LE TYPE DES OCCURRENCES

A. BAYART

A. *Le problème*

1. Donnons nous un langage formalisé quelconque. Prenons par exemple, comme alphabet, l'alphabet majuscule français et convenons que toute série finie de lettres de cet alphabet est une formule. Considérons la formule:

(1) ABCBCBABCBCB.

Cette formule contient trois occurrences de la formule:

(2) BCB,

commençant respectivement à la deuxième, la quatrième et la huitième lettre de la formule (1).

Nous comprenons très facilement intuitivement les notions telles que «la deuxième occurrence de la formule (2) dans la formule (1)».

2. Donnons nous un univers du discours comprenant des entités de types différents, ces types étant définis comme suit, d'une manière conforme à la théorie traditionnelle. (Nous employons des lettres minuscules pour désigner des types.)

- a) Il existe une infinité dénombrable d'entités de type i qui sont les individus de notre univers du discours;
- b) Il existe deux entités de type o , à savoir les valeurs de vérité «vrai» et «faux»;
- c) Si notre univers du discours contient les types a et b (non nécessairement distincts), il contient toutes les fonctions à un argument, ayant des entités du type a comme argument, et les entités du type b comme valeurs, et ces fonctions sont du type (ba) ;
- d) Il n'y a pas, dans notre univers du discours, d'autres entités ou d'autres types que ceux que nous nous sommes donnés par les règles a), b) et c).

3. Cet univers du discours ne comprend dès lors que des fonctions à un argument et ne comprend pas des relations à plusieurs arguments. En effet les relations à deux arguments, par exemple, sont

des fonctions qui ont deux arguments et qui prennent le vrai et le faux comme valeurs. On sait cependant comment on surmonte aisément cette difficulté. Considérons une relation dont les premiers arguments sont de type a et les seconds arguments de type b. Au lieu de considérer une relation de ce genre, on considérera une fonction à un argument qui prend des entités de type b comme arguments et comme valeurs des fonctions qui, pour un argument de type a, prennent une valeur de type 0, c'est à dire des fonctions de type (oa).

Bref, au lieu de considérer des relations dont les premiers et seconds arguments sont respectivement de type a et b, on considère des entités de type ((oa)b).

Dans ce qui suit, lorsque nous parlerons à un moment donné de relations à deux arguments ayant respectivement comme premiers et seconds arguments des entités de type a et b, il sera entendu que nous entendrons parler d'entités de type ((oa)b).⁽¹⁾

4. Convenons que les individus de notre univers du discours sont les formules du langage formalisé défini au paragraphe 1.

Par «formule» nous entendons des formules conçues comme formes, donc comme entités abstraites, et non des inscriptions concrètes figurant à tel endroit de telle feuille de papier ou de tel tableau noir.

Nous nous posons les deux questions suivantes:

- a) Compte tenu des conventions qui précèdent, les entités telles que la deuxième occurrence de la formule (2) dans la formule (1), appartiennent-elles à notre univers du discours ?
- b) En cas de réponse affirmative à la question a), quel est le type de ces entités ?

B. Méthode de solution

5. Nous avons une notion intuitive de ce que sont ces occurrences. Nous appellerons ces occurrences «in-occurrences». Il est plutôt malaisé de trouver pour ces in-occurrences une place dans notre univers du discours.

Nous nous donnerons une notion exacte des certaines entités que nous appellerons «ex-occurrences». Il sera très aisé de montrer que ces

(1) Voir M. SCHÖNFINKEL, «Über die Bausteine der mathematischen Logik», *Mathematische Annalen*, vol. 92 (1924), aux pp. 307-308.

ex-occurrences appartiennent à notre univers du discours et de déterminer leur type.

Les expressions «in-occurrences» et «ex-occurrences» nous sont suggérées par les deux premières lettres des mots «intuitif» et «exact» et aussi par le fait que les in-occurrences sont des choses qui se trouvent *dans* les formules, alors que les ex-occurrences seront tout autre chose que des formules ou des parties de formules.

6. Il est clair que ce programme ne peut être considéré comme une solution du problème que nous avons posé, si nous ne montrons pas que les notions de «in-occurrence» et de «ex-occurrence» sont, d'une certaine manière, équivalentes.

Il convient aussi que nous précisions quelque peu ce que nous entendons par «équivalence de deux notions».

Cette équivalence suppose tout d'abord que nous soyons à même d'établir une relation bi-univoque entre l'ensemble des in-occurrences et l'ensemble des ex-occurrences.

Mais cela ne suffit évidemment pas. En effet, les in-occurrences sont en nombre infini dénombrable. On pourrait dès lors aisément établir une relation bi-univoque entre l'ensemble des in-occurrences et un autre ensemble infini dénombrable absolument quelconque. Aussi dirons-nous que l'équivalence que nous nous proposons d'établir résulte du fait que la relation bi-univoque que nous établirons présente un caractère très naturel.

La notion «naturel» est une notion intuitive qu'il semble difficile de préciser davantage. En tous cas, nous nous contentons ici de la compréhension intuitive que nous avons de cette notion.

Il en résulte que la question de savoir si la relation bi-univoque, que nous établirons entre les in-occurrences et les ex-occurrences, est suffisamment naturelle, est une question d'appréciation personnelle.

C. La solution

7. Nous nous donnons une nouvelle espèce d'expressions que nous nommons «placeurs».

Un placeur est une série finie de symboles, ces symboles pouvant être soit une lettre majuscule de l'alphabet français, soit la lettre minuscule «x» avec la restriction que tout placeur doit contenir une et une seule lettre «x». (La lettre «x» isolée est dès lors un placeur.

Nous nous donnons encore une autre espèce d'expressions que nous nommons «expressions complexes».

Une expression complexe est une expression qui se compose d'un placeur, suivi d'une virgule, suivie d'une formule de notre langage formalisé.

Ainsi l'expression

AxB, BCD

est une expression complexe.

Dans une expression complexe, la formule qui suit la virgule est appelée «l'argument».

8. A chaque expression complexe nous faisons correspondre une formule de notre langage formalisée, à savoir la formule que l'on obtient en remplaçant dans le placeur la lettre «x» par l'argument.

Ainsi, à l'expression complexe

AxB, BCD

correspond la formule

$ABCDB.$

En ce faisant nous nous donnons une fonction F à deux arguments qui prend des placeurs comme premiers arguments, des formules comme seconds arguments et des formules comme valeurs.

Mais nous pouvons tout aussi bien dire que nous nous sommes donné une fonction G à un argument qui prend des placeurs comme arguments et qui prend comme valeurs des fonctions à un argument qui prennent des formules comme arguments et des formules comme valeurs, c.-à-d. des fonctions de type ii. Ainsi en vertu de G au placeur «AxB» correspond la fonction qui établit les correspondances suivantes:

Z	AZB
A	AAB
BCD	ABCDB
— — — — —	etc.

Appelons «placements» les fonctions de type ii qui, en vertu de G, correspondent aux placeurs. On voit aisément qu'à deux placeurs différents correspondent des placements différents. Par exemple, le placement qui correspond au placeur «AxB» fait correspondre à la formule «BCD» la formule «ABCDB», et le placement qui corres-

pond au placeur «ABx» fait correspondre à la formule «BCD» la formule «ABBCD».

Nous avons donc établi une relation biunivoque entre placeurs et placements.

9. Il est aisé d'établir une relation bi-univoque entre les in-occurrences et les expressions complexes, de la manière suivante.

- a) Soit une in-occurrence déterminée d'une formule b dans une formule a. Remplaçons dans a cette occurrence de b par la lettre «x». Nous obtenons un placeur. Faisons suivre ce placeur par une virgule et par la formule b, et nous obtenons une expression complexe.
- b) En sens inverse soit une expression complexe comprenant un placeur p et une formule b. Remplaçons la lettre «x» du placeur par la formule b. Nous obtenons une formule a dans laquelle la formule b se rencontre à l'endroit où la lettre x se trouvait dans le placeur.

On voit aisément qu'en vertu de la convention a) à tout in-occurrence correspond une expression complexe, qu'en vertu de la convention b) à toute expression complexe correspond une in-occurrence et que si une in-occurrence I correspond à une expression complexe C en vertu de la convention a), cette même expression complexe C correspond à la même in-occurrence I en vertu de la convention b).

Nous avons établi ainsi une relation bi-univoque très naturelle entre les in-occurrences et les expressions complexes. Celles-ci cependant n'appartiennent pas à notre univers du discours.

10. Nous envisageons maintenant successivement les relations bi-univoques suivantes:

- a) la relation bi-univoque qui fait correspondre à chaque expression complexe le couple ordonné dont le premier élément est le placeur de l'expression complexe et dont le second élément est la formule qui figure après la virgule dans l'expression complexe. Ainsi à la formule complexe «Ax_B, BCD» correspond le couple ordonné dont le premier élément est le placeur «Ax_B» et dont le second élément est la formule «BCD»;
- b) la relation bi-univoque qui fait correspondre à chaque couple ordonné visé sub a) le couple ordonné dont le premier élément est le placement correspondant au placeur contenu dans le couple ordonné visé sub a) et dont le second élément est la formule qui est le second élément du couple ordonné visé sub a);

- c) la relation bi-univoque qui fait correspondre à chaque couple ordonné visé sub b) la relation à deux arguments qui prend la valeur «vrai» uniquement quand on lui donne comme premier argument le premier élément du couple ordonné visé sub b) et comme second argument le second élément du couple ordonné visé sub b).

Nous appelons les relations à deux arguments visées sub c) «ex-occurrences».

La série des quatre relations bi-univoques établies au paragraphe 9, et aux alinéas a) b) et c) du paragraphe 10 établit une relation bi-univoque naturelle entre les in-occurrences et les ex-occurrences.

On admettra en effet, pensons-nous, que les trois premières relations bi-univoques sont très naturelles, et que la quatrième relation bi-univoque est suffisamment naturelle.

D'autre part, puisque les placements sont de type (ii) et que les formules sont de type i, les ex-occurrences appartiennent à notre univers du discours et sont de type ((o(ii))i), ou, en usant des abréviations usuelles, de type o(ii)i.

Il est clair que si nous avons inversé l'ordre des arguments dans les relations à deux arguments visées en dernier lieu, nous aurions obtenu une notion d'ex-occurrence qui aurait été du type ((oi) (ii)), ou, en abrégé, oi(ii).

11. Une dernière remarque peut être faite ici, nous semble-t-il. On peut se demander comment il est possible d'établir une relation bi-univoque, donc une relation exacte, entre la notion intuitive vague d'in-occurrence, et la notion exacte d'ex-occurrence. La réponse est, croyons-nous, qu'une même notion peut être vague à un certain point de vue, et exacte à un autre point de vue. Ainsi, la notion «individu» nous place devant les questions épineuses suivantes: «qu'est-ce qu'un individu?» ou «qu'est-ce que considérer quelque chose comme étant un individu?».

Il semble bien en résulter que la notion «individu» soit une notion vague. Cela n'empêche que cette notion joue sans inconvénient un rôle essentiel dans l'élaboration des théories sémantiques exactes.

De même, en l'espèce, la notion intuitive d'in-occurrence est vague en ce sens qu'on voit difficilement quel est son type ontologique. Malgré cela cette notion présente aussi un caractère exact qui permet d'établir les relations bi-univoques décrites ci-dessus.