EXPRESSION DE LA RÉCURSION PRIMITIVE DANS LE CALCUL - λ - K

JEAN LADRIÈRE

En hommage à M. R. Feys

1.- INTRODUCTION

La présente note a pour objet de montrer comment la notion de récursion primitive peut être exprimée au moyen des ressources du calcul- λ -K. Elle est entièrement basée sur une indication de Bernays (¹).

Pour représenter la récursion primitive dans le calcul- λ -K, on peut se servir soit de la fonction *successeur*, soit de la fonction *prédécesseur*. La représentation de Bernays fait usage de la fonction *successeur*. Cette représentation fait intervenir par ailleurs la notion de *paire ordonnée*. Curry propose une définition de cette notion un peu différente de celle de Bernays. Dans une note complémentaire, nous rappellerons la définition de Curry et indiquerons comment la représentation de la récursion primitive doit être construite lorsqu'on utilise cette définition. Dans une seconde note complémentaire, nous indiquerons comment on peut représenter la récursion primitive en se servant de la fonction *prédécesseur*.

Le procédé de la définition récursive fait intervenir un schéma à deux lignes ou à deux clauses. L'intérêt que l'on peut trouver à utiliser le calcul- λ ou le calcul- λ -K, c'est que l'un et l'autre de ces cal-

(¹) Il s'agit d'une remarque communiquée par M. Bernays à M. Feys en 1948. Ce qui est exposé ici n'est que la mise en œuvre systématisée des indications de M. Bernays.

Par ailleurs, ce texte doit beaucoup à M. J. Dopp, qui a bien voulu en revoir la première rédaction, qui y a apporté sur bien des points des améliorations importantes et y a ajouté de nombreux compléments. Il a mis très aimablement à ma disposition des travaux personnels inédits relatifs à la logique combinatoire et m'a autorisé à en faire usage; c'est à ces notes de M. Dopp qu'est empruntée la présentation de plusieurs des combinateurs qui figurent dans les pages qui suivent. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma très vive reconnaissance.

culs permettent de remplacer le schéma de définition récursive par une simple définition n'utilisant qu'un seul opérateur. Une fonction récursive quelconque φ , dont la définition au moyen d'un schéma récursif ferait intervenir deux autres fonctions ψ et χ , peut alors être définie de façon explicite en appliquant simplement cet opérateur de la récursion aux deux fonctions ψ et χ . Par ailleurs, il est possible de donner de cet opérateur une expression purement combinatoire, qui a l'avantage de ne pas comporter de variables.

On commencera par rappeler certaines définitions et certaines propriétés importantes. Il sera utile de donner, auparavant, un tableau des notations utilisées.

10. NOTATIONS UTILISÉES

Constantes individuelles: 0, 1, 2,

Variables individuelles: x, y, z, t , et ces mêmes lettres affectées d'indices.

Constante prédicative: =.

Constantes fonctionnelles: $\kappa, \sigma, \sigma_{in}$.

Symboles syntaxiques pour chiffres ⁽²⁾: α, β .

Symboles syntaxiques pour fonctions: φ, χ, ψ , et ces mêmes lettres affectées d'indices.

Symboles syntaxiques pour termes ⁽³⁾: τ , et cette même lettre affectée d'indices.

Opérateur d'abstraction: λ .

Formules particulières du calcul- λ ou du calcul- λ -**K**, ou combinateurs particuliers: romaines capitales grasses, éventuellement affectées d'indices ou munies d'un astérisque, et de plus Φ .

Symboles syntaxiques pour formules- λ ou pour formules- λ -**K**: allemandes capitales, éventuellement affectées d'indices.

⁽²⁾ Un *chiffre* est une expression du type $\sigma(\sigma(\dots\sigma(0)\dots))$.

⁽³⁾ Définition de la notion de *terme*.

a) Une variable individuelle est un *terme*.

b) Une constante individuelle est un *terme*.

c) Un chiffre est un *terme*.

d) Une expression formée en appliquant un symbole de fonction à des arguments dont chacun est soit une variable individuelle, soit une constante individuelle, soit un chiffre, est un *terme*.

e) Une expression formée en remplaçant, dans une expression du type (d), contenant au moins une variable individuelle, une telle variable par une expression du type (d), est un *terme*.

Symboles syntaxiques pour combinateurs: allemandes capitales grasses, éventuellement affectées d'indices.

Notation syntaxique pour définitions: $\equiv$.

Notation syntaxique pour la relation de convertibilité: $=$.

Notation syntaxique pour la substitution: $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]\mathfrak{C}$.

11.- LES FONCTIONS RÉCURSIVES PRIMITIVES

On peut définir la notion de *fonction récursive primitive* en partant de certaines fonctions de base et en introduisant certaines opérations.

111.- Fonctions de base

111.1.- Fonction successeur: σ .

(Elle peut être considérée comme donnée intuitivement; si on veut être rigoureux, il faut la définir axiomatiquement.)

111.2.- Fonction constante: κ .

(Fonction dont la valeur est toujours 0.)

111.3.- Fonctions de sélection, du type: $\sigma_{in}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$.

(La fonction σ_{in} sélectionne le i ème argument dans une suite de n arguments.)

112.- Opérations

112.1.- Application d'une fonction à un argument ou à une suite d'arguments.

Cette opération permet de former, à partir d'une fonction φ à n arguments et des termes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, l'expression $\varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

112.2.- Application du schéma de substitution:

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \chi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$,

où $\chi, \psi_1, \dots, \psi_m$ sont des fonctions déjà définies.

112.3.- Application du schéma de récursion primitive:

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma(\alpha)) = \chi(\alpha, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha), x_1, x_2, \dots, x_n)$,

où ψ et χ sont des fonctions déjà définies.

113.- Définition

Une fonction d'entiers est dite *récursive primitive* si elle peut être définie au moyen des fonctions de base (111) par applications successives des opérations (112).

Ou encore: la classe des fonctions récursives primitives d'entiers est la classe des fonctions d'entiers

- a) qui comporte les fonctions de base (111),
- b) qui est fermée par rapport aux opérations (112).

12.- LE CALCUL- λ

121.- Les formules bien formées

La notion de *formule bien formée* du calcul- λ est définie, en même temps que celle de *variable libre* et de *variable liée* (de ce même calcul), au moyen de la définition inductive que voici:

121.1.- Une *variable* est une *formule bien formée*. L'occurrence de cette variable dans une formule formée par cette seule occurrence est dite *libre*.

121.2.- Si les formules $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont bien formées, alors la formule $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ est une *formule bien formée*. Une occurrence d'une variable est *libre* dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ si elle est libre soit dans $\mathfrak{A}$ soit dans $\mathfrak{B}$. Elle est *liée* dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ si elle est liée soit dans $\mathfrak{A}$ soit dans $\mathfrak{B}$.

121.3.- Si la formule $\mathfrak{A}$ est bien formée et contient au moins une occurrence libre de la variable x , alors la formule $\lambda x.\mathfrak{A}$ est *bien formée*. Chaque occurrence de x dans $\lambda x.\mathfrak{A}$ est dite *liée* dans $\lambda x.\mathfrak{A}$ et toute occurrence d'une variable différente de x est dite *libre* ou *liée* dans $\lambda x.\mathfrak{A}$ suivant qu'elle est libre ou liée dans $\mathfrak{A}$.

Dans ce qui suit, il sera entendu que toutes les formules sont bien formées. Nous utiliserons le terme *formule bien formée* pour *formule bien formée*. Les symboles syntaxiques $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$, représentent des formules bien formées. Nous appellerons *formule- λ* une formule (bien formée) du calcul- λ .

Nous représenterons d'ordinaire une expression de forme $\lambda x.(\lambda y. \mathfrak{M})$ par la notation $\lambda xy.\mathfrak{M}$. (V. p.ex. au n° 421.)

122.- La conversion- λ

122.1.- Les opérations

Le calcul- λ est basé sur trois opérations.

122.11.- Substitution.

Si la variable y ne figure pas dans $\mathfrak{A}$ et si la variable x est liée dans une partie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$, on peut substituer $[x/y]\mathfrak{B}$ aux occurrences de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$, mais il faut le faire à la fois pour toutes les occurrences de $\mathfrak{B}$.

122.12.- Concrétisation.

Si une formule $\mathfrak{A}$ contient une formule $\mathfrak{B}$ du type $(\lambda x.\mathfrak{M})\mathfrak{N}$, on peut remplacer cette formule $\mathfrak{B}$ par $[x/\mathfrak{N}]\mathfrak{M}$, à la condition que les variables liées de $\mathfrak{M}$ soient distinctes à la fois de x et des variables libres de $\mathfrak{N}$.

122.13.- Abstraction.

Si une formule $\mathfrak{A}$ contient une formule $\mathfrak{B}$ du type $[x/\mathfrak{N}]\mathfrak{M}$, on peut remplacer cette formule $\mathfrak{B}$ par $(\lambda x.\mathfrak{M})\mathfrak{N}$, à la condition que les variables liées de $\mathfrak{M}$ soient distinctes à la fois de x et des variables libres de $\mathfrak{N}$.

122.2.- La conversion- λ

Toute suite d'applications des opérations (122.1) est appelée une *conversion- λ* . Si une formule $\mathfrak{A}$ peut être transformée en une formule $\mathfrak{B}$ par une conversion- λ on dit que $\mathfrak{A}$ est *convertible* en $\mathfrak{B}$. La relation de convertibilité est une relation d'équivalence. On écrira: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

13.- Les fonctions λ -définissables

Une fonction d'entiers φ est dite λ -définissable si l'on peut trouver une formule $\mathfrak{F}$ du calcul- λ telle que, si $\varphi(\alpha) = \beta$, et si Z_α et Z_β sont les formules- λ correspondant aux entiers α et β , alors $\mathfrak{F}Z_\alpha$ est convertible en Z_β (*).

(*) On représente par la notation $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, sans parenthèses, l'application de $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{B}$. En utilisant le principe de l'association à gauche, on peut représenter une fonction de n variables comme une fonction d'une variable dont la valeur est à son tour fonction de $(n-1)$ variables. Le fait que la définition ne considère qu'une fonction φ à une variable n'enlève donc rien à sa généralité.

14.- Les combinateurs

Les formules du calcul- λ peuvent être considérées comme correspondant à des opérations, plus ou moins complexes, de combinaison, c'est-à-dire comme des opérateurs de combinaison. On appelle de tels opérateurs des *combinateurs*. A partir de certains combinateurs élémentaires, on peut former des combinateurs plus complexes, au moyen de l'opération d'*application*. On appelle *combinateur-S* un combinateur obtenu à partir d'un système S de combinateurs donnés.

Soit un ensemble de combinateurs $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$. Appelons S ce système de combinateurs. C'est le système de base des combinateurs- S . On définit un combinateur- S de la façon suivante:

- a) $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ et toutes les variables sont des combinateurs- S ,
- b) si $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ sont des combinateurs- S , $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ est aussi un combinateur- S .

Pour définir les combinateurs d'un système de base, on peut utiliser le calcul- λ , en considérant ces combinateurs comme des formules- λ . On peut également se placer à un point de vue entièrement indépendant du calcul- λ et définir les combinateurs d'un système de base de façon intrinsèque, soit par un système de règles indiquant les transformations possibles entre ces combinateurs (c'est le procédé utilisé par Rosser ⁽⁵⁾), soit par un système d'axiomes (c'est le procédé de Curry ⁽⁶⁾).

Dans ce qui suit, nous utiliserons le procédé qui consiste à définir les combinateurs de base au moyen de formules- λ .

15.- Le calcul- λ - $\mathbf{K}$

On peut obtenir un calcul qui, à certains égards, est plus commode que le calcul- λ , en modifiant la notion de *formule bien formée*, de façon à admettre des formules dans lesquelles l'opération d'abstraction porte sur des variables qui ne figurent pas dans la suite de la formule. Ainsi on pourra avoir des formules telles que $\lambda x_1 x_2. x_1$. Le calcul- λ - $\mathbf{K}$ se décrit exactement comme le calcul- λ , avec la seule modification suivante: dans la troisième partie de la définition d'une *formule bien formée*, on laisse tomber l'expression «et contient au moins une occurrence libre de la variable x ».

La notion de *fonction λ -définissable* s'étend immédiatement au calcul- λ - $\mathbf{K}$. Les notions de *fonction λ -définissable* et de *fonction λ - $\mathbf{K}$ -dé-*

⁽⁵⁾ V. ROSSER.

⁽⁶⁾ V. CURRY & FEYS, chap. 6.

finissable sont équivalentes, pour autant qu'il s'agisse bien de fonctions d'entiers prenant leurs valeurs dans l'ensemble des entiers. Si on considère des relations fonctionnelles entre formules bien formées quelconques, les représentations dans le calcul- λ et dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$ ne sont plus, en général, équivalentes. Elles ne le sont que pour des catégories particulières de relations fonctionnelles. Ainsi elles sont équivalentes dans le cas de relations fonctionnelles dont les arguments sont des formules du type Z_α et dont les valeurs sont des formules bien formées ayant les mêmes variables libres. Elles sont probablement équivalentes aussi dans le cas de relations fonctionnelles dont les arguments sont des fonctions de formules du type Z_α .

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons uniquement aux fonctions d'entiers prenant pour valeurs des entiers. La théorie développée pour cette classe de fonctions peut être étendue à des classes plus générales de relations fonctionnelles au moyen du procédé d'arithmétisation. (Soit par exemple la classe des relations fonctionnelles dont les arguments sont des entiers et les valeurs des formules bien formées quelconques. Si on peut définir un procédé d'arithmétisation des formules bien formées, on peut faire correspondre à ces relations fonctionnelles des fonctions d'entiers à valeurs entières.) Comme nous n'envisagerons pas ici de telles extensions de la théorie, nous entendrons toujours par *fonction*, dans ce qui suit, *fonction d'entiers à valeurs entières*.

Kleene a démontré que toute fonction récursive primitive est λ -définissable ⁽⁷⁾. (Il a même démontré un résultat plus vaste, portant sur la récursivité générale, mais le résultat rappelé ici constitue une des étapes de sa démonstration.) Kleene établit ce résultat au moyen d'une suite de lemmes. Les démonstrations de ces lemmes utilisent une représentation des formules- λ au moyen de certains combinateurs. Mais il y a moyen d'établir le même résultat de façon directe, en donnant une transposition, dans le calcul- λ , de la définition de la récursion primitive. C'est ce procédé qu'utilise Church ⁽⁸⁾. On peut réaliser le même genre de démonstration dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$. Quand on opère dans le calcul- λ , on doit utiliser des triades. Dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$, on peut se contenter de dyades; on a ainsi des formules plus simples. Comme les notions de *fonction λ -définissable* et de *fonction λ - $\mathbf{K}$ -définissable* sont équivalentes dans le cas de fonctions d'entiers à valeurs entières, le résultat obtenu au moyen du calcul- λ - $\mathbf{K}$ a la

⁽⁷⁾ V. KLEENE (4).

⁽⁸⁾ In CHURCH (2).

même portée que celui qui peut être obtenu au moyen du calcul- λ . Nous indiquerons comment certaines des expressions introduites peuvent être traduites en termes purement combinatoires.

2.- Quelques combinateurs

Il sera utile de rappeler ici les définitions de quelques combinateurs, dont il sera fait usage plus loin.

21.- Définition de quelques combinateurs au moyen de formules- λ

La façon la plus intuitive de définir les combinateurs est de se servir de formules- λ . Voici les définitions de quelques combinateurs élémentaires.

I	$\equiv \lambda x. x$	(identificateur)
B	$\equiv \lambda x_1 x_2 x_3. x_1 (x_2 x_3)$	(compositeur élémentaire)
C	$\equiv \lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_3 x_2$	(permutateur élémentaire)
W	$\equiv \lambda x_1 x_2. x_1 x_2 x_2$	(duplicateur)
J	$\equiv \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 x_2 (x_1 x_4 x_3)$	
T	$\equiv \lambda x_1 x_2. x_2 x_1$	
S	$\equiv \lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_3 (x_2 x_3)$	

22.- Définition des combinateurs au moyen d'un système complet

On dit qu'un système S de combinateurs est *complet* lorsque toute formule (bien formée) du calcul- λ peut être exprimée au moyen d'un combinateur-S. Étant donné un système complet S de combinateurs, tout combinateur peut être exprimé sous la forme d'un combinateur-S.

On montre que le système constitué par les combinateurs **I** et **J** est complet⁽⁹⁾. Les autres combinateurs indiqués ci-dessus peuvent donc être définis au moyen de **I** et de **J**. Voici ces définitions.

T	$\equiv \mathbf{J I I}$
C	$\equiv \mathbf{J T (J T) (J T)}$
B	$\equiv \mathbf{C (J I C) (J I)}$
W	$\equiv \mathbf{C (C (B C (C (B J T) T)) T)}$.

(Le combinateur **S** peut s'exprimer en fonction de **B**, **C** et **W**, com-

⁽⁹⁾ V. ROSSER.

me on le verra ci-dessous. Il peut donc aussi être exprimé au moyen de **I** et de **J**.)

On peut vérifier facilement, en utilisant le calcul- λ , que ces définitions correspondent bien à celles qui ont été données ci-dessus.

On montre que le système constitué par les combinateurs **B**, **C**, **W**, **I**, est aussi un système complet. Dans ce qui suit, nous nous servirons de ce système, plutôt que du système **I**-**J**, parce que ce dernier conduit à des écritures plus longues.

Indiquons comment les combinateurs **J**, **T** et **S** peuvent s'exprimer en fonction des combinateurs **B**, **C**, **W** et **I**.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\equiv (\mathbf{B} (\mathbf{B} (\mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{C}) \mathbf{W}) (\mathbf{B} \mathbf{C})) (\mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B}))) \mathbf{I} \\ \mathbf{T} &\equiv \mathbf{C} \mathbf{I} \\ \mathbf{S} &\equiv \mathbf{B} (\mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{W}) \mathbf{C}) \mathbf{B} \mathbf{B} \end{aligned}$$

Comme le combinateur **S** sera utilisé plus loin, donnons ici la justification de cette dernière définition. **BW** redouble la 3^{ème} variable; la combinaison du résultat avec **C**, au moyen de **B**, intervertit la 2^{ème} et la 3^{ème} variable; la combinaison du résultat avec **BB**, au moyen de **B**, groupe les trois dernières variables.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{W} &= \lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_2 x_3 x_3 \\ \mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{W}) \mathbf{C} &= \lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_3 x_2 x_3 \\ \mathbf{B} \mathbf{B} &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 x_2 (x_3 x_4) \\ \mathbf{B} (\mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{W}) \mathbf{C}) (\mathbf{B} \mathbf{B}) &= \lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_3 (x_2 x_3). \end{aligned}$$

23.- *Combinateurs plus complexes*

Au moyen des combinateurs élémentaires introduits ci-dessus, on peut définir des combinateurs plus complexes qui présentent des propriétés intéressantes.

231.- *Puissances des combinateurs élémentaires*

Nous considérons ici les combinateurs comme correspondant à des formules- λ . Nous dirons que deux combinateurs $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont convertibles, et nous écrirons $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, lorsque les formules- λ correspondantes le sont.

Puissances de $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 &\equiv \mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^3 &\equiv \mathbf{B} \mathbf{B}^2 \mathbf{B} = \mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^4 &\equiv \mathbf{B} \mathbf{B}^3 \mathbf{B} \end{aligned} \quad , \text{ etc...}$$

De façon générale: $\mathbf{B}^n \equiv \mathbf{B} \mathbf{B}^{n-1} \mathbf{B}$.

De même:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^2 &\equiv \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^3 &\equiv \mathbf{B} \mathbf{W}^2 \mathbf{W} = \mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{W}) \mathbf{W} \quad , \text{ etc...} \end{aligned}$$

Idem pour les autres combinateurs élémentaires. Si $\mathfrak{A}$ est un combinateur élémentaire, $\mathfrak{A}^n \equiv \mathbf{B} \mathfrak{A}^{n-1} \mathfrak{A}$.

Les puissances de $\mathbf{B}$ sont des combinateurs très importants. Appliquées à un combinateur quelconque, elles ont pour effet de reculer son action d'autant de rangs que l'indique l'exposant. En termes de calcul- λ , on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 (x_2 x_3 x_4) \\ \mathbf{B}^3 &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. x_1 (x_2 x_3 x_4 x_5), \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ opère le groupement de la 2^{ème} et de la 3^{ème} variable. $\mathbf{B} \mathbf{B}$ recule l'action de $\mathbf{B}$ d'un rang et opère donc le groupement de la 3^{ème} et de la 4^{ème} variable. En général, $\mathbf{B}^n \mathbf{B}$ opère le groupement de la $(n+2)$ ^{ème} et de la $(n+3)$ ^{ème} variable. $\mathbf{W}$ redouble la seconde variable. $\mathbf{B}^n \mathbf{W}$ redouble la $(n+2)$ ^{ème} variable. $\mathbf{C}$ intervertit la 2^{ème} et la 3^{ème} variable. $\mathbf{B}^n \mathbf{C}$ intervertit la $(n+2)$ ^{ème} et la $(n+3)$ ^{ème} variable.

232.- Les combinateurs $\mathbf{B}^n \mathbf{I}$

Ces combinateurs reproduisent les variables dans l'ordre naturel de leurs indices. $\mathbf{I}$ donne 1 variable, $\mathbf{B} \mathbf{I}$ donne 2 variables, en général $\mathbf{B}^n \mathbf{I}$ donne $(n+1)$ variables.

$$(\mathbf{B}^n \mathbf{I} = \lambda x_1 x_2 \dots x_{n+1}. x_1 x_2 \dots x_{n+1}.)$$

233.- Superposition de combinateurs $\mathbf{B}$

Il arrive souvent que l'on ait une superposition de combinateurs $\mathbf{B}$, comme dans la formule suivante: $\mathbf{B} (\mathbf{B} (\mathbf{B} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C}) \mathfrak{D}$, où $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ sont des formules- λ (que l'on pourrait naturellement exprimer en termes de combinateurs). Il est utile de définir des combinateurs correspondant à de telles superpositions de combinateurs $\mathbf{B}$.

La formule- λ qui correspond au combinateur $\mathbf{B}$ élémentaire est une formule qui peut servir à représenter la fonction de multiplication. Appelons $\mathbf{M}_1$ cette formule⁽¹⁰⁾. $\mathbf{M}_1$ peut être considéré aussi com-

⁽¹⁰⁾ La notation avec indices utilisée ici pourrait faire penser aux combinateurs différés de Curry (CURRY & FEYS, p.165). En réalité, la superposition de combinateurs $\mathbf{B}$ dont il est question ici est d'une autre forme que celle qui intervient dans les combinateurs différés.

me un combinateur (identique à **B**). On pourra représenter la superposition de 2, 3, ... combinateurs **B** au moyen de combinateurs $M_2, M_3, \dots$, définis comme suit:

$$\begin{aligned} M_2 &\equiv B^2 B M_1 \\ M_3 &\equiv B^3 B M_2, \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

En général:

$$M_n \equiv B^n B M_{n-1} .$$

Voyons comment agissent ces combinateurs.

$$\begin{aligned} M_1 \mathfrak{A} \mathfrak{B} &= B \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ M_2 \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} &= B (M_1 \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C} \\ &= B (B \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C} \\ M_3 \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D} &= B (M_2 \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) \mathfrak{D} \\ &= B (B (B \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C}) \mathfrak{D} . \end{aligned}$$

Vérification pour M_2 :

$$\begin{aligned} B^2 B M_1 &= (\lambda x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot x_1 (x_2 x_3 x_4)) B M_1 \\ &= \lambda x_3 x_4 \cdot B (M_1 x_3 x_4) . \\ B^2 B M_1 \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} &= B (M_1 \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C} \\ &= B (B \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \mathfrak{C} . \end{aligned}$$

En général, pour obtenir une superposition de n combinateurs **B** du type indiqué plus haut, il suffit de disposer d'une suite de $(n + 2)$ variables, toutes les variables à partir de la deuxième étant groupées. Il faut donc utiliser le combinateur B^n . En appliquant B^n à **B** et au combinateur M_{n-1} , on ajoute un **B** à la suite des **B** qui figurent déjà dans le combinateur M_{n-1} .

Les combinateurs M_i permettent de représenter la multiplication entre i termes. Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ sont les formules- λ qui correspondent respectivement aux termes $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$,

$$\begin{aligned} M_1 \mathfrak{A} \mathfrak{B} &\text{ correspond à } (\tau_1 \times \tau_2) \\ M_2 \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} &\text{ correspond à } (\tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3), \text{ et ainsi de suite.} \end{aligned}$$

234.- Les permutateurs non élémentaires

Dans ce qui suit (en 422), nous aurons à utiliser des combinateurs qui réalisent certaines permutations sur une suite de variables.

Soit une suite de variables. Il s'agit de réaliser une permutation qui fasse venir la j ème variable à la i ème place (i est supposé plus petit que j et plus grand que 1). On peut représenter cette opération

au moyen d'un combinateur qui effectue une suite d'inversions. Nous désignerons par C_{ij} ce combinateur. On peut le définir comme suit:

$$C_{ij} \equiv M_{j-i-1} (B^{j-3} C) (B^{j-4} C) \dots (B^{i-2} C).$$

$(B^{j-3} C)$ intervertit la j ème et la $(j-1)$ ème variable; $(B^{j-4} C)$ intervertit la $(j-1)$ ème et la $(j-2)$ ème variable; et ainsi de suite. Finalement $(B^{i-2} C)$ intervertit la $(i+1)$ ème et la i ème variable. Dans le cas où $i=2$, $(i-2) = 0$. Pour uniformiser les notations, on adoptera la convention suivante: $B^0 \equiv I$.

Dans le cas général, nous avons en tout $(j-i)$ inversions. Le combinateur M_{j-i-1} permet de réaliser ces opérations successivement. Dans le cas, non encore prévu, où $i=1$, on peut réaliser la permutation voulue en utilisant $C_{2(j+1)} I$.

Nous appellerons les combinateurs du type C_{ij} des permutateurs non élémentaires. Le permutateur élémentaire C est identique au combinateur C_{23} .

24.- Le combinateur K

Il existe un combinateur, appelé K , qu'il n'est pas possible de définir au moyen d'une formule- λ , mais que l'on peut définir au moyen d'une formule- λ - K . Il est nécessaire, en effet, pour définir ce combinateur au moyen d'un opérateur d'abstraction, de pratiquer une abstraction sur une variable qui ne figure pas dans la formule sur laquelle porte l'abstraction. La définition du concept de *formule bien formée* dans le calcul- λ - K rend possible une telle opération. Le combinateur K peut être défini comme suit:

$$K \equiv \lambda x_1 x_2. x_1 .$$

Ce combinateur est un opérateur d'élimination. Appliqué à une formule du type $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$, il la transforme en la formule $\mathfrak{A}$, éliminant ainsi la partie $\mathfrak{B}$ de la formule. On a en effet:

$$K \mathfrak{A} \mathfrak{B} = (\lambda x_1 x_2. x_1) \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{A} .$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons un système de combinateurs contenant, outre B , C , W et I , le combinateur K . Il serait possible cependant d'utiliser uniquement les combinateurs K et S , car le système formé par ces deux combinateurs est un système complet. Les combinateurs B , C , W et I peuvent en effet être exprimés en fonction de K et de S .

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &\equiv \mathbf{S K K} \\
\mathbf{B} &\equiv \mathbf{S (K S) K} \\
\mathbf{W} &\equiv \mathbf{S S (K I)} \\
\mathbf{C} &\equiv \mathbf{S (B B S) (K K)} .
\end{aligned}$$

3.- LE ZÉRO, LA DYADE ET LES SÉLECTEURS

Avant d'aborder la représentation des fonctions récursives en termes de calcul- λ - $\mathbf{K}$, il importe de donner les définitions de quelques formules du calcul- λ - $\mathbf{K}$ qui seront utilisées dans cette représentation. Ces formules peuvent être traduites en termes purement combinatoires.

31.- *Le zéro*

Il existe une formule- λ - $\mathbf{K}$ qui correspond au zéro. Elle intervient dans la formulation de l'arithmétique récursive en termes de calcul- λ - $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \lambda x_1 x_2. x_2 .$$

En termes combinatoires:

$$\mathbf{Z}_0 \equiv \mathbf{K I} .$$

On a en effet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K I} &= (\lambda x_1 x_2. x_1) (\lambda y. y) \\
&= \lambda x_2. (\lambda y. y) \\
&= \lambda x_2 y. y \\
&= \lambda x_1 x_2. x_2 = \mathbf{Z}_0 .
\end{aligned}$$

$\mathbf{Z}_0$ peut donc être considéré comme un combinateur. (Notons ici que le calcul- λ ne contient pas de formule correspondant au zéro.)

32.- *La dyade*

Cette formule joue, dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$, un rôle analogue à celui que joue la triade dans le calcul- λ . Elle sert à construire des paires ordonnées, dont on pourra sélectionner soit le premier, soit le second élément.

$$\mathbf{D} \equiv \lambda x_1 x_2 x_3. x_3 x_1 x_2 .$$

Définition combinatoire:

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{B C (C I)} .$$

Justification de cette définition.- Pour obtenir la formule qui définit **D**, il faut partir de trois variables, intervertir la seconde et la troisième, puis intervertir la première et la seconde. L'opérateur **C** réalise l'inversion de la seconde et de la troisième variable, l'opérateur **(C I)** réalise l'inversion de la première et de la seconde variable. Enfin, pour combiner l'action de ces deux opérateurs, on a besoin de l'opérateur **B**.

$$\begin{aligned} \mathbf{C I} &= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_3 x_2) (\lambda y. y) \\ &= \lambda x_2 x_3. (\lambda y. y) x_3 x_2 \\ &= \lambda x_2 x_3. x_3 x_2 = \lambda x_1 x_2. x_2 x_1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B C (C I)} &= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_1 (x_2 x_3)) \mathbf{C (C I)} = \lambda x_3. \mathbf{C ((C I) x_3)} \\ &= \lambda x_3. (\lambda y_1 y_2 y_3. y_1 y_3 y_2) ((\lambda z_1 z_2. z_2 z_1) x_3) \\ &= \lambda x_3. (\lambda y_2 y_3. (\lambda z_2. z_2 x_3) y_3 y_2) \\ &= \lambda x_3. (\lambda y_2 y_3. y_3 x_3 y_2) \\ &= \lambda x_3 y_2 y_3. y_3 x_3 y_2 \\ &= \lambda x_1 x_2 x_3. x_3 x_1 x_2 = \mathbf{D} . \end{aligned}$$

33.- Les sélecteurs

Les sélecteurs sont des opérateurs qui sélectionnent (ou ne retiennent que) la première ou la deuxième composante d'une dyade.

331.- Le sélecteur $\mathbf{D}_1$.

$$\mathbf{D}_1 = \lambda x. (\lambda y. y \mathbf{K}) x .$$

Action de $\mathbf{D}_1$:

$$\mathbf{D}_1 (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} .$$

En effet:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) &= (\lambda x. (\lambda y. y \mathbf{K}) x) (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \\ &= (\lambda y. y \mathbf{K}) (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \\ &= \mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{K} \\ &= \mathbf{B C (C I)} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{K} \\ &= \mathbf{C (C I \mathfrak{A})} \mathfrak{B} \mathbf{K} \\ &= \mathbf{C I \mathfrak{A} K} \mathfrak{B} \\ &= \mathbf{I K \mathfrak{A} \mathfrak{B}} \\ &= \mathbf{K \mathfrak{A} \mathfrak{B}} = \mathfrak{A} . \end{aligned}$$

Définition combinatoire:

$$\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{BI}(\mathbf{CIK}) .$$

Justification de cette définition:

$$\begin{aligned} \mathbf{BI} &= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_1 (x_2 x_3)) (\lambda y. y) \\ &= \lambda x_2 x_3. (\lambda y. y) (x_2 x_3) \\ &= \lambda x_2 x_3. x_2 x_3 \\ &= \lambda x_1 x_2. x_1 x_2 \\ \mathbf{CIK} &= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_1 x_3 x_2) (\lambda z. z) \mathbf{K} \\ &= \lambda x_3. ((\lambda z. z) x_3) \mathbf{K} \\ &= \lambda x_3. x_3 \mathbf{K} = \lambda y. y \mathbf{K} . \\ \mathbf{BI}(\mathbf{CIK}) &= (\lambda x_1 x_2. x_1 x_2) (\lambda y. y \mathbf{K}) \\ &= \lambda x_2. (\lambda y. y \mathbf{K}) x_2 \\ &= \lambda x. (\lambda y. y \mathbf{K}) x . \end{aligned}$$

332.- Le sélecteur $\mathbf{D}_2$

$$\mathbf{D}_2 \equiv \lambda x. (\lambda y. y (\mathbf{KI})) x .$$

Action de $\mathbf{D}_2$:

$$\mathbf{D}_2 (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} .$$

En effet:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2 (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) &= (\lambda x. (\lambda y. y (\mathbf{KI})) x) (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \\ &= (\lambda y. y (\mathbf{KI})) (\mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \\ &= \mathbf{D} \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{KI}) \\ &= \mathbf{BC} (\mathbf{CI}) \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{KI}) \\ &= \mathbf{C} (\mathbf{CI} \mathfrak{A}) \mathfrak{B} (\mathbf{KI}) \\ &= \mathbf{CI} \mathfrak{A} (\mathbf{KI}) \mathfrak{B} \\ &= \mathbf{I} (\mathbf{KI}) \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ &= \mathbf{KI} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ &= \mathbf{I} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} . \end{aligned}$$

Définition combinatoire:

$$\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{BI}(\mathbf{CI}(\mathbf{KI})) .$$

Justification de cette définition:

$$\begin{aligned} \mathbf{CI} &= \lambda x_1 x_2. x_2 x_1 \\ \mathbf{CI}(\mathbf{KI}) &= \lambda y. y (\mathbf{KI}) \\ \mathbf{BI}(\mathbf{CI}(\mathbf{KI})) &= (\lambda x_1 x_2. x_1 x_2) (\lambda y. y (\mathbf{KI})) \\ &= \lambda x. (\lambda y. y (\mathbf{KI})) x . \end{aligned}$$

4.- REPRÉSENTATION DE LA RÉCURSION PRIMITIVE DANS LE CALCUL- λ -**K**

Nous allons montrer que toute fonction récursive primitive d'entiers est λ -**K**-définissable. Il suffit pour cela de montrer comment les différentes étapes de la définition de la récursivité primitive peuvent être représentées dans le calcul- λ -**K**.

41.- Les fonctions de base

411.- La fonction successeur

La définition de la fonction *successeur* est la même dans le calcul- λ -**K** que dans le calcul- λ .

$$S_C \equiv \lambda x_1 x_2 x_3. x_2(x_1 x_2 x_3)$$

Dans le calcul- λ , on représente l'entier n ($n \geq 1$) par la formule Z_n , définie comme suit:

$$Z_n \equiv \lambda x_1 x_2. x_1 x_1 \dots x_1 x_2$$

(étant entendu que dans cette formule la variable x_1 figure en n mentions successives). L'effet de l'opérateur S_C est de transformer Z_n en Z_{n+1} :

$$S_C Z_n = Z_{n+1} .$$

Ceci s'applique en particulier au cas où S_C est appliqué à Z_0 (formule qui n'existe pas dans le calcul- λ).

$$\begin{aligned} S_C Z_0 &= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_2(x_1 x_2 x_3)) (\lambda y_1 y_2. y_2) \\ &= \lambda x_2 x_3. x_2 (\lambda y_1 y_2. y_2) x_2 x_3 \\ &= \lambda x_1 x_2. x_1 x_2 = Z_1 . \end{aligned}$$

Définition combinatoire:

$$S_C \equiv (M_3 (B^3 I) (B W) C (B B^2)) I .$$

Justification de cette définition.- On peut construire la formule définissant S_C et partant d'une suite de quatre variables, en redoublant la troisième, en intervertissant la seconde et la troisième dans le résultat obtenu, en groupant ensuite les trois dernières et en appliquant enfin le résultat à I . ($B^3 I$) donne quatre variables dans l'ordre naturel des indices; ($B W$) redouble la troisième variable; C intervertit la seconde et la troisième et ($B B^2$) opère le groupement voulu. Pour faire agir ces trois opérateurs successivement, on doit utiliser M_3 . Enfin en appliquant le résultat obtenu à I , on a S_C .

$$\begin{aligned}
\mathbf{B^3 I} &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 x_2 x_3 x_4 \\
\mathbf{B (B^3 I) (B W)} &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 x_2 x_3 x_4 \\
\mathbf{B (B (B^3 I) (B W)) C} &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 x_3 x_2 x_3 x_4 \\
\mathbf{B (B (B (B^3 I) (B W)) C) (B B^2)} &= \mathbf{M_3 (B^3 I) (B W) C (B B^2)} \\
&= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4. x_1 x_3 (x_2 x_3 x_4) \\
\mathbf{(M_3 (B^3 L) (B W) C (B B^2)) I} &= \lambda x_1 x_2 x_3. x_2 (x_1 x_2 x_3) .
\end{aligned}$$

On peut obtenir une définition beaucoup plus simple en se servant du combinateur $\mathbf{S}$ ⁽¹¹⁾ et en posant:

$$\mathbf{S_C} \equiv \mathbf{S B} .$$

412.- La fonction constante

Cette fonction peut être représentée par un opérateur qui, appliqué à une formule $\mathbf{Z_i}$ quelconque, donne toujours la formule $\mathbf{Z_0}$. Cet opérateur se définit comme suit:

$$\mathbf{C_t} \equiv \lambda x_1 x_2 x_3. x_3 .$$

Effet de l'opérateur $\mathbf{C_t}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C_t Z_i} &= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_3) \mathbf{Z_i} \\
&= \lambda x_2 x_3. x_3 = \lambda x_1 x_2. x_2 = \mathbf{Z_0} .
\end{aligned}$$

Définition combinatoire:

$$\mathbf{C_t} \equiv \mathbf{K Z_0} .$$

Justification de cette définition:

$$\mathbf{K Z_0 Z_i} = \mathbf{Z_0} .$$

413.- Fonctions de sélection

Ces fonctions peuvent être représentées par des opérateurs qui sélectionnent une variable dans une suite de n variables. Ces opérateurs sont du type:

$$\mathbf{S_{in}} \equiv \lambda x_1 x_2 \dots x_n. x_i .$$

Effet de l'opérateur $\mathbf{S_{in}}$ appliqué à une suite de n formules:

$$\mathbf{S_{in} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \dots \mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_i .$$

⁽¹¹⁾ V. CURRY & FEYS, p. 174.

Définition combinatoire:

$$S_{in} \equiv M_{n-1} (B^{n-1} I) (B^{n-2} K) \dots (B^{i-1} K) (B^{i-3} K) \dots (B K) K Z_0.$$

Justification de cette définition.- S_{in} doit agir sur une suite de n variables et supprimer la 1ère, la 2ème, ..., la $(i-1)$ ème, la $(i+1)$ ème, ... et la n ème. Il faut donc partir de $(B^{n-1} I)$, puis faire agir successivement, grâce à l'opérateur M_{n-1} , $(n-1)$ opérateurs de suppression. Pour supprimer une variable dont l'indice est plus grand que 2, il faut utiliser un opérateur de type $(B^n K)$, qui recule l'action de K de n rangs. Pour supprimer la seconde variable, il faut utiliser K , et pour supprimer la première il faut utiliser Z_0 .

On peut obtenir une définition plus simple de S_{in} en utilisant les puissances de K ⁽¹²⁾.

$$S_{in} \equiv K^{i-1} K^{n-i}$$

Justification de cette définition:

$$K^2 = B K K = \lambda x_1 x_2 x_3 x_1$$

$$K^3 = B K^2 K = \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 x_1$$

.....

$$K^n = B K^{n-1} K = \lambda x_1 x_2 \dots x_{n+1} x_1$$

$$K^{i-1} = \lambda x_1 x_2 \dots x_i x_1$$

$$K^{n-i} = \lambda x_1 x_2 \dots x_{n-i+1} x_1$$

$$\begin{aligned} K^{i-1} K^{n-i} &= (\lambda y_1 y_2 \dots y_i y_1) (\lambda z_1 z_2 \dots z_{n-i+1} z_1) \\ &= \lambda y_2 \dots y_i (\lambda z_1 z_2 \dots z_{n-i+1} z_1) \\ &= \lambda y_2 \dots y_i z_1 z_2 \dots z_{n-i+1} z_1 \\ &= \lambda x_1 \dots x_{i-1} x_i \dots x_n x_i \\ &= \lambda x_1 x_2 \dots x_n x_i = S_{in}. \end{aligned}$$

42.- Les opérations

421.- Application d'une fonction à une suite de n arguments

Si $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, ..., $\mathfrak{I}_n$ sont les formules- λ - K qui correspondent respectivement à la fonction φ et aux termes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, alors $\lambda x_1 x_2 \dots x_{n+1} x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ est la formule- λ - K qui correspond à l'application de la fonction φ à la suite des n termes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

On a en effet:

$$(\lambda x_1 x_2 \dots x_{n+1} x_1 x_2 \dots x_{n+1}) \mathfrak{F} \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \dots \mathfrak{I}_n = \mathfrak{F} \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \dots \mathfrak{I}_n.$$

⁽¹²⁾ V. CURRY & FEYS, p. 182.

Si $\mathfrak{F}, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ sont des combinateurs correspondant respectivement à la fonction φ et aux termes $\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_n$, l'application de la fonction φ à ces termes est représentée sous forme combinatoire par le combinateur $\mathfrak{F} \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \dots \mathfrak{I}_n$.

422. Opération de substitution

L'opération de substitution peut être représentée par un opérateur S_b . Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_n$, sont les formules- λ - $\mathbf{K}$ qui correspondent respectivement aux fonctions $\chi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ et aux arguments $x_1, x_2, \dots, x_n$, l'opérateur S_b permet d'obtenir une formule qui correspond à la fonction φ , définie au moyen des fonctions $\chi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ par le schéma de substitution. Cet opérateur est défini comme suit:

$$S_b \equiv \lambda x y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n \cdot x (y_1 z_1 z_2 \dots z_n) (y_2 z_1 z_2 \dots z_n) \dots (y_m z_1 z_2 \dots z_n) .$$

Mode d'action de cet opérateur:

$$S_b \mathfrak{A} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_m \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n = \mathfrak{A} (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n) \dots (\mathfrak{B}_m \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n) .$$

Cette formule correspond bien à la fonction φ .

On peut définir cet opérateur de façon combinatoire en utilisant le combinateur Φ_n^m de Curry ⁽¹³⁾.

Partons de l'opérateur Φ , défini comme suit:

$$\Phi \equiv \lambda x y_1 y_2 z \cdot x (y_1 z) (y_2 z) .$$

Définition combinatoire:

$$\Phi \equiv \mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{S}) \mathbf{B} .$$

Justification:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{S} \text{ (ou } \mathbf{S} \text{ différé d'un rang)} &= \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot x_1 x_2 x_4 (x_3 x_4) \\ \mathbf{B} (\mathbf{B} \mathbf{S}) \mathbf{B} &= (\lambda y_1 y_2 y_3 \cdot y_1 (y_2 y_3)) (\lambda x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot x_1 x_2 x_4 (x_3 x_4)) \mathbf{B} \\ &= \lambda y_3 \cdot (\lambda x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot x_1 x_2 x_4 (x_3 x_4)) (\mathbf{B} y_3) \\ &= \lambda y_3 \cdot \lambda x_2 x_3 x_4 \cdot \mathbf{B} y_3 x_2 x_4 (x_3 x_4) \\ &= \lambda y_3 x_2 x_3 x_4 \cdot y_3 (x_2 x_4) (x_3 x_4) \\ &= \lambda x y_1 y_2 z \cdot x (y_1 z) (y_2 z) \end{aligned}$$

Nous définissons le combinateur S_n de façon inductive, comme suit:

⁽¹³⁾ V. CURRY & FEYS, p. 171.

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv S \\
S_2 &\equiv B(B S_1) S \\
S_3 &\equiv B(B S_2) S \\
&\dots\dots \\
S_n &\equiv B(B S_{n-1}) S .
\end{aligned}$$

(Expressions en termes de formules- λ :

$$\begin{aligned}
S_1 &= S &= \lambda x y z. x z (y z) \\
B S_1 & &= \lambda x y_1 y_2 z. x y_1 z (y_2 z) \\
S_2 &= B(B S_1) S &= \lambda x y_1 y_2 z. x (y_1 z) (y_2 z) \\
B S_2 & &= \lambda x y_1 y_2 y_3 z. x y_1 z (y_2 z) (y_3 z) \\
S_3 &= B(B S_2) S &= \lambda x y_1 y_2 y_3 z. x z (y_1 z) (y_2 z) (y_3 z) \\
&\dots\dots \\
B S_{n-1} & &= \lambda x y_1 y_2 \dots y_n z. x y_1 z (y_2 z) \dots (y_n z) \\
S_n &= B(B S_{n-1}) S &= \lambda x y_1 y_2 \dots y_n z. x z (y_1 z) (y_2 z) \dots (y_n z) .
\end{aligned}$$

Nous définissons ensuite le combinateur Φ_n de façon inductive, comme suit:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &\equiv B \\
\Phi_2 &\equiv \Phi = B(B S) B \\
\Phi_3 &\equiv B(B S_2) B \\
&\dots\dots \\
\Phi_n &\equiv B(B S_{n-1}) B = B S_n K .
\end{aligned}$$

(Expressions en termes de formules- λ :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \lambda x y z. x (y z) \\
\Phi_2 &= \lambda x y_1 y_2 z. x (y_1 z) (y_2 z) \\
\Phi_3 &= \lambda x y_1 y_2 y_3 z. x (y_1 z) (y_2 z) (y_3 z) \\
&\dots\dots \\
\Phi_n &= \lambda x y_1 y_2 \dots y_n z. x (y_1 z) (y_2 z) \dots (y_n z) .
\end{aligned}$$

Passons maintenant aux puissances de Φ_n :

$$\begin{aligned}
\Phi_n^2 &= B \Phi_n \Phi_n \\
&= (\lambda x_1 x_2 x_3. x_1 (x_2 x_3)) \Phi_n \Phi_n \\
&= \lambda x_3. \Phi_n (\Phi_n x_3) \\
&= \lambda x_3. (\lambda x y_1 y_2 \dots y_n z. x (y_1 z) (y_2 z) \dots (y_n z)) \\
&\quad (\lambda y'_1 y'_2 \dots y'_n z'. x_3 (y'_1 z') (y'_2 z') \dots (y'_n z')) \\
&= \lambda x_3 y_1 y_2 \dots y_n z. (\lambda y'_1 y'_2 \dots y'_n z'. x_3 (y'_1 z') \\
&\quad (y'_2 z') \dots (y'_n z')) (y_1 z) (y_2 z) \dots (y_n z) \\
&= \lambda x_3 y_1 y_2 \dots y_n z z'. x_3 (y_1 z z') (y_2 z z') \dots (y_n z z') \\
&= \lambda x y_1 y_2 \dots y_n z_1 z_2. x (y_1 z_1 z_2) (y_2 z_1 z_2) \dots (y_n z_1 z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n^3 &= \mathbf{B} \Phi_n^2 \Phi_n \\ &= \lambda x y_1 y_2 \dots y_n z_1 z_2 z_3 \cdot x (y_1 z_1 z_2 z_3) (y_2 z_1 z_2 z_3) \dots \\ &\quad \dots (y_n z_1 z_2 z_3) \\ \dots\dots \\ \Phi_n^m &= \lambda x y_1 y_2 \dots y_n z_1 z_2 \dots z_m \cdot x (y_1 z_1 z_2 \dots z_m) (y_2 z_1 z_2 \dots z_m) \dots \\ &\quad \dots (y_n z_1 z_2 \dots z_m) \cdot \end{aligned}$$

On voit que $\mathbf{S}_b$ peut être défini comme suit:

$$\mathbf{S}_b \equiv \Phi_m^n$$

$$\text{(En effet: } \Phi_m^n = \lambda x y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n \cdot x (y_1 z_1 z_2 \dots z_n) (y_2 z_1 z_2 \dots z_n) \dots (y_m z_1 z_2 \dots z_n) \cdot \text{)}$$

423.- Opérateur de récursion primitive (de Bernays)

423.1.- Expression directe

On peut définir, dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$, un opérateur, $\mathbf{R}_C$, qui permet de donner une représentation, au moyen d'une formule- λ - $\mathbf{K}$, de toute fonction définie par un schéma de récursion primitive ⁽¹⁴⁾.

Définition de $\mathbf{R}_C$:

$$\mathbf{R}_C \equiv \lambda x_1 x_2 y_1 y_2 \dots y_n z \cdot \mathbf{D}_2 [z [\lambda t \cdot \mathbf{D} (\mathbf{S}_C (\mathbf{D}_1 t)) (x_2 (\mathbf{D}_1 t) (\mathbf{D}_2 t) y_1 y_2 \dots y_n)] (\mathbf{D} \mathbf{Z}_0 (x_1 y_1 y_2 \dots y_n))] \cdot$$

Soit φ une fonction définie au moyen des fonctions ψ et χ grâce au schéma de récursion primitive. Soient $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_n$, les formules- λ - $\mathbf{K}$ qui correspondent respectivement aux fonctions ψ et χ et aux arguments $x_1, x_2, \dots, x_n$.

L'opérateur $\mathbf{R}_C$, appliqué aux formules $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_n$, donne une formule qui correspond à la fonction φ .

Vérifions ce fait en examinant le mode d'action de $\mathbf{R}_C$.

423.2.- Mode d'action de $\mathbf{R}_C$

$$\text{Soit } \mathbf{R}_C \mathfrak{F} \mathfrak{G} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n = \mathfrak{H} \cdot$$

On a donc:

$$\mathfrak{H} = \lambda z \cdot \mathbf{D}_2 [z [\lambda t \cdot \mathbf{D} (\mathbf{S}_C (\mathbf{D}_1 t)) (\mathfrak{G} (\mathbf{D}_1 t) (\mathbf{D}_2 t) \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n)] (\mathbf{D} \mathbf{Z}_0 (\mathfrak{F} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n))] \cdot$$

⁽¹⁴⁾ La définition donnée ici est celle de Bernays. Elle utilise la fonction *successeur*. On peut aussi définir un opérateur de récursion en se servant de la fonction *prédécesseur*. V. en 52 ci-après.

Nous allons étudier l'action de $\mathfrak{H}$ par induction.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H} Z_0 &= D_2 [Z_0 [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n))] \\
 &= D_2 (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)) \\
 &= \mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n . \\
 \mathfrak{H} Z_1 &= D_2 [Z_1 [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n))] \\
 &= D_2 [[\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n))] \\
 &= D_2 [D [S_C (D_1 (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)))] \\
 &\quad [\mathfrak{G} (D_1 (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)))] \\
 &\quad (D_2 (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)) X_1 X_2 \dots X_n)] \\
 &= D_2 [D (S_C Z_0) (\mathfrak{G} Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n) X_1 X_2 \dots X_n)] \\
 &= \mathfrak{G} Z_0 (\mathfrak{H} Z_0) X_1 X_2 \dots X_n .
 \end{aligned}$$

Si on examine l'avant-dernière formule ci-dessus et si on se rappelle que $\mathfrak{H} Z_0 = \mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n$, on aperçoit que:

$$Z_1 [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)) = D (S_C Z_0) (\mathfrak{G} Z_0 (\mathfrak{H} Z_0) X_1 X_2 \dots X_n) .$$

Supposons que:

- 1) $\mathfrak{H} (S_C Z_n) = \mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n$, et que
- 2) $(S_C Z_n) [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)) = D (S_C Z_n) (\mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n)$.

On a alors, en passant à $S_C (S_C Z_n)$:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H} (S_C (S_C Z_n)) &= D_2 [S_C (S_C Z_n) [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n))] \\
 &= D_2 [[\lambda t. -] [(S_C Z_n) [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n))]] \\
 &= D_2 [[\lambda t. -] [D (S_C Z_n) (\mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n)]] \\
 &= D_2 [D [S_C (D_1 (D (S_C Z_n) (\mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n)))] \\
 &\quad [\mathfrak{G} (D_1 (D (S_C Z_n) (\mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n)))] \\
 &\quad (D_2 (D (S_C Z_n) (\mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n)) X_1 X_2 \dots X_n)] \\
 &= D_2 [D [S_C (S_C Z_n)] [\mathfrak{G} (S_C Z_n) (\mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n) X_1 X_2 \dots X_n]] \\
 &= \mathfrak{G} (S_C Z_n) (\mathfrak{H} (S_C Z_n)) X_1 X_2 \dots X_n .
 \end{aligned}$$

On voit que:

$$S_C (S_C Z_n) [\lambda t. -] (D Z_0 (\mathfrak{F} X_1 X_2 \dots X_n)) = D (S_C (S_C Z_n)) (\mathfrak{G} (S_C Z_n) (\mathfrak{H} (S_C Z_n)) X_1 X_2 \dots X_n) .$$

On a donc, pour n quelconque:

$$\mathfrak{H} (S_C Z_n) = \mathfrak{G} Z_n (\mathfrak{H} Z_n) X_1 X_2 \dots X_n .$$

423.3.- Expression décomposée

On peut présenter d'une autre manière l'expression de la récursion primitive dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$, en utilisant une formulation qui procède par étapes ⁽¹⁵⁾.

423.31.- Énoncé

Définissons comme suit les opérateurs $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ et $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}_1 \equiv \lambda x y z. \mathbf{D} (\mathbf{S}_C y) (x y z)$$

$$\mathbf{R}_2 \equiv \lambda x y. \mathbf{R}_1 x (\mathbf{D}_1 y) (\mathbf{D}_2 y)$$

$$\mathbf{R}_3 \equiv \lambda x y z. z (\mathbf{R}_2 x) (\mathbf{D} \mathbf{Z}_0 y)$$

$$\mathbf{R} \equiv \lambda x y z. \mathbf{D}_2 (\mathbf{R}_3 x y z) .$$

Soit φ une fonction définie au moyen des fonctions ψ et χ grâce au schéma de récursion primitive. Soient $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_n$, les formules- λ - $\mathbf{K}$ qui correspondent respectivement aux fonctions ψ et χ et aux arguments $x_1, x_2, \dots, x_n$.

La fonction φ est représentée dans le calcul- λ - $\mathbf{K}$ par la formule $\mathfrak{H}$, définie comme suit:

$$\mathfrak{H} \equiv \lambda x_1 x_2 \dots x_n z. \mathbf{R} \mathfrak{G}^* \mathfrak{F} z x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\text{où } \mathfrak{G}^* \equiv \lambda y z x_1 x_2 \dots x_n. \mathfrak{G} y (z x_1 x_2 \dots x_n) x_1 x_2 \dots x_n .$$

423.32.- Démonstration

Pour démontrer cet énoncé, nous allons d'abord étudier le mode d'action de l'opérateur $\mathbf{R}$. Nous montrerons ensuite quel est le mode d'action de la formule $\mathfrak{H}$.

423.321.- Mode d'action de $\mathbf{R}$

Montrons que:

$$\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_0 = \mathfrak{B}$$

$$\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) = \mathfrak{A} \mathbf{Z}_n (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) .$$

Posons:

$$\mathfrak{R}_1 \equiv \mathbf{R}_1 \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{R}_2 \equiv \mathbf{R}_2 \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{L} \equiv \mathbf{R}_3 \mathfrak{A} \mathfrak{B}$$

$$\text{et } \mathfrak{M} \equiv \mathbf{D} \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B}$$

⁽¹⁵⁾ L'exposé qui suit est basé sur des indications de M. Curry, données à un séminaire de logique mathématique qui a eu lieu à Louvain au cours de l'année 1950-1951.

Par définition:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \lambda y z. \mathbf{D} (\mathbf{S}_C y) (\mathfrak{A} y z) \\ \mathfrak{R}_2 &= \lambda y. \mathfrak{R}_1 (\mathbf{D}_1 y) (\mathbf{D}_2 y) \\ \mathfrak{L} &= \lambda z. z \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M} \\ \mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} &= \lambda z. \mathbf{D}_2 (\mathfrak{L} z) . \end{aligned}$$

Voyons comment agit $\mathfrak{L}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{Z}_0 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{M} = \mathbf{D} \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B} \\ \mathfrak{L} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) &= \mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{R}_2 (\mathbf{Z}_n \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M}) \\ &= \mathfrak{R}_2 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n) && \text{(puisque } \mathfrak{L} \mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_n \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M}) \\ &= \mathfrak{R}_1 (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) (\mathbf{D}_2 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) \\ &= \mathfrak{R}_1 (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) \\ &&& \text{(puisque } \mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n = \mathbf{D}_2 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) \\ &= \mathbf{D} (\mathbf{S}_C (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n))) (\mathfrak{A} (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n)) . \end{aligned}$$

Montrons maintenant par induction que

$$\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n .$$

$$\text{On a: } \mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_0) = \mathbf{D}_1 (\mathbf{D} \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B}) = \mathbf{Z}_0 .$$

Supposons que $\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n)) &= \mathbf{D}_1 \mathbf{D} (\mathbf{S}_C (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n))) \\ &\quad (\mathfrak{A} (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n)) \\ &= \mathbf{S}_C (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) \\ &= \mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n . \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est établie pour n quelconque. Nous avons donc bien:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{D}_2 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_0) \\ &= \mathbf{D}_2 (\mathbf{D} \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B}) \\ &= \mathfrak{B} \\ \text{et } \mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) &= \mathbf{D}_2 (\mathfrak{L} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n)) \\ &= \mathbf{D}_2 (\mathbf{D} (\mathbf{S}_C (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)))) (\mathfrak{A} (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n)) \\ &= \mathfrak{A} (\mathbf{D}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n)) (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) \\ &= \mathfrak{A} \mathbf{Z}_n (\mathbf{R} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) . \end{aligned}$$

423.322.- *Mode d'action de $\mathfrak{H}$*

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{R} \mathfrak{G}^* \mathfrak{F} \mathbf{Z}_0 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \\ &= \mathfrak{F} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \quad (\text{puisque } \mathbf{R} \mathfrak{G}^* \mathfrak{F} \mathbf{Z}_0 = \mathfrak{F}) \\ \mathfrak{H} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) &= \mathbf{R} \mathfrak{G}^* \mathfrak{F} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \\ &= \mathfrak{G}^* \mathbf{Z}_n (\mathbf{R} \mathfrak{G}^* \mathfrak{F} \mathbf{Z}_n) \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \\ &= \mathfrak{G} \mathbf{Z}_n (\mathbf{R} \mathfrak{G}^* \mathfrak{F} \mathbf{Z}_n \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n) \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \\ &= \mathfrak{G} \mathbf{Z}_n (\mathfrak{H} \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n \mathbf{Z}_n) \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \dots \mathfrak{X}_n . \end{aligned}$$

423.33.- *Expression de $\mathbf{R}$ en termes de combinateurs*

$$\begin{aligned} 423.331.- \mathbf{R}_1 &\equiv \mathbf{R}_1^* \mathbf{D} \mathbf{S}_C \\ \text{où } \mathbf{R}_1^* &\equiv \mathbf{M}_3 (\mathbf{B}^2 \mathbf{W}) (\mathbf{B} \mathbf{C}) (\mathbf{B}^2 \mathbf{B}^2) \mathbf{B} . \end{aligned}$$

Justification de cette définition.

On doit avoir: $\mathbf{R}_1^* = \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \cdot x_1 (x_2 x_4) (x_3 x_4 x_5)$.

On doit donc partir de l'opérateur $(\mathbf{B}^2 \mathbf{W})$, qui redouble la 4ème variable, puis intervertir la 3ème et la 4ème variable (par $(\mathbf{B} \mathbf{C})$), puis grouper les trois dernières variables (par $(\mathbf{B}^2 \mathbf{B}^2)$), et enfin grouper la 2ème et la 3ème variable (par $\mathbf{B}$). Pour appliquer successivement ces quatre opérations, on doit se servir du combinateur $\mathbf{M}_3$.

$$\begin{aligned} 423.332.- \mathbf{R}_2 &\equiv \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \\ \text{où } \mathbf{R}_2^* &\equiv \mathbf{M}_4 (\mathbf{B}^3 \mathbf{W}) \mathbf{C}_{24} (\mathbf{B}^2 \mathbf{C}) (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}) (\mathbf{B} \mathbf{B}) . \end{aligned}$$

Justification de cette définition.

On doit avoir: $\mathbf{R}_2^* = \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \cdot x_1 x_4 (x_2 x_5) (x_3 x_5)$.

On doit donc partir de l'opérateur $(\mathbf{B}^3 \mathbf{W})$, qui redouble la 5ème variable, puis faire passer la 4ème variable à la deuxième place (par $\mathbf{C}_{24}$), puis intervertir la 4ème et la 5ème variable (par $(\mathbf{B}^2 \mathbf{C})$), puis grouper les deux dernières (par $(\mathbf{B}^3 \mathbf{B})$), et enfin grouper la 3ème et la 4ème (par $(\mathbf{B} \mathbf{B})$). Pour appliquer successivement ces cinq opérations, on doit se servir de l'opérateur $\mathbf{M}_4$.

$$\begin{aligned} 423.333.- \mathbf{R}_3 &\equiv \mathbf{R}_3^* \mathbf{R}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{Z}_0 \\ \text{où } \mathbf{R}_3^* &\equiv (\mathbf{M}_3 \mathbf{C}_{27} \mathbf{C}_{46} (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}^2) (\mathbf{B} \mathbf{B})) \mathbf{I} . \end{aligned}$$

Justification de cette définition.

On doit avoir: $\mathbf{R}_3^* = \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \cdot x_6 (x_1 x_4) (x_2 x_3 x_5)$.

On doit donc partir de l'opérateur C_{27} , qui fait passer la 7ème variable au 2ème rang, puis faire passer la 6ème variable au 4ème rang (par C_{46}), puis grouper les trois dernières (par $(B^3 B^2)$), et enfin grouper la 3ème et la 4ème (par $(B B)$).

Pour appliquer successivement ces quatre opérations, on doit se servir du combinateur M_3 . Enfin, en appliquant le combinateur ainsi obtenu à I , on obtient le résultat voulu.

$$423.334.- \mathbf{R} \equiv \mathbf{B}^3 \mathbf{D}_2 \mathbf{R}_3 .$$

Justification de cette définition.

$$\text{On doit avoir: } \mathbf{R} = [\lambda x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. x_1 (x_2 x_3 x_4 x_5)] \mathbf{D}_2 \mathbf{R}_3 .$$

L'expression combinatoire complète de $\mathbf{R}$ est donc:

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}^3 \mathbf{D}_2 [\mathbf{R}^*_3 [\mathbf{R}^*_2 [\mathbf{R}^*_1 \mathbf{D} \mathbf{S}] \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2] \mathbf{D} \mathbf{Z}_0] ,$$

où $\mathbf{R}^*_1$, $\mathbf{R}^*_2$ et $\mathbf{R}^*_3$ sont définis comme il a été indiqué.

43.- Conclusion

Toute fonction d'entiers φ qui peut être obtenue à partir des fonctions de base σ , κ et σ_{in} au moyen des opérations décrites en 112, peut être représentée au moyen d'une formule- λ - $\mathbf{K}$ qui s'obtient à partir des formules $\mathbf{S}_C$, $\mathbf{C}_t$ et $\mathbf{S}_{in}$ au moyen des opérateurs de substitution et de récursion primitive. Cette fonction est donc λ - $\mathbf{K}$ -définissable. Comme l'expression qui la représente prend pour arguments et a pour valeurs des formules de type $\mathbf{Z}_\alpha$, la définition en termes de formules- λ - $\mathbf{K}$ est équivalente à la définition en termes de formules- λ et la fonction φ est également λ -définissable. Il suit de ce qui précède qu'elle peut également être représentée au moyen de combinateurs dans le système $\mathbf{B-C-W-I-K}$.

5.- NOTES COMPLÉMENTAIRES

51.- Expression de la récursion primitive au moyen de l'opérateur dyade de Curry

51.1.- L'opérateur dyade de Curry

Curry donne de l'opérateur *dyade* une expression différente de celle de Bernays (laquelle figure au 32 ci-dessus) ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁶⁾ V. CURRY & FEYS, p. 174.

$$\mathbf{D}_C \equiv \lambda x y z. z (\mathbf{K} y) x .$$

(Expression combinatoire:

$$\mathbf{D}_C \equiv (\mathbf{M}_2 \mathbf{C}_{25} (\mathbf{B}^2 \mathbf{C}) (\mathbf{B} \mathbf{B})) \mathbf{I} \mathbf{K} .)$$

Pour opérer la sélection du premier ou du second élément d'une paire ordonnée, il suffit d'utiliser $\mathbf{Z}_0$ ou $\mathbf{Z}_{n+1}$ ($n \geq 0$).

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_C \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{Z}_0 (\mathbf{K} \mathfrak{B}) \mathfrak{A} \\ &= (\lambda x y. y) (\mathbf{K} \mathfrak{B}) \mathfrak{A} \\ &= \mathfrak{A} \\ \mathbf{D}_C \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_{n+1} &= \mathbf{D}_C \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) \\ &= \mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n (\mathbf{K} \mathfrak{B}) \mathfrak{A} \\ &= \mathbf{K} \mathfrak{B} (\mathbf{Z}_n (\mathbf{K} \mathfrak{B}) \mathfrak{A}) \\ &= \mathfrak{B} . \end{aligned}$$

Pour $n > 0$, on a donc: $\mathbf{D}_C \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n = \mathfrak{B}$.

51.2- Opérateur de récursion primitive utilisant $\mathbf{D}_C$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{CR} \equiv \lambda x_1 x_2 y_1 y_2 \dots y_n z. [z [\lambda t. \mathbf{D}_C (\mathbf{S}_C (t \mathbf{Z}_0)) \\ (x_2 (t \mathbf{Z}_0) (t \mathbf{Z}_1) y_1 y_2 \dots y_n)] (\mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 (x_1 y_1 y_2 \dots y_n))] \mathbf{Z}_0 . \end{aligned}$$

Le mode d'action de $\mathbf{R}_{CR}$ est le même que celui de $\mathbf{R}_C$.

51.3.- Expression décomposée

Nous pouvons, comme en 423.3, introduire une expression décomposée, au moyen des opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{H1} &\equiv \lambda x y z. \mathbf{D}_C (\mathbf{S}_C y) (x y z) \\ \mathbf{R}_{H2} &\equiv \lambda x y. \mathbf{R}_{H1} x (y \mathbf{Z}_0) (y \mathbf{Z}_1) \\ \mathbf{R}_{H3} &\equiv \lambda x y z. z (\mathbf{R}_{H2} x) (\mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 y) \\ \mathbf{R}_H &\equiv \lambda x y z. \mathbf{R}_{H3} x y z \mathbf{Z}_1 \end{aligned}$$

51.4.- Mode d'action de $\mathbf{R}_H$

$$\begin{aligned} \text{Posons: } \mathfrak{R}_1 &\equiv \mathbf{R}_{H1} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{R}_2 &\equiv \mathbf{R}_{H2} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{L} &\equiv \mathbf{R}_{H3} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ \text{et } \mathfrak{M} &= \mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B} \end{aligned}$$

Par définition:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \lambda y z. \mathbf{D}_C (\mathbf{S}_C y) (\mathfrak{A} y z) \\ \mathfrak{R}_2 &= \lambda y. \mathbf{R}_{H1} \mathfrak{A} (y \mathbf{Z}_0) (y \mathbf{Z}_1) \\ &= \lambda y. \mathfrak{R}_1 (y \mathbf{Z}_0) (y \mathbf{Z}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \lambda z. z (\mathbf{R}_{H2} \mathfrak{A}) (\mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B}) \\ &= \lambda z. z \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M} \\ \mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} &= \lambda z. \mathfrak{L} z \mathbf{Z}_1 . \end{aligned}$$

Voyons comment agit $\mathfrak{L}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{Z}_0 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{M} = \mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B} \\ \mathfrak{L} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) &= \mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{R}_2 (\mathbf{Z}_n \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M}) \\ &= \mathfrak{R}_2 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n) \quad (\text{parce que } \mathfrak{L} \mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_n \mathfrak{R}_2 \mathfrak{M}) \\ &= \mathfrak{R}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_1) \\ &= \mathfrak{R}_1 (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) (\mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) \\ &= \mathbf{D}_C [\mathbf{S}_C (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0)] [\mathfrak{A} (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) (\mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n)] . \end{aligned}$$

Montrons par induction que:

$$\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_n$$

$$\text{On a: } \mathfrak{L} \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_0 = \mathfrak{M} \mathbf{Z}_0 = \mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B} \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0 .$$

Supposons que $\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_n$

$$\begin{aligned} \text{Alors: } \mathfrak{L} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{D}_C [\mathbf{S}_C (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0)] [\mathfrak{A} (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) \\ &\quad (\mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n)] \mathbf{Z}_0 \\ &= \mathbf{S}_C (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) \\ &= \mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n . \end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_0 &= \mathfrak{L} \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_1 = \mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 \mathfrak{B} \mathbf{Z}_1 = \mathfrak{B} \\ \mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) &= \mathfrak{L} (\mathbf{S}_C \mathbf{Z}_n) \mathbf{Z}_1 \\ &= \mathbf{D}_C [\mathbf{S}_C (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0)] [\mathfrak{A} (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) (\mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n)] \mathbf{Z}_1 \\ &= \mathfrak{A} (\mathfrak{L} \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_0) (\mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) \\ &= \mathfrak{A} \mathbf{Z}_n (\mathbf{R}_H \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathbf{Z}_n) . \end{aligned}$$

51.5.- Expression de $\mathbf{R}_H$ en termes de combinateurs

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{H1} &\equiv \mathbf{R}_{H1}^* \mathbf{D}_C \mathbf{S}_C \\ \text{où } \mathbf{R}_{H1}^* &\equiv \mathbf{M}_3 (\mathbf{B}^2 \mathbf{W}) (\mathbf{B} \mathbf{C}) (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}^2) \mathbf{B} \\ \mathbf{R}_{H2} &\equiv \mathbf{R}_{H2}^* \mathbf{R}_{H1} \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_1 \\ \text{où } \mathbf{R}_{H2}^* &\equiv \mathbf{M}_5 (\mathbf{B}^3 \mathbf{W}) \mathbf{C}_{24} \mathbf{C}_{35} (\mathbf{B}^3 \mathbf{C}) (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}) (\mathbf{B} \mathbf{B}) \\ \mathbf{R}_{H3} &\equiv \mathbf{R}_{H3}^* \mathbf{R}_{H2} \mathbf{D}_C \mathbf{Z}_0 \\ \text{où } \mathbf{R}_{H3}^* &\equiv (\mathbf{M}_3 \mathbf{C}_{27} \mathbf{C}_{46} (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}^2) (\mathbf{B} \mathbf{B})) \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_H &\equiv \mathbf{R}_H^* \mathbf{R}_{H3} \mathbf{Z}_1 \\ \text{où } \mathbf{R}_H^* &\equiv (\mathbf{C}_{25})^3 . \end{aligned}$$

L'expression combinatoire complète de R_H est donc:

$$R_H \equiv (C_{25})^3 [R^*_{H3} [R^*_{H2} [R^*_{H1} D_C S_C] Z_0 Z_1] D_C Z_0] Z_1 ,$$

où R^*_{H1} , R^*_{H2} et R^*_{H3} sont définis comme il a été indiqué.

52.- Expression de la récursion primitive au moyen de l'opérateur prédécesseur

52.1.- L'opérateur prédécesseur

On peut définir comme suit dans le calcul- λ -K un opérateur qui correspond à la fonction *prédécesseur* ⁽¹⁷⁾:

$$P \equiv \lambda x. D_2 [x (\lambda z. D (S_C (D_1 z)) (D_1 z)) (D Z_0 Z_0)] .$$

Effet de l'opérateur P :

$$\begin{aligned} P Z_0 &= Z_0 \\ P (S_C Z_n) &= Z_n . \end{aligned}$$

Expression combinatoire:

$$\begin{aligned} P &\equiv P^* D_2 H D Z_0 \\ \text{où } P^* &\equiv M_4 (B^4 I) (B^2 W) C_{26} (B^2 B^2) B^2 , \\ \text{et } H &\equiv H^* D S_C D_1 \\ \text{avec } H^* &\equiv M_5 (B^2 W) (B W) (B^2 C) (B^2 B) (B B) B . \end{aligned}$$

52.2.- Opérateur de récursion primitive utilisant P.

52.21.- Version de Kleene-Curry

52.211.- Définition

L'opérateur R de 423.31 est remplacé ici par l'opérateur R_K , défini comme suit:

$$\begin{aligned} R_K &\equiv \lambda x y z. R_{K2} x y z (P z) \\ \text{où } R_{K2} &\equiv \lambda x y z. z (R_{K1} x) (K y) \\ \text{et } R_{K1} &\equiv \lambda x y z. x z (y (P x)) . \end{aligned}$$

⁽¹⁷⁾ On ne confondra pas cet opérateur P, prédécesseur (lequel est un combinateur), avec l'ob de l'implication P de la logique combinatoire illicative (ce dernier n'est pas un combinateur).

52.212. *Mode d'action de R_K .*

$$\begin{aligned} \text{Posons: } \mathfrak{R} &= R_{K1} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{L} &= R_{K2} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ \text{et } \mathfrak{M} &= K \mathfrak{B} \end{aligned}$$

Par définition:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \lambda \gamma z. \mathfrak{A} z (\gamma (P z)) \\ \mathfrak{L} &= \lambda z. z (R_{K1} \mathfrak{A}) \mathfrak{M} \\ &= \lambda z. z \mathfrak{R} \mathfrak{M} \\ R_K \mathfrak{A} \mathfrak{B} &= \lambda z. R_{K2} \mathfrak{A} \mathfrak{B} z (P z) \\ &= \lambda z. \mathfrak{L} z (P z) \end{aligned}$$

Voyons comment agit $\mathfrak{L}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} Z_0 &= Z_0 \mathfrak{R} \mathfrak{M} = \mathfrak{M} = K \mathfrak{B} \\ \mathfrak{L} (S_C Z_n) &= (S_C Z_n) \mathfrak{R} \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{R} (Z_n \mathfrak{R} \mathfrak{M}) \\ &= \mathfrak{R} (\mathfrak{L} Z_n) \quad (\text{car } \mathfrak{L} Z_n = Z_n \mathfrak{R} \mathfrak{M}) \\ &= \lambda z. \mathfrak{A} z (\mathfrak{L} Z_n (P z)) . \end{aligned}$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} R_K \mathfrak{A} \mathfrak{B} Z_0 &= \mathfrak{L} Z_0 (P Z_0) \\ &= K \mathfrak{B} Z_0 = \mathfrak{B} \\ R_K \mathfrak{A} \mathfrak{B} (S_C Z_n) &= \mathfrak{L} (S_C Z_n) (P (S_C Z_n)) \\ &= \mathfrak{L} (S_C Z_n) Z_n \\ &= \mathfrak{A} Z_n (\mathfrak{L} Z_n (P Z_n)) \\ &= \mathfrak{A} Z_n (R_K \mathfrak{A} \mathfrak{B} Z_n) . \end{aligned}$$

52.213.- *Expression combinatoire*

$$\begin{aligned} R_{K1} &\equiv R^*_{K1} P \\ \text{où } R^*_{K1} &\equiv (M_5 (B W) C C_{36} C_{46} (B^3 B) (B^2 B)) I \\ R_{K2} &\equiv R^*_{K2} R_{K1} K \\ \text{où } R^*_{K2} &\equiv (M_3 C_{26} (B^2 C) (B^3 B) (B B)) I \\ R_K &\equiv R^*_K R_{K2} P \\ \text{où } R^*_K &\equiv M_4 (B^3 W) C (B C) (B^2 C) (B^3 B) . \end{aligned}$$

L'expression combinatoire complète de R_K est donc:

$$\begin{aligned} R_K &= R^*_K [R^*_{K2} [R^*_{K1} P] K] P , \\ \text{où } R^*_K, R^*_{K1} &\text{ et } R^*_{K2} \text{ sont définis comme il a été indiqué.} \end{aligned}$$

52.22.- *Version de Rosenbloom*

52.221. *Définition*

L'opérateur $\mathbf{R}$ de 423.31 est remplacé ici par l'opérateur $\mathbf{R}_R$, défini comme suit ⁽¹⁸⁾:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_R &\equiv \lambda x y. \mathbf{R}_{R1} (\mathbf{R}_{R2} x y) \\ \text{où } \mathbf{R}_{R1} &\equiv \lambda x. \mathbf{W} (\mathbf{B} x) (\mathbf{W} (\mathbf{B} x)) \\ \text{et } \mathbf{R}_{R2} &\equiv \lambda x y z t. \mathbf{D}_C (\mathbf{K} y) (x (\mathbf{P} t)) t (z (\mathbf{P} t)) \end{aligned}$$

52.222.- *Mode d'action de $\mathbf{R}_R$*

$$\begin{aligned} \text{Posons } \mathfrak{R} &= \mathbf{R}_{R2} \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \lambda z t. \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} t)) t (z (\mathbf{P} t)) \\ \mathfrak{L} &= \mathbf{W} (\mathbf{B} \mathfrak{R}) \\ \mathfrak{M} &= \mathfrak{L} \mathfrak{L} \end{aligned}$$

On a par définition:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (\lambda x y. x y y) (\mathbf{B} \mathfrak{R}) \\ &= \lambda y. (\mathbf{B} \mathfrak{R}) y y \\ &= \lambda y. (\lambda x_1 x_2 x_3. x_1 (x_2 x_3)) \mathfrak{R} y y \\ &= \lambda y. \mathfrak{R} (y y) \\ &= \lambda y t. \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} t)) t (y y (\mathbf{P} t)) \\ &= \lambda x y. \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} y)) y (x x (\mathbf{P} y)) \\ \mathfrak{M} &= \lambda y. \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} y)) y (\mathfrak{L} \mathfrak{L} (\mathbf{P} y)) \\ &= \lambda y. \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} y)) y (\mathfrak{M} (\mathbf{P} y)) \\ &= \mathfrak{R} \mathfrak{M} \\ \mathbf{R}_R \mathfrak{A} \mathfrak{B} &= \mathbf{R}_{R1} (\mathbf{R}_{R2} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) \\ &= \mathbf{R}_{R1} \mathfrak{R} = \mathbf{W} (\mathbf{B} \mathfrak{R}) (\mathbf{W} (\mathbf{B} \mathfrak{R})) \\ &= \mathfrak{L} \mathfrak{L} = \mathfrak{M} . \end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_R \mathfrak{A} \mathfrak{B} Z_0 &= \mathfrak{M} Z_0 = \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} Z_0)) Z_0 (\mathfrak{M} (\mathbf{P} Z_0)) \\ &= \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} Z_0) Z_0 (\mathfrak{M} Z_0) \\ &= \mathbf{K} \mathfrak{B} (\mathfrak{M} Z_0) = \mathfrak{B} . \\ \mathbf{R}_R \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\mathbf{S}_C Z_n) &= \mathfrak{M} (\mathbf{S}_C Z_n) \\ &= \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} (\mathbf{P} (\mathbf{S}_C Z_n))) (\mathbf{S}_C Z_n) (\mathfrak{M} (\mathbf{P} (\mathbf{S}_C Z_n))) \\ &= \mathbf{D}_C (\mathbf{K} \mathfrak{B}) (\mathfrak{A} Z_n) Z_n (\mathfrak{M} Z_n) \\ &= (\mathfrak{A} Z_n) (\mathfrak{M} Z_n) \\ &= \mathfrak{A} Z_n (\mathbf{R}_R \mathfrak{A} \mathfrak{B} Z_n) . \end{aligned}$$

⁽¹⁸⁾ V. ROSENBLUM, p. 130.

52.223.- *Expression combinatoire*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{R1} &\equiv \mathbf{R}^*_{R1} \mathbf{W B} \\
 \text{où } \mathbf{R}^*_{R1} &\equiv (\mathbf{M}_7 (\mathbf{B}^2 \mathbf{W}) (\mathbf{B W}) \mathbf{W C}_{36} \mathbf{C}_{35} (\mathbf{B}^4 \mathbf{B}) (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}) (\mathbf{B B}) \mathbf{I} \\
 \mathbf{R}_{R2} &\equiv \mathbf{R}^*_{R2} \mathbf{D}_C \mathbf{K P} \\
 \text{où } \mathbf{R}^*_{R2} &\equiv \mathbf{M}_{11} (\mathbf{B}^5 \mathbf{W}^2) (\mathbf{B W}) \mathbf{C}_{36} \mathbf{C}_{46} \mathbf{C}_{68} \mathbf{C}_{79} \\
 &\quad (\mathbf{B}^6 \mathbf{C}) (\mathbf{B}^7 \mathbf{B}) (\mathbf{B}^6 \mathbf{B}) (\mathbf{B}^3 \mathbf{B}) (\mathbf{B}^2 \mathbf{B}) \mathbf{B} \\
 \mathbf{R}_R &\equiv \mathbf{R}^*_R \mathbf{R}_{R1} \mathbf{R}_{R2} \\
 \text{où } \mathbf{R}^*_R &\equiv \mathbf{B}^2
 \end{aligned}$$

L'expression combinatoire complète de $\mathbf{R}_R$ est donc:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_R &= \mathbf{B}^2 [\mathbf{R}^*_{R1} \mathbf{W B}] [\mathbf{R}^*_{R2} \mathbf{D}_C \mathbf{K P}] , \\
 \text{où } \mathbf{R}^*_{R1} &\text{ et } \mathbf{R}^*_{R2} \text{ sont définis comme il a été indiqué.}
 \end{aligned}$$

Louvain

Jean LADRIÈRE

BIBLIOGRAPHIE

- CHURCH, A. (1) *Mathematical logic*. Mimeographed. Princeton, N. J., 1936, III + 113 p.
 (2) *The calculi of lambda-conversion*. (Annals of mathematical studies, 6.) Princeton, N. J., Princeton University Press, 1941, II + 77 p.
- CURRY, H. B. (1) *A formalization of recursive arithmetic*. American Journal of Mathematics, vol. 63 (1941), pp. 263-282.
 (2) *The paradox of Kleene and Rosser*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 50 (1941), pp. 454-516.
- CURRY, H. B.
 and FEYS, R. *Combinatory logic. I*. (Studies in logic and the foundations of mathematics.) Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1958, XVI + 417 p.
- KLEENE, S. C. (1) *Proof by cases in formal logic*. Annals of Mathematics, vol. 35 (1934), pp. 529-544.
 (2) *A theory of positive integers in formal logic*. American Journal of Mathematics, vol. 57 (1935), pp. 153-173 et 219-244.
 (3) *General recursive functions of natural numbers*. Mathematische Annalen, vol. 112 (1935-1936), pp. 727-742.
 (4) *λ -Definability and recursiveness*. Duke Mathematical Journal, vol. 2 (1936), pp. 340-353.
- ROSENBLOOM, P. C.
The elements of mathematical logic. New York, Dover Publications, 1950, 214 p.
- ROSSER, J. B. *A mathematical logic without variables*. Annals of Mathematics, vol. 36 (1935), pp. 127-150, et Duke Mathematical Journal, vol. I (1935), pp. 328-355.