zugrunde liegt. Die semantische Begründung Freges, die zur vollständig zweiwertigen Aussagenlogik führt, beruht, wie schon gesagt, auf der Voraussetzung, daß jeder Satz entweder wahr oder falsch sein muß. Es ist jene Ontologie, die Wittgenstein, in nun schon klassisch gewordener Weise, der Logik in seinem *Tractatus logico-philosophicus* zugrunde gelegt hat. «Die Welt ist alles, was der Fall ist.» Die Gesamtheit aller Sätze bildet diese Welt ab. Alle wahren Sätze bringen zum Ausdruck, was der Fall ist, welche Sachverhalte bestehen, alle falschen Sätze, was nicht der Fall ist, welche Sachverhalte nicht bestehen. Die Welt ist die Gesamtheit an sich bestehender Sachverhalte. Die gleiche Ontologie legt H. Scholz seiner Logik zugrunde, wie besonders sein Versuch, eine Metaphysik darauf aufzubauen, zeigt. Diese Auffassung ist nur dann konsequent, wenn man annimmt, daß alle Sätze «Sätze an sich» im Sinne von Bolzano sind. Ein solcher Satz-an-sich ist wahr oder falsch unabhängig davon, ob ihn jemand jemals denkt oder ausspricht. Es ist unbewiesen und wohl auch unbeweisbar, ob es solche Sätze an sich gibt, ja ob es überhaupt sinnvoll ist, diesen Begriff zu bilden.

Aus dieser Ontologie folgt, daß jeder Satz an sich wahr oder falsch sein muß, unabhängig davon, ob ich es weiß oder nicht, ob ich mich vielleicht geirrt habe. Daß ein Satz unentscheidbar ist, bedeutet dann immer nur, daß er für mich unentscheidbar ist, daß ich subjektiv nicht weiß, ob er wahr oder falsch ist. Jeder Satz, der einen Sachverhalt darstellt, müßte dann an sich wahr oder falsch sein, auch wenn ich es nicht weiß.

Demgegenüber kann einer Logik eine Ontologie zugrunde gelegt werden, die bloß und ausschließlich von den Beziehungen des erkennenden Subjektes ausgeht. Wenn man nur das anerkennt, was auf Grund einer Folgerungsrelation herleitbar, beweisbar ist, erhält man die intuitionistische Logik. Die hier zugrunde gelegte Ontologie fragt also nicht nach dem An-sich-Sein der Sachverhalte, sondern nur inwiefern diese Sachverhalte für uns als erkennende Wesen Gültigkeit haben.

Während die Ontologie des An-sich-Seins ganz eindeutig eine Logik definiert, gilt dies für eine Ontologie der Beziehungen des erkennenden Subjektes nicht in gleichem Maße. Die so gewonnene Logik hängt wesentlich von der Folgerungsbeziehung ab, die zugrunde gelegt wird. Der Operativismus reduziert die Folgerungsbeziehung auf das schematische Operieren. Es ist aber keineswegs gesichert, daß nicht eine andere Folgerungsbeziehung einen anderen Logikkalkül bestimmt.

Es ist darüber hinaus nicht auszuschließen, daß andere Voraussetzungen, insbesondere wenn eine andere Ontologie zugrunde gelegt wird, eine andere apriorische Begründung der Logik liefert. Als Beispiel sei der Versuch von G. Günther erwähnt. Während die klassische Logik nach ihm auf der ontologischen Voraussetzung des Gegensatzes Subjekt-Objekt beruht, soll seine neue nicht-aristotelische Logik auf einer ontologischen Basis aufgebaut werden, die etwa derjenigen des spekulativen Idealismus entspricht. G. Günthers nicht-aristotelische Logik steht daher der Hegel'schen Logik nahe. An die Stelle des ontologischen Dualismus Subjekt-Objekt wird ein ontologischer Trialismus Subjekt-Objekt-Prozeß gesetzt. Auf dieser ontologischen Basis wird nun eine dreiwertige Logik aufgebaut.

Der Versuch ist philosophisch ähnlich zu bewerten, wie Scholz' «*Metaphysik als strenge Wissenschaft*». In beiden Fällen wird der Logik eine Ontologie zugrunde gelegt. Bei Scholz geschieht dies allerdings nicht explizit. In beiden Fällen ist es dann möglich, die logischen Formeln wieder ontologisch zu interpretieren. Die Ontologie, die man vorne hineingesteckt hat, kommt hinten wieder heraus, wenn man richtig gerechnet hat.

Jede apriorische Begründung einer Logik setzt eine bestimmte Ontologie voraus. Wir könnten daher nur dann von *der* Logik schlechthin sprechen, wenn wir unter den vielen möglichen Ontologien diejenige auszeichnen könnten, die wirklich die ontische Struktur wiedergibt, die uns wirklich sagt, wie die Struktur des An-sich-Seiende ist. Seit Kant wissen wir aber, daß die Frage nach dem An-sich-Seienden nicht, oder doch zumindest nicht eindeutig beantwortbar ist. Alle ontologischen Entwürfe des Menschen können nur als Versuche aufgefaßt werden, die an sich unerfahrbare ontische Struktur des Seienden und des Seins anzunähern.

Wenn die Frage nach der an sich seienden Seinsstruktur nicht endgültig beantwortbar ist, so gibt es auch kein Kriterium, nach dem wir unter den verschiedenen apriorischen Begründungsversuchen der Logik den allein richtigen auswählen können.

Die subjektivistische Begründung der Logik, wie sie Intuitionismus und Operativismus versuchen, vermeidet manche Schwierigkeiten, insofern sie ausschließlich vom erkennenden Subjekt ausgeht. Es wird aber durch einen subjektivistisch erkenntnistheoretischen Standpunkt der objektiv ontologische Einwand, den schon N. Hartmann allgemein formulierte, nicht aufgehoben. Wenn ich erkennen will, muß etwas da sein, was erkannt werden kann und ein Erkennender. Und muß dessen Seinsstruktur nicht der Seinsstruktur des Erkenntnisprozesses gewissermaßen vorausgehen? Müßte also nicht doch eine objektiv fundierte Logik einer subjektiv fundierten vorausgehen?

Die historische Entwicklung scheint diesen Überlegungen recht zu geben. Die klassische Logik ist objektiv begründet. Eine subjektiv begründete Logik wie die intuitionistische konnte erst nach ihr, die erste einschränkend, entstehen, wie ja auch in der Geschichte der Philosophie der subjektivistische Standpunkt nach dem objektivistischen erst möglich war.

Indem jede apriorische Begründung der Logik ontologische Voraussetzungen macht, ist die Reichweite jedes solchen Begründungsversuches schon abgesteckt. Wegen der Unmöglichkeit jedes endgültigen ontologischen Entwurfes ist auch eine endgültige apriorische Begründung der Logik unmöglich. Es handelt sich um Entwürfe, um die letzten Endes nie endgültig und explizit darstellbare Logik anzunähern.

6. *Die natürlichen Sprachen und die Logik*

Wir bezeichnen als natürliche Sprachen unsere Umgangssprachen. Diese können zur Darstellung spezieller Erfahrungen erweitert werden zu speziellen Wissenschaftssprachen. Wir wollen auch diese Erweiterungen unserer Umgangssprachen noch als natürliche Sprachen bezeichnen. Jene Erweiterungen sind in dem Sinne aufzufassen, in dem Wittgenstein sagt: «Unsere Sprache kann man ansehen als eine alte Stadt: Ein Gewinkel von Gäßchen und Plätzen, alten und neuen Häusern und Häusern mit Zubauten aus verschiedenen Zeiten; und dies umgeben von einer Menge neuerer Vororte mit geraden und regelmäßigen Straßen und mit einförmigen Häusern». Dieses Gleichnis veranschaulicht die Vielgestaltigkeit und Uneinheitlichkeit unserer Umgangssprachen. Die genauere Reichweite dieses Begriffes wird sich später heraustellen.

Der klassische, vollständig zweiwertige Logikkalkül hat gerade im Vergleich mit den natürlichen Sprachen Unstimmigkeiten gezeigt, die man z.T. geradezu als Paradoxa bezeichnet hat. Am meisten Schwierigkeiten hat die sogenannte materiale Implikation gemacht. Die größten Schwierigkeiten treten auf, wenn die materiale Implikation mit der Disjunktion verbunden auftritt. Z.B. ist der Ausdruck $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ eine Tautologie, d.h. er ist für alle Sätze, die man für p und q einsetzen kann, immer wahr. Die umgangssprachliche Deutung der Implikation durch «wenn ... so ...» läßt Sätze folgender Art als wahr zu: «Wenn die Sonne scheint, ist $2 \times 2 = 4$, oder wenn die Sonne scheint, so ist nicht $2 \times 2 = 4$». Entsprechend ist der Satz $(p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ eine Tautologie. Interpretieren wir das Vorderglied $p \rightarrow q \vee r$ durch: «Daraus, daß das Gemälde die festgestellten Stilmerkmale aufweist, folgt, daß es dem 2. oder 3. Jahrzehnt des 11. Jahrhunderts entstammt.» Das Hinterglied $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ hat dann die Form «Daraus, daß das Gemälde die festgestellten Stilmerkmale aufweist, folgt entweder, daß es dem 2. Jahrzehnt des 11. Jahrhunderts entstammt, oder aus demselben folgt, daß es dem 3. Jahrzehnt des 11. Jahrhunderts entstammt.» In der umgangssprachlich üblichen Bedeutung des «folgerns» etwa im Sinne von «kann erschlossen werden» impliziert das Vorderglied nicht das Hinterglied.

Sowohl in der vollständigen zweiwertigen, als auch in der intuitionistischen Aussagenlogik gelten die sogenannten Quodlibet-Formen, die mitunter auch als Paradoxien der Implikation bezeichnet werden. «*Verum ex quodlibet.*»: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ und «*ex falso quodlibet*»: $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$. Sollen Sätze wie: «Wenn es heute regnet, so gilt, wenn ich heute ein gutes Mittagessen habe, so regnet es»; oder «Wenn heute nicht der 1. April ist, so gilt, wenn heute der 1. April ist, so ist eine Kuh ein Esel», gelten? Nicht umsonst wurden diese Sätze als Paradoxa der Implikation bezeichnet und waren übrigens als solche bereits der scholastischen Logik bekannt. Entspricht eine Implikation, für die diese Quodlibet-Formen gelten, der umgangssprachlichen Bedeutung, ganz gleich, ob wir sie durch «wenn ... so

...» oder «folgt» oder «kann erschlossen werden» interpretieren? Für die Kalküle der strikten Aussagenlogik gelten diese paradoxen Formen nicht. Ist also eine strikte Aussagenlogik in dieser Hinsicht doch noch besser an die Umgangssprache angepaßt als die intuitionistische Logik?

Hier könnte man etwa die Frage aufwerfen, ob etwa der «Minimalkalkül» von I. Johansson eine Mittelstellung in Bezug auf jene Angepaßtheid an die Umgangssprache einnimmt. In ihm ist zumindest die eine der beiden Quodlibet-Formen nicht gültig. Es ist der Haupt unterscheid zum normalen von A. Heyting entwickelten intuitionistischen Kalkül, daß die zweite dieser Formen, *ex falso quodlibet*, ausgeschaltet wird.

Blicken wir zurück auf die betrachteten apriorischen Begründungsversuche der Logik. Weder die apriorische Begründung der vollständig zweiwertigen (alternären) Logik, noch die intuitionistische oder operative Begründung führten zu einer Logik, die allen umgangssprachlichen Interpretationen gerecht wird. Denn auch die operative Begründung führt nur zum intuitionistischen oder zum alternären Kalkül.

Welches Kriterium haben wir also für die Gültigkeit der Logik schlechthin? Apriorisch begründbar sind verschiedene Kalküle, die aber alle nicht dem umgangssprachlichen Gebrauch entsprechen. In der apriorischen Begründung an sich kann also das gesuchte Kriterium nicht liegen.

Die Umgangssprachen sind Gegebenheiten und ihre implizite Logik ist so vielseitig und kompliziert, daß wir sie anscheinend nicht explizit darstellen können. Nachdem wir anscheinend kein eindeutiges Kriterium für die Logik schlechthin haben, können wir wohl unter «Logik» im allgemeinen Sinne jene den Umgangssprachen implizite Logik ansprechen.

Den Vertretern einer apriorischen Begründung der Logik sei entgegengehalten, daß sie nur in einer apodiktischen Weise einen bestimmten Begriff der Logik definieren und als *die* Logik postulieren. In diesem Sinne definiert z. B. Freytag-Löringhoff Logik als das, was sich ausschließlich mit Identität und Diversität der Begriffe befaßt. Lorenzen definiert die Logik durch das schematische Operieren. Wir sind uns zunächst darüber im klaren, daß auch die Bestimmung der Logik als den Umgangssprachen implizit, eine Definition eines Logikbegriffes ist.

Für diesen von uns so postulierten Logikbegriff wird aber nun die Logik zu einer empirischen Wissenschaft. Die Logikkalküle werden zu Modellen für jene den Umgangssprachen implizite Logik. Die Logikkalküle verhalten sich dann etwa so zu den Umgangssprachen, wie die naturwissenschaftlichen Theorien zu der erfahrbaren Wirklichkeit. Die Theorien ebenso wie die Logikkalküle geben dann jeweils unter bestimmten Bedingungen ein Bild, ein Modell der jeweiligen Wirklichkeit, im ersten Falle der Naturwirklichkeit, im zweiten der Sprachwirklichkeit.

Dieser unser Logikbegriff kann uns niemals *die* Logik schlechtin liefern. Wir werden vielmehr damit rechnen müssen, daß verschiedene Umgangssprachen verschiedene Logikmodelle erfordern. So scheint eine Erweiterung unserer Umgangssprache, die Sprache der modernen Physik, ein ganz anderes, möglicherweise mehrwertiges logisches Modell zu erfordern. Die Logik scheint damit radikal relativiert. Wir sind damit aber auch der Peinlichkeit jedes apriorischen Begründungsversuches enthoben: daß man unter anderen Voraussetzungen etwas anderes erhält. Warum gerade diese Voraussetzungen und nicht andere ?

7. *Das Widerspruchsprinzip*

Gegen diese Auffassung kann wieder der schwerwiegende Einwand erhoben werden: Setzt nicht jeder Logikkalkül bereits Logik voraus ? Das kann nicht bestritten werden. Bloß diese Logik braucht deshalb noch nicht explizit bekannt zu sein. Kein Logikkalkül kann vollständig aus sich selbst begründet werden. Wir brauchen immer eine Umgangssprache, eine natürliche Sprache, durch die ein Logikkalkül erst konstituierbar ist. Der Kalkül ist eine Objektsprache, zu der wir immer eine Metasprache brauchen, in der wir über den Kalkül sprechen können. Wir brauchen für jeden Kalkül Regeln, die nicht in der Objektsprache des Kalküls selbst formulierbar sind. Aber auch die Bezeichnungen ebenso wie die Feststellung, wann ein Satz «wahr», «falsch», «beweisbar», «unbeweisbar» sei, können nicht in der Objektsprache selbst gemacht werden. Wir brauchen für alle diese Formulierungen eine Metasprache. Jeder Kalkül ist eingebettet in eine Metasprache. Man könnte sich zwar denken, daß die Metasprache selbst wieder ein Kalkül ist, dann gilt dasselbe für diese kalkülisierte Metasprache. Auch für sie muß es wieder eine Metasprache geben, die reicher an Ausdrucksmitteln ist, als die Objektsprache. Es ist aber nicht anders denkbar, als daß entweder bereits die erste Metasprache eine natürliche Umgangssprache ist, oder eine der höheren Metasprachen ist eine solche natürliche Sprache. Jeder Kalkül ist somit letzten Endes eingebettet in eine natürliche Umgangssprache.

Wir können also keinen Kalkül aufbauen, ohne nicht eine natürliche Sprache zugrunde zu legen. Diese enthält aber bereits implizit eine Logik. Damit hat sich aber die scheinbare Schwierigkeit zwanglos aufgelöst. Die natürliche Sprache, die zum Aufbau des Kalküls erforderlich ist, enthält implizit die notwendig vorauszusetzende Logik. Was sich als unmöglich erweist, ist, die Logik, die zum Aufbau eines Kalküls erforderlich ist, explizit anzugeben.

Unsere Umgangssprache ist reicher an Ausdrucksmitteln als sämtliche möglichen Kalküle, was in der eben ausgesprochenen Tatsache zum Ausdruck kommt, daß jeder Kalkül in eine natürliche Umgangssprache eingebettet sein muß. Das ist aber wieder nur eine andere Formulierung unserer Grundthese. Die der Umgangssprache implizite Logik kann niemals in einem einzelnen Kalkül zum Ausdruck kommen. Der Kalkül kann nur eine Annäherung, ein Modell jener impliziten Logik darstellen.

Natürlich kann die Meinung vertreten werden, daß ein bestimmter apriorisch gewonnener Kalkül «die» Logik darstelle. Diese so gewonnene Logik kann dann allen anderen Kalkülen zugrunde gelegt werden. Es besteht aber kein grundsätzlicher Einwand auch einen anderen auf andere Weise apriorisch zu gewinnenden Kalkül zugrunde zu legen. Allen derartigen Versuchen gegenüber kann der Einwand erhoben werden, daß jeder solche als grundlegend postulierte Kalkül speziell ist und nicht die ganze der natürlichen Sprache implizite Logik enthält. Das kommt insbesondere in den Versuchen einer logischen Begründung der mathematischen Kalküle zum Ausdruck. Die Rückführung der Mathematik auf einen bestimmten Logikkalkül, wie das z. B. Whitehead und Russell, aber auch bereits Frege wollten, ist nicht durchführbar. Es kann gar keinen Logikkalkül geben, auf dem alle Mathematik aufgebaut werden kann. Denn alle mathematischen Kalküle basieren wie jeder Kalkül überhaupt auf jener den natürlichen Sprachen impliziten Logik.

Es kann unter diesen Umständen aber doch die Frage gestellt werden, ob es nicht zumindest gewisse allgemeine Prinzipien gibt, die für alle möglichen Kalküle gelten müssen und die somit auch der impliziten Logik angehören müssen. Wir meinen, daß dies zumindest das in der klassischen Logik immer wieder zugrunde gelegte Widerspruchsprinzip ist. Dies kann selbstverständlich nicht in der klassischen Form gemeint sein. Die klassische Formulierung setzt erstens den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und zweitens eine Negation voraus. Wir können uns Logikkalküle denken und können sie auch leicht aufbauen, die beiden Bedingungen nicht genügen. Denken wir uns etwa einen intuitionistischen Kalkül ohne Negation, also gewissermaßen eine «positive intuitionistische Logik», wie sie etwa G. F. C. Griss entwickelt hat. Aber auch in negationslosen Kalkülen kann noch von Widerspruchsfreiheit gesprochen werden. Wesentlich ist dann nur, daß für den Kalkül eine Folgerungsbeziehung gilt. Anscheinend können wir uns aber keinen Kalkül ohne jegliche Folgerungsbeziehung denken. Denken ist anscheinend immer auch Folgern. Dann wäre eben ein Kalkül als widerspruchsvoll zu bezeichnen, in dem jeder syntaktisch zulässige Satz herleitbar ist. Ein Kalkül ist widerspruchsfrei, wenn es syntaktisch zulässige Sätze gibt, die in ihm nicht herleitbar sind. Ein so allgemeines Widerspruchsprinzip können wir wohl als Voraussetzung jedes Kalküls postulieren. Wenn wir meinen, daß Kalküle als Modelle sowohl der Natur- als auch der Sprachwirklichkeit verwendet werden können, müssen wir den Kalkülbegriff so definieren, daß er dieser Forderung genügt. Nach dem eben ausgeführten scheint zu genügen, wenn wir den Kalkülbegriff definieren durch 1.) einen Folgerungsbegriff und 2.) das Widerspruchsprinzip in dem charakterisierten allgemeinen Sinne.

8.) *Der Modellcharakter formaler Systeme*

Ein Kalkül ist nur dann ein formales System, wenn außer den angegebenen beiden Bedingungen keine inhaltlichen Begriffe, die der Umgangssprache entnommen sind, darin vorkommen. Die Elemente eines formalen Kalküls müssen ausschließlich innerhalb desselben definiert sein. Das geschieht mittels der axiomatischen Methode. In den Axiomen kommen die formalen Elemente vor. Durch die Regeln wird angegeben, wie aus diesen Axiomen Theoreme hergeleitet werden können. In den Axiomen kommen nur formale Elemente vor, die durch das System der Axiome zusammen mit den Regeln implizit definiert sind. Wir definieren ein formales System dadurch, daß alle seine Elemente formal sind, d.h. in der charakterisierten Weise implizit definiert sind.

Eine solches Formalsystem enthält also in seinen Sätzen, d.h. in den Axiomen und Theoremen, keine inhaltlich bestimmten Begriffe. Inhaltlich wären Begriffe auch dann definiert, wenn sie etwa Größen sind, für die es Meßanweisungen gibt, wie dies etwa für die physikalichen Meßgrößen gilt. In einem solchen System hat also per definitionem kein Satz eine inhaltliche Bedeutung. Ein Satz hat insbesondere dann eine inhaltliche Bedeutung, wenn er eine Erfahrung zum Ausdruck bringt. Ein *Formalsystem ist inhaltlich leer.* Insofern alle mathematischen Theorien Formalsysteme sind, hat H. Weyl mit seiner Feststellung recht, wenn er sagt, daß diese Systeme «Leerformen möglicher Wissenschaften» sind. Es ist wohl nur eine Definitionsfrage, ob wir diesen Satz auch auf alle Formalsysteme ausdehnen, oder ob wir Mathematik als die Wissenschaft von den Formalsystemen schlechthin auffassen.

Die formalen Systeme sind Leerformen möglicher Wissenschaften, insofern sie angewendet werden können. Diese Anwendung eines formalen Kalküls geht so vor sich, daß die implizit definierten formalen Elemente durch eine inhaltliche Bedeutung interpretiert werden. Die inhaltlichen Bedeutungen werden den formalen Elementen zugeordnet. In den Naturwissenschaften sind die inhaltlich interpretierten formalen Systeme Modelle der Naturwirklichkeit. D. h. sie gelten unter bestimmten Bedingungen für diese. Wir müssen uns dabei klar sein, daß wir diese Bedingungen nicht vollständig kennen und wahrscheinlich niemals vollständig kennen können. So wissen wir heute, daß die klassische Mechanik nur unter der Voraussetzung gilt, daß die Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit und die Massen groß gegen die Elektronenmasse sind. Wahrscheinlich wird eine zukünftige Physik noch weitere Bedingungen hinzufügen müssen. Anders ausgedrückt: daß das formale System Modell der Naturwirklichkeit ist bedeutet, daß es partiell isomorph zu ihr ist. Wobei wir unter isomorph verstehen, daß zwei Systeme bezüglich bestimter Relationen eindeutig aufeinander abbildbar sind. Partiell isomorph bedeutet dann, daß diese Abbildung eventuell nur für bestimmte abgegrenzte Bereiche möglich ist.

Unsere Auffassung geht nun dahin, daß in analoger Weise die formalen Systeme in der Logik inhaltlich gedeutet Modelle der Sprachwirklichkeit sind. Wenn sie aber Modelle sein sollen, müssen sie unter bestimmten Bedingungen für die Sprachwirklichkeit gelten. Wir wissen heute über diese Bedingungen noch nicht allzuviel. Der Modellcharakter der logischen Formalkalküle kommt aber auch darin zum Ausdruck, daß ähnlich wie mitunter in den Naturwissenschaften die Systeme auf Grund gewisser Modellvorstellungen entwickelt werden können. Am besten wird das am agonalen Modell von Lorenzen sichtbar. Er nimmt an, daß zwei Gesprächspartner eine Art Diskussionsspiel miteinander spielen. Wenn A einen Satz behauptet, hat er gewonnen, wenn der Partner B ihn nicht wiederlegen kann. Der Satz heiße dann bewiesen. Wenn es ein richtiges Kampfspiel sein soll, wo kein Partner etwas zurücknehmen kann, was er einmal behauptet hat, ohne nicht das Spiel zu verlieren, ergibt sich die intuitionistische Logik. Wenn dagegen erlaubt ist, Behauptungen zurückzunehmen, d.h. wenn die Partner gewissermaßen gemeinsam nach der Wahrheit suchen, so ergibt sich die vollständig zweiwertige (alternäre) Logik. An diesem Modell, das zur Herleitung eines Logikkalküls dient, wird ersichtlich, daß es bestimmte Bedingungen gibt, die angeben wie weit ein inhaltlich gedeuteter Formalkalkül die Sprachwirklichkeit darstellt.

Wenn ein formaler Kalkül Modell der Sprachwirklichkeit sein soll, muß er entsprechend der Anwendung in den Naturwissenschaften inhaltlich gedeutet werden. Was bedeutet das aber? Wie wird ein formaler Kalkül durch eine inhaltliche Deutung zu einem *Logikkalkül*? Indem ich etwa festsetze, daß für formale Variable inhaltliche Bedeutungen eingesetzt werden dürfen: z.B. für die sogenannten Aussagenvariablen des Aussagenkalküls inhaltliche Aussagen. Entsprechend werden die sogenannten logischen Konstanten inhaltlich durch Copulae gedeutet. In den meisten Darstellungen der formalen Logik wird nicht zwischen dem formalen Kalkül und seiner inhaltlichen Deutung, dem Logikkalkül unterschieden. Meist wird sofort der gedeutete Kalkül eingeführt. Dieses Verfahren ist auch in der Physik üblich, in der ebenfalls unmittelbar die gedeuteten Formalsysteme eingeführt werden.

9. *Die Verifizierung logischer Systeme*

Formalsysteme als Modelle haben einen hypothetischen Charakter. Wir entwickeln sie meist apriorisch unter bestimmten Annahmen. Dabei werden wir allerdings meist auch durch Induktionen geleitet. Die hypothetische Verallgemeinerung muß verifiziert werden. Jede Theorie muß, insofern sie Modellcharakter hat, an der Erfahrung überprüfbar sein. In welcher Weise sind die Logikkalküle als Modelle an der Sprachwirklichkeit überprüfbar? Wenn sie als Modelle aufgefaßt werden, müssen sie auch verifizierbar sein.

Wir deuten einen Formalkalkül inhaltlich und erhalten einen sogenannten Logikkalkül. Dieser gedeutete Kalkül wird nun auf die natürliche Umgangssprache angewendet. Wir finden in dieser Umgangssprache Beziehungen zwischen Sätzen. Durch die inhaltliche Deutung werden derartige Beziehungen zwischen Sätzen im Kalkül abgebildet. Die Theoreme des Kalküls sind als Generalisierungen aufzufassen, sie sollen immer, d.h. für alle möglichen inhaltlichen Einsetzungen gelten. Wir überprüfen ein Theorem des Kalküls, indem wir eine inhaltliche Einsetzung vornehmen. Wenn die Beziehung der Sätze in der natürlichen Sprache, die dem Theorem entspricht, umgangssprachlich zutreffend ist, haben wir eine Bestätigung des Theorems und damit des ganzen Kalküls, aus dem das Theorem hergeleitet ist. Wenn dagegen eine aus einem Theorem zu gewinnende inhaltliche Beziehung umgangssprachlich nicht gilt, ist dieses Theorem und der ganze Kalkül in dieser Form ad absurdum geführt. So haben wir etwa oben gezeigt wie der Satz $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ durch eine Einsetzung ad absurdum geführt werden kann. Dadurch wird die vollständige zweiwertige (alternäre) Logik als unzutreffendes Modell der Sprachwirklichkeit erwiesen. In entsprechender Weise haben wir dann die Quodlibet-Formen ad absurdum geführt und gezeigt, daß auch der intuitionistische Kalkül ein unzutreffendes Modell der Sprachwirklichkeit ist.

Entsprechend können wir zeigen, daß auch die strikte Aussagenlogik kein zutreffendes Modell der Sprachwirklichkeit ist. Wir benützen dazu Sätze, die sowohl im alternären als auch im strikten Aussagenkalkül gelten. 1.) Der Satz von der doppelten Negation $\neg\neg p \equiv p$. Setzen wir für p = «er sagt die Wahrheit» und setzen wir als Abkürzung für $\neg p$ = «er lügt». Aus der Äquivalenz folgt dann der inhaltliche Satz: «er lügt nicht» ist äquivalent «er sagt die Wahrheit». Es ist leicht ersichtlich, daß diese Sätze nicht äquivalent sind. Wer nicht lügt, braucht deshalb noch nicht die Wahrheit zu sagen. 2) Eine Form der sogenannten Transposition der Implikation lautet $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$. Wir setzen für p den Satz «a ist verboten» und für q den Satz «a ist erlaubt». Dann bedeutet das fragliche Theorem: Aus dem Satz «wenn a nicht verboten ist, so ist a erlaubt» folgt der Satz «wenn a nicht erlaubt ist, so ist a verboten». Es ist sofort einsichtig, daß man die Begriffe «erlaubt» und «verboten» so auffassen kann, daß diese Folgerung nicht gilt. Ein normatives System kann concessional oder interdictional sein. Im concessionalen System gilt bloß: «wenn etwas nicht verboten ist, so ist es erlaubt». Im inderdictionalen System dagegen gilt bloß: «wenn etwas nicht erlaubt ist, so ist es verboten». Weil die beiden normativen Systeme unterschieden werden können, kann der Transpositionssatz in der obigen Form nicht gelten. Um diese Unterscheidung zu ermöglichen, muß man z. B. die intuitionistische Logik voraussetzen, in der dieses Theorem nicht gilt. Unsere Interpretationen von Theoremen, die auch in der strikten Aussagenlogik gelten, zeigt, daß auch sie kein zutreffendes Modell der Sprachwirklichkeit sein kann.

Für alle derartigen logischen Modelle gilt also, daß sie nur unter bestimmten Bedingungen anwendbar sind. Die Bedingungen sind bisher generell noch nicht hinreichend bekannt. Es wird eine Aufgabe zukünftiger Logikforschung sein, diese allgemeinen Bedingungen aufzufinden und anzugeben.

10) *Die Aufstellung partieller Logikmodelle als Forschungsaufgabe*

Es wird zunächst eine Forschungsaufgabe sein, spezielle und partielle Modelle aufzustellen. In diesem Sinne kann etwa nach der Bedeutung inhaltlicher Aussagenfunktionen gefragt werden. Darunter verstehen wir im wesentlichen nichtextensionale Aussagenfunktionen. Die Modalitäten, aber auch Funktoren wie «es soll sein, daß...», «es ist bewiesen, daß...», «ich glaube, daß...» und ähnliche, bezeichnen singulär inhaltliche Aussagenfunktionen. Die Ursache-Wirkung-Relation kann als inhaltliche Aussagenfunktion aufgefaßt werden, die zwei Ereignisaussagen als Argumente hat. Diese Funktion wird gelegentlich auch als «kausale Implikation» bezeichnet. Entsprechendes gilt für den Zweck-Begriff, oder den «vor»-Begriff. Zwei Ereignisse a und b werden durch die Sätze p und q ausgedrückt. «p vor q» meint dann, daß das Ereignis a zeitlich vor dem Ereignis q ist. Diese inhaltlichen oder intentionalen Aussagenfunktionen gehorchen bestimmten Gesetzen.

Wir können nun etwa für das «soll sein» oder die «kausale Implikation» ein formales System entwickeln. D. h. wir stellen für diese Funktoren Axiomensysteme auf. Wir werden dann jeweils feststellen müssen, ob diese Systeme zutreffende Modelle für den umgangssprachlichen Gebrauch dieser Begriffe sind. Eine derartige Forschung steht heute erst am Anfang.

11.) *Die Unmöglichkeit eines vollständigen expliziten Modells der Sprachwirklichkeit.*

Wir haben an den Anfang dieser Untersuchung ein Zitat aus Wittgensteins *Tractatus* gestellt, das besagt, daß es menschenunmöglich sei, die Sprachlogik aus der Umgangssprache zu entnehmen. Wittgenstein behauptet das, ohne dafür einen Beweis zu geben. Ein exakter Beweis dieser Tatsache war ihm wohl auch damals unmöglich. Auch wir haben bisher diese Behauptung unbewiesen übernommen.

Inzwischen sind seit 1931 die Gödel'schen Theoreme und ihre Erweiterungen bekannt. Das erste Gödel'sche Theorem besagt, daß man in einem Formalsystem, bestehend aus elementarer Zahlentheorie und Logik einen Satz konstruieren kann, der in diesem System unentscheidbar ist, wenn angenommen wird, daß dieses System selbst widerspruchsfrei ist.

Zu diesem Ergebnis kommt man dadurch, daß man durch ein geschicktes Verfahren, das man Gödelisierung nennt, jedem metasprachlichen Satz, d.h. jedem Satz über das Formalsystem, einen Satz des

Formalsystems selbst zuordnet. Man konstruiert nun einen Satz des Formalsystems, dessen metasprachliche Bedeutung ist, daß eben dieser Satz unbeweisbar ist. Der Satz sagt also, wenn man nur jene Übersetzungsvorschrift der Gödelisierung kennt, seine eigene Unbeweisbarkeit aus. Die Leistung Gödels ist gewesen, gezeigt zu haben, daß es einen solchen Satz gibt, d.h. daß er konstruiert werden kann.

Bereits Gödel hat es ausgesprochen, und neuere Untersuchungen haben es bestätigt, daß entsprechende Theoreme in jedem hinreichend reichen Formalsystem gelten. Ein formales System muß nur so reich an Ausdrucksmitteln sein, daß durch ein der Gödelisierung entsprechendes Übersetzungsverfahren jedem metasprachlichen Satz über das System ein Satz im System zugeordnet werden kann. Wenn wir aber nun einen unentscheidbaren Satz in einem solchen formalen System konstruiert haben, so läßt sich immer ein reicheres System angeben, in dem der Satz nicht nur widerspruchslos aussprechbar, sondern auch entscheidbar ist.

In diesem Zusammenhang sind auch die sogenannten semantischen Paradoxien von Interesse. Die bekannteste derselben ist der «Lügner». Sie beruhen, wie man heute meistens sagt, darauf, daß Objekt- und Metasprache miteinander vermengt werden. Gödel und später Hao Wang haben darauf hingeweisen, daß man jede semantische Paradoxie dazu verwenden könne, unentscheidbare Sätze zu konstruieren. Ganz einfach gesagt: Wenn ich den Satz ausspreche «ich lüge jetzt», so kann ich nicht entscheiden, ob dieser Satz wahr oder falsch ist.

In unseren natürlichen Umgangssprachen ist eine Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache nicht möglich. Es gehört geradezu zum Wesen unserer natürlichen Sprachen, daß wir in ihnen über alle Sätze wieder Aussagen machen können. Semantische Paradoxien bzw. unentscheidbare Sätze sind in einer natürlichen Sprache nicht auszuschließen. Trotzdem hat es aber wohl keinen Sinn wie H. Scholz zu behaupten, daß die natürlichen Sprachen widerspruchsvoll sind. Wir können von einem Satzsystem, z.B. einer Objektsprache sagen, daß sie widerspruchsvoll oder widerspruchsfrei ist. Nur sagt das zweite Gödel'sche Theorem, das aus dem ersten folgt, daß man die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems (wie oben) unter der Voraussetzung, daß das System widerspruchsfrei sei, nicht mit den Mitteln des Systems beweisen kann. D.h. aber, daß der Begriff der Widerspruchsfreiheit nicht mit den Mitteln des formalen Systems innerhalb desselben definierbar ist. Der Begriff der Widerspruchsfreiheit eines Systems, einer Objektsprache, muß mit sprachlichen Mitteln definiert werden, die außerhalb ihrer liegen, also in einer Metasprache. Für unsere natürlichen Sprachen, für die eine Unterscheidung von Objekt- und Metasprache nicht möglich ist, gibt es also auch keine außerhalb ihrer liegenden sprachlichen Mittel. Wir können aso für unsere Umgangssprache den Begriff der Widerspruchsfreiheit gar nicht definieren. Es hat somit keinen Sinn, davon zu sprechen, daß unsere natürlichen Sprachen widerspruchsfrei oder widerspruchsvoll seien.

Kann nun die Logik der natürlichen Sprachen explizit dargestellt werden? Kann es einen Logikkalkül geben, der die Logik der Umgangssprachen vollständig und explizit wiedergibt? Das erste Gödeltheorem besagt, daß es auch in einem hinreichend reichen Formalsystem nicht möglich ist, alle metasprachlichen Aussagen über das System in diesem System zu formulieren. Dieser Versuch führt eben notwendig zu unentscheidbaren Sätzen. Das ist aber nur ein Ausdruck dafür, daß dieser Versuch grundsätzlich als gescheitert anzusehen ist. Es kann somit keinen Logikkalkül geben, der erlaubte, daß alle Aussagen über ihn, in ihm formulierbar wären, d.h. aber, daß es keinen Logikkalkül gibt, der vollständig und explizit die Logik der natürlichen Umgangssprachen darstellt. Die Wittgenstein'sche Behauptung, die wir uns zu eigen machten, ist also bewiesen.

12.) *Die Folgerungen für das Grundlagenproblem der Mathematik.*

Seit den Versuchen von Frege, Russell und Whitehead, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen, wird im allgemeinen die Logik selbst in das Begründungsproblem der Mathematik mit einbezogen. Heute werden wohl von allen Seiten, die das Grundlagenproblem der Mathematik behandelt haben, formale Systeme verwendet. Wenn Brouwer selbst es wohl ablehnte, so ist es doch seit Heyting auch im Intuitionismus üblich geworden, auch für die zugrundegelegte Logik formale Systeme aufzustellen. Man sehe etwa die negationslose Logik von G.F.C. Griss. Die Begründung der Logik wird gewissermaßen als ein Grundstein für die Begründung der Mathematik angesehen. Denn es zweifelt wohl niemand daran, daß Logik Voraussetzung der Mathematik sei, selbst wenn sie nicht im Sinne des Logizismus rückführbar sei auf Logik.

Alle Begründungsversuche nehmen dabei an, daß es möglich sei, *die* Logik schlechthin in der expliziten Form eines Logikkalküls anzugeben. Wir haben aber gerade festgestellt, daß diese Annahme unzutreffend ist. Es ist gerade nicht möglich, die Logik der Umgangssprache in der expliziten Form eines Logikkalküls anzugeben. Die bisherigen Begründungsversuche gehen von einer apriorischen Begründung der Logik aus. Der sogenannte Logikkalkül soll nun allen weiteren Entwicklungen der Mathematik bis zu den höheren Systemen der Analysis und Mengentheorie zugrunde liegen. Dieser Versuch führt zu gewissen Einschränkungen. Radikal sind die Lösungen, die ganze Bereiche der Höheren Mathematik ausschalten wollen. Wenn man nicht so radikal vorgeht, so wird man doch zu der Notwendigkeit geführt, höhere mathematische Systeme nur noch als halbformale Systeme aufzufassen, wie diese etwa K. Schütte tut. Die Mathematik ist tatsächlich aber nicht auf einem formalen Logikkalkül aufgebaut, sondern ist immer in die Umgangssprachen eingebettet. Die mathematische Sprache ist unsere Umgangssprache, die nur um einige spezielle Ausdrucksformen erweitert ist. In den allermeisten Fällen scheint es möglich, die mathematischen Theorien in eine axiomatische Form zu bringen. D. h. es wird ein Formalkalkül aufgestellt, der aber unmittelbar eingebettet ist in die Umgangssprache als Metasprache. In den meisten Fällen sind übrigens die mathematischen Axiomensysteme garnicht vollständig formalisiert, aber sie könnten wohl formalisiert werden. Man denke etwa an das Axiomensystem Zermelo's für die Mengenlehre, dessen Axiome umgangssprachlich formuliert sind.

Bereits G. Gentzen hat im Zusammenhang mit seinem Beweis der Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie darauf hingewiesen, daß die entscheidende Schwierigkeit für einen solchen Beweis darin besteht, daß man keinen vollständigen Überblick über alle möglichen Beweismethoden gewinnen könne. Dies liegt wohl zu einem wesentlichen Teil darin, daß wir die logischen Möglichkeiten unserer Umgangssprache nicht vollständig überblicken können, weil es keinen expliziten Logikkalkül gibt, der die Logik der Umgangssprache vollständig darstellt.

Die Mathematik kann und will nicht darauf verzichten, viele ihrer Theorien unmittelbar in die Umgangssprache einzubetten. Dadurch muß sie in Kauf nehmen, daß die Logik unserer Umgangssprache nicht vollständig explizierbar ist. Das Grundlagenproblem der Mathematik scheint aus diesem Grund grundsätzlich nicht vollständig lösbar, wenn man es im Ideal einer vollständigen Formalisierung sieht.

Stuttgart — Gerhard Frey

Literatur

B. Bolzano, *Wissenschaftslehre I*, Sulzbach, 1837.

R. Carnap, *Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, Erkenntnis I, 1930/31.

DSLB., *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik*, Monatshefte f. Math. u. Phys. Bd. 41, 1934.
G. FREY, *Das Residuum der natürlichen Sprache*, Methodos Vol. III, 1951.
DSLB., *Symbolische und ikonische Modelle*. Synthese XII, 1960 und *The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences*, Synthese Library, Dordrecht-Holland, 1961.
DSLB., *Inhaltliche Aussagefunktionen*, Philosophia Naturalis (im Druck).
B.V. FREYTAG-LÖRINGHOFF, *Logik, Stuttgart*, 1955.
G. GENTZEN, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Math. Annalen 112, 1936.
K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 37, 1931.
G. F. C. GRISS, *Logic of negationless intuitionistic mathematics*, Proc. of Sec. of Sciences, Koninkl. Nederland. Akad. v. Wetenschappen, vol. 54, 1951.
G. GÜNTHER, *Die philosophische Idee einer nicht-aristotelischen Logik*, Actes du XIème Congrès Intern. de Philos. Bruxelles 1953, vol. V.
DSLB., *Die aristotelische Logik des Seins und die nicht-aristotelische Logik der Reflexion*, Zs. f. phil. Forschung XII, 1958.
DSLB., *Idee und Grundriss einer nicht-Aristotelischen Logik I*, Hamburg, 1959.
N. HARTMANN, *Grundzüge einer Metaphysik der Erkenntnis*, 3. Auflg., Berlin, 1941.
I. JOHANSSON, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter, intuitionistischer Formalismus*, Compositio Mathematica vol. 4, 1937.
P. LORENZEN, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
DSLB., *Formale Logik* (Sammlung Göschen Bd. 1176/1176a), Berlin 1958.
DSLB., *Logische Strukturen in der Sprache*, Mainzer Univ.-Gespräche, S. S. 1960.
H. A. SCHMIDT, *Mathematische Gesetze der Logik I: Vorlesungen über Aussagenlogik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
H. SCHOLZ, *Natürliche Sprachen und Kunstsprachen*, Bl. f. deutsche Philos., Bd. 12, 1938.
DSLB., *Metaphysik als strenge Wissenschaft*, Köln, 1941.
K. SCHÜTTE, *Beweistheorie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
Hao WANG, *Undecidable Sentences Generated by Semantic Paradoxes*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 20, 1955.
H. WEYL, *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft*, Handbuch d. Philos. II, München-Berlin, 1926.
L. WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-philosophicus*, Schriften, Frankfurt/M. 1960.
DSLB., *Philosophische Untersuchungen*, Schriften, Frankfurt/M 1960.
E. ZERMELO, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Math. Annalen, 65, 1908.